

Prova scritta di meccanica razionale 1 M-Z del 09.01.2008

**Esercizio 1**

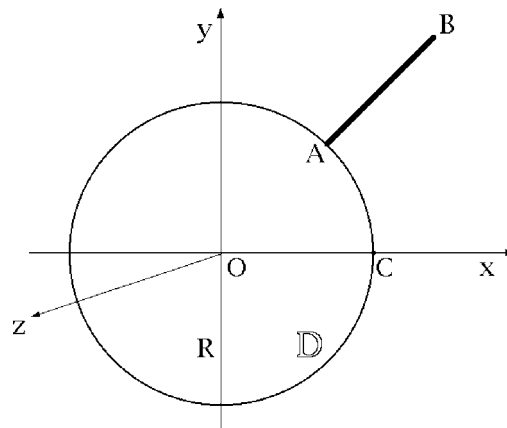
Nel piano  $Oxy$  di una terna inerziale  $Oxyz$ , con l'asse verticale  $Oy$  diretto verso l'alto, si trova la curva  $\gamma$  di equazione  $y = (x^2/L) - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , lungo la quale è vincolato a scorrere un punto materiale  $P$  di massa  $m$  ( $L$  indica una lunghezza caratteristica del sistema). Determinare:

- (a) l'equazione pura del moto di  $P$  nell'ipotesi che  $\gamma$  sia liscia;
- (b) gli equilibri del sistema qualora il coefficiente di attrito radente statico valga  $\mu_s = 1/8$ ;
- (c) l'attrito radente che agisce sul punto, qualora questo sia fermo in  $x = (15/32)L$ .

**Esercizio 2**

Nel piano  $Oxy$  di una terna  $Oxyz$  giace un sistema rigido costituito da un disco circolare  $\mathbb{D}$ , di centro  $O$  e raggio  $R$ , e da un'asta rettilinea  $AB$  di lunghezza  $R$  posta lungo la bisettrice del primo quadrante e saldata a  $\mathbb{D}$  in  $A$  (vedi figura). Le densità di  $AB$  e  $\mathbb{D}$  sono date dalle espressioni:

$$\sigma(P) = \frac{\mu}{\pi R^5} |P - O|^3 \quad \forall P \in \mathbb{D} \quad \lambda(Q) = \frac{\mu}{R^2} |Q - A| \quad \forall Q \in AB.$$

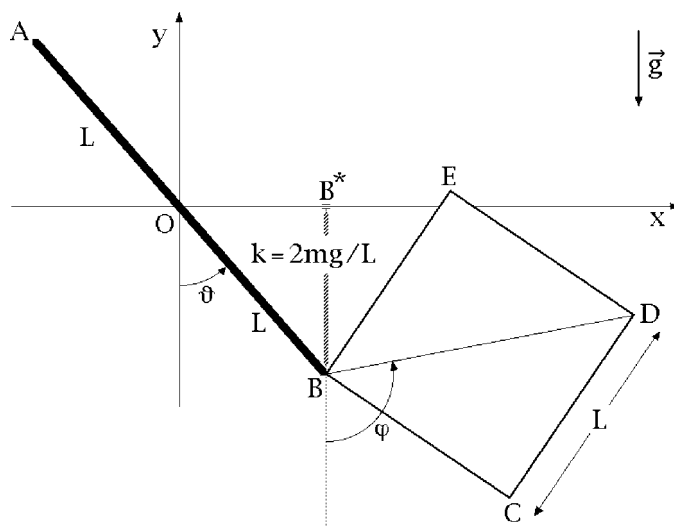


Determinare del sistema:

- (a) il baricentro, accertando che la proprietà dell'involucro convesso risulti soddisfatta;
- (b) la matrice d'inerzia relativa a  $Oxyz$ ;
- (c) il momento d'inerzia rispetto alla retta  $OB$ .

### Esercizio 3

Nel piano  $Oxy$  di una terna cartesiana  $Oxyz$ , che ha l'asse verticale  $Oy$  orientato verso l'alto, si muove il sistema pesante composto da: (a) un'asta omogenea  $AB$ , di lunghezza  $2L$ , massa  $m$  e punto medio  $O$  fisso nell'origine, e (b) una piastra quadrata omogenea  $BCDE$ , di lato  $L$  e massa  $m$ , incernierata all'asta nel vertice  $B$  (vedi figura). Una molla ideale di costante elastica  $k = 2mg/L$  collega  $B$  con la sua proiezione ortogonale  $B^*$  sull'asse  $Ox$ .



Assunti i vincoli ideali e gli angoli  $\varphi$ ,  $\vartheta$  in figura come coordinate generalizzate, determinare del sistema:

- (a) gli equilibri relativi alla terna  $Oxyz$ ;
- (b) la stabilità degli equilibri;
- (c) l'energia cinetica relativa a  $Oxyz$ ;
- (d) le equazioni pure del moto;
- (e) la quantità di moto rispetto alla terna  $Oxyz$ .

## Soluzione dell'esercizio 1

### (a) Equazione del moto nel caso di curva liscia

La curva vincolare è descritta dalla parametrizzazione  $C^\infty$

$$P(x) - O = x \hat{e}_1 + \left(\frac{x^2}{L} - x\right) \hat{e}_2, \quad x \in \mathbb{R},$$

che ammette le derivate

$$P'(x) = \hat{e}_1 + \left(\frac{2x}{L} - 1\right) \hat{e}_2 \quad P''(x) = \frac{2}{L} \hat{e}_2.$$

Si rileva come la curva  $\gamma$  sia regolare, in quanto la derivata prima  $P'(x)$  risulta diversa da zero per qualsiasi valore del parametro  $x$ . Lungo un generico moto possibile  $P(t) = P[x(t)]$ , con  $x(t)$  funzione  $C^2$  in un intervallo reale, la velocità e l'accelerazione istantanee del punto materiale si esprimono per mezzo delle relazioni:

$$\dot{P} = P'(x)\dot{x} \quad \ddot{P} = P'(x)\ddot{x} + P''(x)\dot{x}^2. \quad (0.1)$$

L'equazione del moto è invece data dal postulato delle reazioni vincolari

$$m\ddot{P} = -mg \hat{e}_2 + \vec{\Phi}$$

e si riduce alla forma pura proiettando lungo il vettore tangente

$$m\ddot{P} \cdot P'(x) = -mg \hat{e}_2 \cdot P'(x) \quad (0.2)$$

grazie all'ipotesi di vincolo liscio —  $\vec{\Phi} \cdot P'(x) = 0$  in  $P(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . In virtù della seconda relazione (0.1), l'equazione (0.2) equivale a

$$|P'(x)|^2 \ddot{x} + P''(x) \cdot P'(x) \dot{x}^2 = -g \hat{e}_2 \cdot P'(x)$$

ossia

$$|P'(x)|^2 \ddot{x} + \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} |P'(x)|^2 \right] \dot{x}^2 = -g \hat{e}_2 \cdot P'(x)$$

dove

$$|P'(x)|^2 = 1 + \left(\frac{2x}{L} - 1\right)^2$$

e quindi

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} |P'(x)|^2 \right] = \frac{2}{L} \left(\frac{2x}{L} - 1\right).$$

L'equazione pura del moto diventa perciò

$$\left[ 1 + \left(\frac{2x}{L} - 1\right)^2 \right] \ddot{x} + \frac{2}{L} \left(\frac{2x}{L} - 1\right) \dot{x}^2 = -g \left(\frac{2x}{L} - 1\right).$$

(b) **Equilibri in presenza di attrito radente**

Il punto  $P$  è vincolato a scorrere lungo il grafico di una funzione

$$y = f(x) = \frac{x^2}{L} - x \quad , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

e risulta soggetto unicamente al proprio peso. In base alla teoria generale del punto pesante vincolato ad una curva con attrito, la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del sistema si riduce a richiedere che la pendenza della curva vincolare non ecceda in valore assoluto il relativo coefficiente di attrito radente statico:

$$|f'(x)| \leq \mu_s .$$

Nella fattispecie si deve assumere  $\mu_s = 1/8$ , per cui la condizione di equilibrio diventa

$$\left| \frac{2x}{L} - 1 \right| \leq \frac{1}{8}$$

ovvero

$$-\frac{1}{8} \leq \frac{2x}{L} - 1 \leq \frac{1}{8}$$

da cui si deduce che gli equilibri del sistema sono tutti e soli i punti con ascissa compresa nell'intervallo

$$\frac{7}{16}L \leq x \leq \frac{9}{16}L .$$

(c) **Attrito radente**

Si osservi preliminarmente che

$$x_0 = \frac{15}{32}L \in \left( \frac{7}{16}L, \frac{9}{16}L \right)$$

per cui in base alla discussione (b) precedente l'ascissa  $x_0$  individua una configurazione di equilibrio del sistema, nella quale il punto materiale può essere effettivamente collocato in quiete. In tale stato di quiete il postulato delle reazioni vincolari porge

$$0 = -mg \hat{e}_2 + \vec{\Phi} \quad \implies \quad \vec{\Phi} = mg \hat{e}_2 .$$

L'attrito radente statico è la componente di  $\vec{\Phi}$  tangente alla curva vincolare in  $P(x_0)$ , ossia il vettore

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_T &= \vec{\Phi} \cdot \frac{P'(x_0)}{|P'(x_0)|} \frac{P'(x_0)}{|P'(x_0)|} = mg \hat{e}_2 \cdot \frac{P'(x_0)}{|P'(x_0)|^2} P'(x_0) = \\ &= mg \frac{\frac{2x_0}{L} - 1}{1 + \left( \frac{2x_0}{L} - 1 \right)^2} \left[ \hat{e}_1 + \left( \frac{2x_0}{L} - 1 \right) \hat{e}_2 \right] \end{aligned}$$

che per  $x_0 = (15/32)L$  diventa

$$\vec{\Phi}_T = mg \frac{-\frac{1}{16}}{1 + \left(-\frac{1}{16}\right)^2} \left(\hat{e}_1 - \frac{1}{16} \hat{e}_2\right) = \frac{16}{257} \left(-\hat{e}_1 + \frac{1}{16} \hat{e}_2\right) mg.$$

## Soluzione dell'esercizio 2

### (a) Baricentro

È necessario calcolare separatamente massa e baricentro di disco e asta, per poi applicare il teorema distributivo.

#### Massa e baricentro del disco circolare

L'origine  $O$  è centro di simmetria per il disco, in quanto la densità areale  $\sigma$  dipende unicamente dalla distanza da  $O$ . Il punto  $O$  deve pertanto identificarsi con il baricentro  $G_{\mathbb{D}}$  del disco circolare:

$$G_{\mathbb{D}} = O.$$

La massa dell'oggetto si ottiene invece per integrazione diretta della densità  $\sigma$ , integrazione che è opportuno eseguire in coordinate polari piane  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $(\rho, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$ :

$$m_{\mathbb{D}} = \int_{\mathbb{D}} \sigma dA = \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\mu}{\pi R^5} \rho^3 = \frac{\mu}{\pi R^5} \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu}{\pi R^5} \frac{R^5}{5} 2\pi = \frac{2}{5} \mu.$$

#### Massa e baricentro dell'asta $AB$

L'asta può essere descritta per mezzo dell'ovvia parametrizzazione

$$Q(x) - O = x \hat{e}_1 + x \hat{e}_2, \quad x \in [R/\sqrt{2}, 2R/\sqrt{2}]$$

cui corrisponde l'elemento infinitesimo di lunghezza

$$ds = |Q'(x)| dx = |\hat{e}_1 + \hat{e}_2| dx = \sqrt{2} dx$$

mentre il vettore posizione dell'estremo  $A$  risulta

$$A - O = \frac{R}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 + \frac{R}{\sqrt{2}} \hat{e}_2.$$

La densità lineare dell'asta diventa così, in termini del parametro  $x \in [R/\sqrt{2}, 2R/\sqrt{2}]$ ,

$$\lambda(Q) = \frac{\mu}{R^2} |Q - A| = \frac{\mu}{R^2} \left| \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}}\right) \hat{e}_1 + \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}}\right) \hat{e}_2 \right| = \frac{\mu}{R^2} \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{2}.$$

La massa dell'asta è quindi data dall'integrale curvilineo

$$m_{AB} = \int_{AB} \lambda ds = \int_{R/\sqrt{2}}^{2R/\sqrt{2}} \frac{\mu}{R^2} \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{2} \sqrt{2} dx$$

che con il cambiamento di variabile  $\xi = x - R/\sqrt{2}$  diventa

$$m_{AB} = \int_0^{R/\sqrt{2}} \frac{\mu}{R^2} \xi^2 d\xi = 2 \frac{\mu}{R^2} \left[ \frac{\xi^3}{3} \right]_0^{R/\sqrt{2}} = 2 \frac{\mu}{R^2} \frac{1}{3} \frac{R^3}{\sqrt{2}} = \frac{\mu}{2}.$$

Nella individuazione del baricentro  $G_{AB}$  si deve tenere conto del fatto che per il teorema dell'involuppo convesso  $G_{AB}$  appartiene necessariamente al segmento  $AB$ , che per ipotesi giace lungo la bisettrice del I quadrante nel piano  $Oxy$ ; il relativo vettore posizione sarà perciò della forma

$$G_{AB} - O = x_{AB} \hat{e}_1 + x_{AB} \hat{e}_2$$

e l'ascissa si calcolerà nel modo seguente

$$\begin{aligned} x_{AB} &= \frac{1}{m_{AB}} \int_{AB} x \lambda ds = \frac{2}{\mu} \int_{R/\sqrt{2}}^{2R/\sqrt{2}} x \frac{\mu}{R^2} \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{2} \sqrt{2} dx = \\ &= \frac{2}{\mu} \frac{\mu}{R^2} 2 \int_{R/\sqrt{2}}^{2R/\sqrt{2}} x \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}}\right) dx = \frac{4}{R^2} \int_0^{R/\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{R}{\sqrt{2}}\right) \xi d\xi = \\ &= \frac{4}{R^2} \left[ \frac{\xi^3}{3} + \frac{R}{\sqrt{2}} \frac{\xi^2}{2} \right]_0^{R/\sqrt{2}} = \frac{4}{R^2} \left( \frac{1}{3} \frac{R^3}{2\sqrt{2}} + \frac{R}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \frac{R^2}{2} \right) = 4R \left( \frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{5}{3\sqrt{2}} R \end{aligned}$$

fornendo così la posizione richiesta

$$G_{AB} - O = \frac{5}{6} \sqrt{2} R \hat{e}_1 + \frac{5}{6} \sqrt{2} R \hat{e}_2.$$

*Baricentro del sistema*

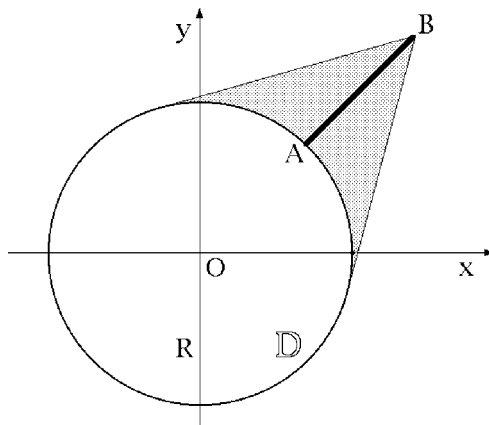
La proprietà distributiva consente ora di determinare il baricentro  $G$  del sistema mediante la relazione vettoriale

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_{\mathbb{D}}(G_{\mathbb{D}} - O) + m_{AB}(G_{AB} - O)}{m_{\mathbb{D}} + m_{AB}} = \frac{m_{AB}}{m_{\mathbb{D}} + m_{AB}} (G_{AB} - O) = \\ &= \frac{\frac{\mu}{2}}{\frac{5}{2}\mu + \frac{\mu}{2}} \frac{5}{6} \sqrt{2} R (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = \frac{5}{9} \frac{5}{6} \sqrt{2} R (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = \frac{25}{54} \sqrt{2} R (\hat{e}_1 + \hat{e}_2). \end{aligned}$$

Si osservi che  $G$  appartiene alla bisettrice del I quadrante nel piano  $Oxy$ , retta che costituisce infatti un asse di simmetria tanto per il disco quanto per l'asta e, dunque, per l'intero sistema. Va anche rilevato che il baricentro è interno a  $\mathbb{D}$ , in quanto

$$|G - O| = \frac{25}{54}\sqrt{2}R|\hat{e}_1 + \hat{e}_2| = \frac{25}{27}R < R$$

e perciò appartiene certamente all'involuppo convesso del sistema. Come evidenziato nella figura seguente, l'involuppo convesso è dato dall'unione del disco chiuso  $\mathbb{D}$  con la porzione di piano ottenuta mandando da  $B$  le rette tangenti alla circonferenza che delimita  $\mathbb{D}$  (la regione ombreggiata in figura)



**(b) Matrice d'inerzia relativa alla terna  $Oxyz$**

Data la diversa natura delle parti che compongono il sistema (curva materiale l'asta  $AB$  e superficie materiale il disco  $\mathbb{D}$ ) è necessario procedere al calcolo della matrice d'inerzia del sistema applicando la proprietà additiva. Si determinano le matrici d'inerzia in  $Oxyz$  delle singole parti e si sommano termine a termine le matrici parziali così ottenute.

*Matrice d'inerzia del disco*

Si osservi che gli assi coordinati  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sono assi di simmetria mutuamente ortogonali e definiscono perciò una terna centrale d'inerzia (di origine  $O$ ). La corrispondente matrice d'inerzia assume dunque la forma diagonale

$$[L_O^{\mathbb{D}}] = \begin{pmatrix} L_{xx}^{\mathbb{D}} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{\mathbb{D}} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^{\mathbb{D}} + L_{yy}^{\mathbb{D}} \end{pmatrix}$$

dove  $L_{zz}^{\mathbb{D}} = L_{xx}^{\mathbb{D}} + L_{yy}^{\mathbb{D}}$  dal momento che l'intero disco giace nel piano coordinato  $Oxy$ . Per simmetria evidente è inoltre

$$L_{xx}^{\mathbb{D}} = L_{yy}^{\mathbb{D}}$$

per cui la determinazione completa di  $[L_O^{\mathbb{D}}]$  richiede il calcolo del solo momento  $L_{xx}^{\mathbb{D}}$ . In realtà conviene calcolare il momento d'inerzia relativo all'asse  $Oz$ , che è pari al doppio di  $L_{xx}^{\mathbb{D}}$ :

$$L_{zz}^{\mathbb{D}} = L_{xx}^{\mathbb{D}} + L_{yy}^{\mathbb{D}} = L_{xx}^{\mathbb{D}} + L_{xx}^{\mathbb{D}} = 2L_{xx}^{\mathbb{D}},$$

in quanto l'integrazione risulta molto più agevole e diretta (nell'integrando, una volta riespresso l'integrale in coordinate polari piane  $(\rho, \phi) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$ , l'angolo  $\phi$  non figura):

$$\begin{aligned} L_{zz}^{\mathbb{D}} &= \int_{\mathbb{D}} (x^2 + y^2) \sigma dA = \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \rho^2 \frac{\mu}{\pi R^5} \rho^3 = \\ &= \frac{\mu}{\pi R^5} \int_0^R \rho^6 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu}{\pi R^5} \frac{R^7}{7} 2\pi = \frac{2}{7} \mu R^2. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$L_{xx}^{\mathbb{D}} = \frac{1}{2} L_{zz}^{\mathbb{D}} = \frac{1}{7} \mu R^2$$

e che la matrice d'inerzia del disco si riduce a

$$[L_O^{\mathbb{D}}] = \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}.$$

#### *Matrice d'inerzia dell'asta*

Anche l'asta  $AB$  si trova completamente collocata nel piano coordinato  $Oxy$ , per cui la relativa matrice d'inerzia assume la forma generale

$$[L_O^{AB}] = \begin{pmatrix} L_{xx}^{AB} & L_{xy}^{AB} & 0 \\ L_{xy}^{AB} & L_{yy}^{AB} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^{AB} + L_{yy}^{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{xx}^{AB} & L_{xy}^{AB} & 0 \\ L_{xy}^{AB} & L_{xx}^{AB} & 0 \\ 0 & 0 & 2L_{xx}^{AB} \end{pmatrix}$$

poichè  $L_{xx}^{AB} = L_{yy}^{AB}$  in quanto la retta  $AB$  è un asse di simmetria. La matrice d'inerzia è allora determinata completamente dal momento  $L_{xx}^{AB}$  e dal prodotto d'inerzia  $L_{xy}^{AB}$ . Per il primo si ha

$$\begin{aligned} L_{xx}^{AB} &= \int_{AB} y^2 \lambda ds = \int_{R/\sqrt{2}}^{2R/\sqrt{2}} x^2 \frac{\mu}{R^2} \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{2} \sqrt{2} dx = \frac{2\mu}{R^2} \int_0^{R/\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 \xi d\xi = \\ &= \frac{2\mu}{R^2} \int_0^{R/\sqrt{2}} \left(\xi^3 + \frac{2R}{\sqrt{2}} \xi^2 + \frac{R^2}{2} \xi\right) d\xi = \frac{2\mu}{R^2} \left[ \frac{\xi^4}{4} + \frac{2R}{\sqrt{2}} \frac{\xi^3}{3} + \frac{R^2}{2} \frac{\xi^2}{2} \right]_0^{R/\sqrt{2}} = \\ &= \frac{2\mu}{R^2} \left( \frac{1}{4} \frac{R^4}{4} + \frac{2R}{\sqrt{2}} \frac{1}{3} \frac{R^3}{2\sqrt{2}} + \frac{R^2}{2} \frac{1}{2} \frac{R^2}{2} \right) = \frac{2\mu}{R^2} \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right) R^4 = \frac{17}{24} \mu R^2 \end{aligned}$$

mentre per il secondo il calcolo è immediato, sempre grazie all'asse di simmetria,

$$L_{xy}^{AB} = - \int_{AB} xy \lambda ds = - \int_{AB} y^2 \lambda ds = -L_{xx}^{AB} = -\frac{17}{24} \mu R^2.$$

La matrice cercata risulta dunque

$$[L_O^{AB}] = \mu R^2 \begin{pmatrix} 17/24 & -17/24 & 0 \\ -17/24 & 17/24 & 0 \\ 0 & 0 & 17/12 \end{pmatrix}.$$

*Matrice d'inerzia del sistema*

La somma delle matrici  $[L_O^{\mathbb{D}}]$  e  $[L_O^{AB}]$  fornisce il risultato richiesto:

$$\begin{aligned} [L_O] &= \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 2/7 \end{pmatrix} + \mu R^2 \begin{pmatrix} 17/24 & -17/24 & 0 \\ -17/24 & 17/24 & 0 \\ 0 & 0 & 17/12 \end{pmatrix} = \\ &= \mu R^2 \begin{pmatrix} 143/168 & -17/24 & 0 \\ -17/24 & 143/168 & 0 \\ 0 & 0 & 143/84 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**(c) Momento d'inerzia rispetto all'asse  $OB$**

La retta  $OB$  passa chiaramente per l'origine della terna  $Oxyz$  rispetto alla quale la matrice d'inerzia del sistema è stata determinata. Il vettore posizione  $B - O$  si scrive

$$B - O = 2\frac{R}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 + 2\frac{R}{\sqrt{2}} \hat{e}_2$$

e ad esso corrisponde il versore direttore della retta

$$\hat{n} = \frac{B - O}{|B - O|} = \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2}{|\hat{e}_1 + \hat{e}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2.$$

Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse  $OB$  è allora dato dalla relazione

$$\begin{aligned} I_{BO} &= \hat{n} \cdot L_O(\hat{n}) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right) [L_O] \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} (1 \ 1 \ 0) \mu R^2 \begin{pmatrix} 143/168 & -17/24 & 0 \\ -17/24 & 143/168 & 0 \\ 0 & 0 & 143/84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ossia

$$I_{BO} = \frac{1}{2} \mu R^2 (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1/7 \\ 1/7 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \mu R^2.$$

Da notare che allo stesso risultato si poteva pervenire direttamente usando la sola matrice  $[L_O^{\mathbb{D}}]$ . L'asse  $OB$  coincide infatti con la retta di giacitura dell'asta  $AB$ , la quale pertanto dà contributo nullo al relativo momento d'inerzia.

### Soluzione dell'esercizio 3

#### (a) Equilibri

Si sta esaminando un sistema scleronomo a vincoli bilaterali ideali, soggetto esclusivamente a sollecitazioni posizionali e conservative: il sistema delle forze peso, agenti su asta e lamina, e l'interazione elastica fra i punti  $B$  e  $B^*$ . Gli equilibri del sistema, tutti ordinari, sono perciò individuati dai punti critici del potenziale totale, che risulta dalla somma di un potenziale gravitazionale e di un potenziale elastico.

#### Potenziale gravitazionale

Il potenziale gravitazionale dell'asta omogenea  $AB$  può essere ignorato nel computo del potenziale totale, in quanto il relativo baricentro coincide con il punto fisso  $O$  e il potenziale risulta dunque costante

$$U_g^{AB} = -mg \hat{e}_2 \cdot (O - O) = 0.$$

Per la piastra quadrata omogenea il potenziale gravitazionale è invece dato da

$$U_g^{BCDE} = -mg \hat{e}_2 \cdot (G - O)$$

dove il baricentro del  $G$  quadrato, che coincide con il corrispondente centro geometrico, viene individuato mediante il vettore posizione

$$G - O = B - O + G - B = L \sin \vartheta \hat{e}_1 - L \cos \vartheta \hat{e}_2 + \frac{L\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \hat{e}_1 - \frac{L\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \hat{e}_2$$

per cui

$$U_g^{BCDE} = mgL \left( \cos \vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi \right).$$

#### Potenziale elastico

La molla ideale di costante elastica  $k = 2mg/L$  congiunge l'estremo  $B$  dell'asta con la proiezione ortogonale  $B^*$  di questo sull'asse orizzontale  $Ox$ . Il potenziale elastico corrispondente è espresso dalla formula

$$U_{el} = -\frac{1}{2} \frac{2mg}{L} |B^* - B|^2 = -\frac{mg}{L} |B^* - B|^2$$

nella quale  $B^* - B = L \cos \vartheta \hat{e}_2$ , per cui

$$U_{el} = -\frac{mg}{L} L^2 \cos^2 \vartheta = -mgL \cos^2 \vartheta.$$

### Potenziale del sistema

Come già precisato, il potenziale del sistema è definito dalla somma dei potenziali parziali, gravitazionale ed elastico, appena calcolati:

$$\begin{aligned} U(\vartheta, \varphi) &= U_g^{AB} + U_g^{BCDE} + U_{el} = mgL \left( \cos \vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi - \cos^2 \vartheta \right) = \\ &= mgL \left( \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi \right). \end{aligned}$$

### Equilibri del sistema

Per determinare gli equilibri del sistema occorre e basta porre uguali a zero le derivate parziali prime del potenziale

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = mgL(-\sin \vartheta + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta) \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mgL \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi$$

e quindi risolvere il sistema di equazioni trigonometriche disaccoppiate

$$\begin{cases} \sin \vartheta \left( \cos \vartheta - \frac{1}{2} \right) = 0 \\ \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

dalle quali si ricavano le radici

$$\vartheta = 0, \quad \pi, \quad +\pi/3, \quad -\pi/3$$

e  $\varphi = 0, \pi$ . Le configurazioni di equilibrio del sistema sono pertanto:

$$\begin{aligned} (\vartheta, \varphi) &= (0, 0), \quad (\pi, 0), \quad (\pi/3, 0), \quad (-\pi/3, 0) \\ &= (0, \pi), \quad (\pi, \pi), \quad (\pi/3, \pi), \quad (-\pi/3, \pi). \end{aligned}$$

### (b) Stabilità degli equilibri

L'analisi di stabilità dell'equilibrio viene condotta ricorrendo ai teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale, applicabili in presenza di sollecitazioni esclusivamente posizionali e conservative, come nel presente caso. A questo scopo, occorre calcolare preliminarmente le derivate parziali seconde del potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}(\vartheta, \varphi) &= mgL(-\cos \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta + 2 \cos^2 \vartheta) & \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}(\vartheta, \varphi) &= 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial \varphi}(\vartheta, \varphi) &= 0 & \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \vartheta}(\vartheta, \varphi) &= -mgL \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi \end{aligned}$$

che portano alla seguente espressione generale per la relativa matrice hessiana

$$H_U(\vartheta, \varphi) = mgL \begin{pmatrix} -\cos \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta + 2 \cos^2 \vartheta & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

di cui è manifesto il carattere diagonale. La natura dell'equilibrio è quindi determinata dal segno degli elementi diagonali.

*Configurazioni con  $\varphi = \pi$*

Per tutte le configurazioni aventi  $\varphi = \pi$  si ha che l'autovalore

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

è strettamente positivo; di conseguenza, gli equilibri

$$(\vartheta, \varphi) = (0, \pi), \quad (\pi, \pi), \quad (\pi/3, \pi), \quad (-\pi/3, \pi)$$

risultano tutti instabili per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet. In ogni altro caso, allorquando  $\varphi = 0$ , si ha invece

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$$

e le proprietà di stabilità dell'equilibrio sono determinate completamente dal segno di  $\partial^2 U / \partial \vartheta^2$ .

*Configurazione  $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$*

In questa configurazione si ha un autovalore positivo dell'hessiana

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}(0, 0) = mgL(-1 + 2) = mgL > 0$$

per cui l'equilibrio risulta instabile in forza del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

*Configurazione  $(\vartheta, \varphi) = (\pi, 0)$*

Anche in questo caso la derivata parziale seconda in  $\vartheta$  assume segno positivo

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}(\pi, 0) = mgL(1 + 2) = 3mgL > 0$$

ed implica l'instabilità della configurazione di equilibrio.

*Configurazione  $(\vartheta, \varphi) = (\pi/3, 0)$*

Nella fattispecie la matrice hessiana presenta anche il secondo autovalore negativo

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}(\pi/3, 0) = mgL \left[ -\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right] = -\frac{3}{2}mgL < 0$$

che consente di riconoscere in  $(\vartheta, \varphi) = (\pi/3, 0)$  un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione  $(\vartheta, \varphi) = (-\pi/3, 0)$

In questo ultimo caso valgono le stesse proprietà di stabilità provate per la configurazione precedente, simmetrica. Si ha infatti

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}(-\pi/3, 0) = mgL \left[ -\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right] = -\frac{3}{2}mgL < 0$$

e l'equilibrio risulta stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet, in quanto massimo relativo proprio del potenziale.

### (c) Energia cinetica

La diversa natura delle parti rigide che compongono il sistema — l'asta  $AB$  e la piastra  $BCDE$  costituiscono rispettivamente una curva e una superficie materiale — obbliga a calcolare l'energia cinetica del sistema come somma delle energie cinetiche delle parti costituenti, applicando la proprietà additiva.

#### Energia cinetica dell'asta $AB$

L'asta  $AB$ , di massa  $m$  e lunghezza  $2L$ , ruota attorno all'asse fisso  $Oz$  con angolo di rotazione  $\vartheta$ . L'energia cinetica corrispondente è data dalla relazione

$$T_{AB} = \frac{1}{2} I_{Oz}^{AB} |\dot{\vartheta} \hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{12} m (2L)^2 \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{6} mL^2 \dot{\vartheta}^2.$$

#### Energia cinetica della piastra $BCDE$

La piastra non presenta alcun punto fisso. La sua energia cinetica deve essere valutata ricorrendo al teorema di König

$$T_{BCDE} = \frac{1}{2} m \dot{G}^2 + \frac{1}{2} I_{Gz}^{BCDE} |\dot{\varphi} \hat{e}_3|^2 \quad (0.3)$$

dove il vettore posizione del baricentro è dato da

$$G - O = L \left( \sin \vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi \right) \hat{e}_1 - L \left( \cos \vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi \right) \hat{e}_2$$

per cui la relativa velocità istantanea assume la forma

$$\dot{G} = L \left( \cos \vartheta \dot{\vartheta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \hat{e}_1 + L \left( \sin \vartheta \dot{\vartheta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi \dot{\varphi} \right) \hat{e}_2$$

ed ha modulo quadrato

$$\begin{aligned} \dot{G}^2 &= L^2 \left( \cos^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos \vartheta \cos \varphi \dot{\vartheta} \dot{\varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \sin \vartheta \sin \varphi \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \right) = L^2 \left[ \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \right] \end{aligned}$$

mentre il momento d'inerzia del quadrato omogeneo rispetto all'asse  $Gz$  si scrive

$$I_{Gz}^{BCDE} = \frac{mL^2}{6}.$$

La relazione (0.3) diventa così

$$\begin{aligned} T_{BCDE} &= \frac{mL^2}{2} \left[ \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \right] + \frac{1}{2} \frac{mL^2}{6} \dot{\varphi}^2 = \\ &= \frac{mL^2}{2} \left[ \dot{\vartheta}^2 + \frac{2}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \right]. \end{aligned}$$

*Energia cinetica del sistema*

La somma di  $T_{AB}$  e  $T_{BCDE}$  fornisce l'energia cinetica richiesta:

$$T = T_{AB} + T_{BCDE} = \frac{mL^2}{2} \left[ \frac{4}{3} \dot{\vartheta}^2 + \frac{2}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \right].$$

**(d) Equazioni pure del moto**

Il sistema in esame è olonomo, a vincoli bilaterali ideali e soggetto unicamente a sollecitazioni posizionali conservative. Le equazioni del moto sono dunque quelle di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

con la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{mL^2}{2} \left[ \frac{4}{3} \dot{\vartheta}^2 + \frac{2}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \right] + mgL \left( \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi \right).$$

Ricordando che nel calcolo dei binomi di Lagrange a primo membro le variabili  $\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$  devono essere riguardate come indipendenti, le espressioni seguenti sono immediate:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{mL^2}{2} \left[ \frac{8}{3} \dot{\vartheta} + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \varphi) \dot{\varphi} \right] = mL^2 \left[ \frac{4}{3} \dot{\vartheta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \varphi) \dot{\varphi} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) = mL^2 \left[ \frac{4}{3} \ddot{\vartheta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \varphi) \ddot{\varphi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\vartheta - \varphi) (\dot{\vartheta} - \dot{\varphi}) \dot{\varphi} \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = -mL^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} + mgL (-\sin \vartheta + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{mL^2}{2} \left[ \frac{4}{3} \dot{\varphi} + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta} \right] = mL^2 \left[ \frac{2}{3} \dot{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = mL^2 \left[ \frac{2}{3} \ddot{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \varphi) \ddot{\vartheta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\vartheta - \varphi) (\dot{\vartheta} - \dot{\varphi}) \dot{\vartheta} \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = mL^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} - mgL \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi.$$

Le equazioni di Lagrange del moto diventano così

$$mL^2 \left[ \frac{4}{3} \ddot{\vartheta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\vartheta - \varphi) \dot{\varphi}^2 \right] + mgL(\sin \vartheta - 2 \cos \vartheta \sin \vartheta) = 0$$

$$mL^2 \left[ \frac{2}{3} \ddot{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\vartheta - \varphi) \ddot{\vartheta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta}^2 \right] + mgL \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi = 0.$$

(e) **Quantità di moto del sistema**

La quantità di moto del sistema è una grandezza additiva e si calcola perciò come somma delle quantità di moto dell'asta  $AB$  e della piastra  $BCDE$ :

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \vec{Q}_{AB} + \vec{Q}_{BCDE} = m\dot{O} + m\dot{G} = m\dot{G} = \\ &= mL \left( \cos \vartheta \dot{\vartheta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \hat{e}_1 + mL \left( \sin \vartheta \dot{\vartheta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi \dot{\varphi} \right) \hat{e}_2. \end{aligned}$$