

Prova scritta di meccanica razionale 1 M-Z del 27.01.2009

Esercizio 1

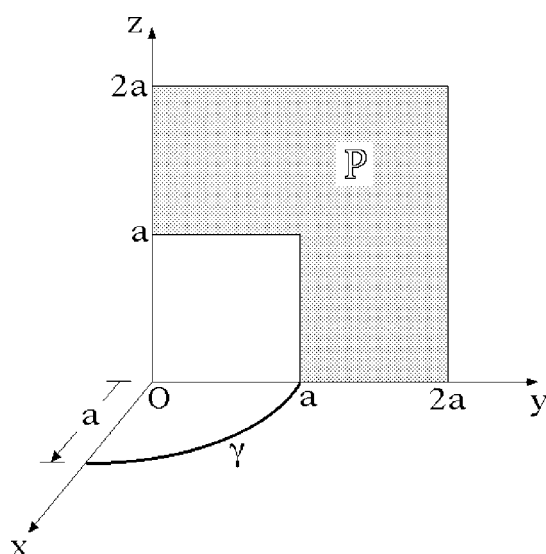
Un sistema materiale si compone di una curva omogenea γ , di massa μ , che rispetto a una terna $Oxyz$ è parametrizzata da

$$x = a \cos \phi \quad y = a \sin \phi \quad z = 0, \quad \phi \in [0, \pi/2],$$

e da una piastra \mathbb{P} ubicata nel piano coordinato Oyz come tratteggiato in figura, con densità

$$\sigma(y, z) = \frac{\mu}{a^3}(y + z) \quad \forall (y, z) \in \mathbb{P},$$

essendo a una lunghezza costante caratteristica.

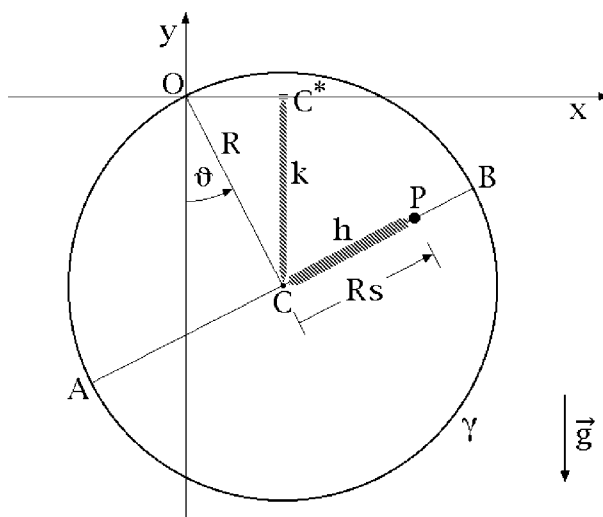


Determinare:

- il baricentro del sistema;
- la matrice d'inerzia in $Oxyz$ della piastra;
- la matrice d'inerzia in $Oxyz$ del sistema;
- il momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta $y = 0, 3z + 4x = 0$;
- il momento d'inerzia della piastra rispetto alla retta $y = 2a, z = 2a$.

Esercizio 2

Una guida circolare omogenea γ , di massa m , raggio R e centro C , può ruotare liberamente attorno al suo punto O nel piano Oxy di una terna inerziale $Oxyz$. Una molla ideale di costante elastica $k = 2mg/R$ collega C con la sua proiezione ortogonale C^* sull'asse orizzontale Ox . Lungo il diametro AB , ortogonale al raggio CO , può scorrere un punto materiale P di massa m , connesso a C da una seconda molla di costante $h = 4mg/R$. L'intero sistema è pesante e i vincoli si assumono ideali.



Si faccia uso dei parametri lagrangiani $s \in [-1, 1]$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$ illustrati in figura per determinare del sistema:

- gli equilibri ordinari e di confine;
- le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- l'espressione dell'energia cinetica;
- le equazioni di Lagrange del moto;
- le espressioni di impulso e momento angolare in O .

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Baricentro del sistema

Il baricentro del sistema viene determinato calcolando le masse e i baricentri della curva γ e della piastra \mathbb{P} ed applicando quindi la proprietà distributiva. Si noti che l'operazione è perfettamente legittima, in quanto l'intersezione $\gamma \cap \mathbb{P}$ consiste nel solo punto $(x, y, z) = (0, a, 0)$ e risulta perciò tanto di lunghezza quanto di area nulla: i sottosistemi γ e \mathbb{P} possono considerarsi, di fatto, disgiunti.

Baricentro di γ

La curva materiale γ è chiaramente un arco di circonferenza di centro O e raggio a , con lunghezza $2\pi a/4 = \pi a/2$, massa μ e densità costante $\lambda = \mu(\pi a/2)^{-1} = 2\mu/\pi a$. La parametrizzazione è quella assegnata

$$P(\phi) - O = a \cos \phi \hat{e}_1 + a \sin \phi \hat{e}_2 \quad \phi \in [0, \pi/2]$$

con l'ascissa curvilinea definita dal differenziale

$$ds = |P'(\phi)| d\phi = |-a \sin \phi \hat{e}_1 + a \cos \phi \hat{e}_2| d\phi = a d\phi.$$

L'ascissa del baricentro G_γ della curva vale pertanto:

$$x_\gamma = \frac{1}{\mu} \int_0^{\pi/2} a \cos \phi \lambda ds = \frac{1}{\mu} \int_0^{\pi/2} a \cos \phi \frac{2\mu}{\pi a} a d\phi = \frac{2a}{\pi} [\sin \phi]_0^{\pi/2} = \frac{2a}{\pi}$$

mentre per l'ordinata risulta

$$y_\gamma = \frac{1}{\mu} \int_0^{\pi/2} a \sin \phi \lambda ds = \frac{1}{\mu} \int_0^{\pi/2} a \sin \phi \frac{2\mu}{\pi a} a d\phi = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi = \frac{2a}{\pi} [-\cos \phi]_0^{\pi/2} = \frac{2a}{\pi}$$

e la quota z_γ è banalmente nulla per via dell'ovvio piano di simmetria Oxy . Si osservi che la condizione $x_\gamma = y_\gamma$ segue anche dal ricorrere dell'asse di simmetria $y = x$ nel piano Oxy . Il baricentro della curva materiale è dunque individuato dal vettore posizione

$$G_\gamma - O = \frac{2a}{\pi} \hat{e}_1 + \frac{2a}{\pi} \hat{e}_2.$$

Baricentro della piastra \mathbb{P}

È opportuno riguardare la piastra \mathbb{P} come la differenza fra la lamina quadrata completa $[0, 2a]^2 = \{(y, z) \in [0, 2a] \times [0, 2a]\}$ e la lamina quadrata $[0, a]^2 = \{(y, z) \in [0, a] \times [0, a]\}$, che si può immaginare rimossa dalla precedente per ottenere \mathbb{P} , convenendo di prolungare la densità σ all'intera $[0, 2a]^2$ in modo ovvio:

$$\sigma(y, z) = \frac{\mu}{a^3}(y + z) \quad \forall (y, z) \in [0, 2a]^2. \quad (0.1)$$

Si determinano quindi le masse ed i baricentri parziali delle piastre $[0, 2a]^2$ e $[0, a]^2$ per applicare poi il teorema distributivo.

○ *Massa di $[0, 2a]^2$*

La massa della lamina completa $[0, 2a]^2$ si ricava integrando la densità σ definita da (0.1) sull'intero dominio quadrato $[0, 2a]^2$:

$$\begin{aligned} m_{2a} &= \int_0^{2a} dy \int_0^{2a} dz \frac{\mu}{a^3} (y+z) = \frac{\mu}{a^3} \int_0^{2a} dy \left[yz + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{2a} = \frac{\mu}{a^3} \int_0^{2a} (2ay + 2a^2) dy = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \left[ay^2 + 2a^2y \right]_0^{2a} = \frac{\mu}{a^3} (a4a^2 + 2a^22a) = 8\mu. \end{aligned}$$

○ *Baricentro di $[0, 2a]^2$*

Il piano di giacitura Oyz della lamina completa $[0, 2a]^2$ deve contenere anche il relativo baricentro G_{2a} , la cui ascissa è dunque certamente nulla

$$x_{2a} = 0.$$

D'altra parte, l'ordinata e la quota di G_{2a} devono coincidere

$$y_{2a} = z_{2a}$$

in quanto $\forall (y, z) \in [0, 2a]^2$ vale $(z, y) \in [0, 2a]^2$ e

$$\sigma(y, z) = \sigma(z, y)$$

per cui la retta $z = y$, $x = 0$, costituisce un asse di simmetria della lamina quadrata di lato $2a$. È così sufficiente determinare una sola delle due coordinate richieste, per esempio la quota:

$$\begin{aligned} z_{2a} &= \frac{1}{8\mu} \int_0^{2a} dy \int_0^{2a} dz z \frac{\mu}{a^3} (y+z) = \frac{1}{8a^3} \int_0^{2a} dy \int_0^{2a} dz (yz + z^2) = \\ &= \frac{1}{8a^3} \int_0^{2a} dy \left[y\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{2a} = \frac{1}{8a^3} \int_0^{2a} \left(2a^2y + \frac{8}{3}a^3 \right) dy = \\ &= \frac{1}{8a^3} \left[a^2y^2 + \frac{8}{3}a^3y \right]_0^{2a} = \frac{1}{8a^3} \left(a^24a^2 + \frac{8}{3}a^32a \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) a = \frac{7}{6}a \end{aligned}$$

per concludere che il vettore posizione del baricentro assume la forma

$$G_{2a} - O = \frac{7}{6}a \hat{e}_2 + \frac{7}{6}a \hat{e}_3.$$

◦ *Massa di* $[0, a]^2$

Per la massa della lamina rimossa $[0, a]^2$ si ha l'integrale

$$\begin{aligned} m_a &= \int_0^a dy \int_0^a dz \frac{\mu}{a^3} (y+z) = \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dy \left[yz + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^a = \frac{\mu}{a^3} \int_0^a \left(ya + \frac{a^2}{2} \right) dy = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \left[\frac{y^2}{2} a + \frac{a^2}{2} y \right]_0^a = \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} \right) = \mu. \end{aligned}$$

◦ *Baricentro di* $[0, a]^2$

Anche il baricentro G_a della lamina $[0, a]^2$ deve collocarsi lungo l'asse di simmetria $z = y$ nel piano Oyz :

$$\sigma(y, z) = \sigma(z, y) \quad \forall (y, z) \in [0, a]^2$$

ed il suo vettore posizione deve quindi essere del tipo

$$G_a - O = y_a \hat{e}_2 + y_a \hat{e}_3.$$

L'ordinata del centro di massa vale peraltro

$$\begin{aligned} y_a &= \frac{1}{\mu} \int_0^a dy \int_0^a dz y \frac{\mu}{a^3} (y+z) = \frac{1}{a^3} \int_0^a dy \int_0^a dz (y^2 + yz) = \frac{1}{a^3} \int_0^a dy \left[y^2 z + y \frac{z^2}{2} \right]_0^a = \\ &= \frac{1}{a^3} \int_0^a \left(y^2 a + y \frac{a^2}{2} \right) dy = \frac{1}{a^3} \left[\frac{y^3}{3} a + \frac{y^2}{2} \frac{a^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{a^3} \left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{4} \right) = \frac{7}{12} a \end{aligned}$$

per cui

$$G_a - O = \frac{7}{12} a \hat{e}_2 + \frac{7}{12} \hat{e}_3.$$

La massa della piastra \mathbb{P} è chiaramente la differenza delle masse m_{2a} e m_a :

$$m_{\mathbb{P}} = m_{2a} - m_a = 8\mu - \mu = 7\mu$$

e per il baricentro $G_{\mathbb{P}}$ della piastra il teorema distributivo porge l'equazione:

$$\frac{m_{\mathbb{P}}(G_{\mathbb{P}} - O) + m_a(G_a - O)}{m_{2a}} = G_{2a} - O$$

dalla quale segue

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{P}} - O &= \frac{m_{2a}(G_{2a} - O) - m_a(G_a - O)}{m_{\mathbb{P}}} = \frac{8\mu \left(\frac{7}{6} a \hat{e}_2 + \frac{7}{6} a \hat{e}_3 \right) - \mu \left(\frac{7}{12} a \hat{e}_2 + \frac{7}{12} a \hat{e}_3 \right)}{7\mu} \\ &= 8 \left(\frac{1}{6} a \hat{e}_2 + \frac{1}{6} a \hat{e}_3 \right) - \left(\frac{1}{12} a \hat{e}_2 + \frac{1}{12} a \hat{e}_3 \right) = \frac{5}{4} a \hat{e}_2 + \frac{5}{4} a \hat{e}_3. \end{aligned}$$

Baricentro del sistema

Per ricavare il baricentro G del sistema non rimane che applicare la proprietà distributiva alle parti γ e \mathbb{P} :

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_\gamma(G_\gamma - O) + m_{\mathbb{P}}(G_{\mathbb{P}} - O)}{m_\gamma + m_{\mathbb{P}}} = \frac{\mu\left(\frac{2a}{\pi}\hat{e}_1 + \frac{2a}{\pi}\hat{e}_2\right) + 7\mu\left(\frac{5}{4}a\hat{e}_2 + \frac{5}{4}a\hat{e}_3\right)}{\mu + 7\mu} = \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{\pi}\hat{e}_1 + \frac{2}{\pi}\hat{e}_2 + 7 \cdot \frac{5}{4}\hat{e}_2 + 7 \cdot \frac{5}{4}\hat{e}_3\right)a = \frac{1}{4\pi}a\hat{e}_1 + \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{35}{32}\right)a\hat{e}_2 + \frac{35}{32}a\hat{e}_3. \end{aligned}$$

(b) Matrice d'inerzia della piastra

Anche per il calcolo della matrice d'inerzia relativa a $Oxyz$ conviene trattare la piastra \mathbb{P} come differenza fra la piastra quadrata completa $[0, 2a]^2$ e la piastra quadrata $[0, a]^2$, prolungando la definizione (0.1) della densità areale all'intero dominio quadrato $[0, 2a]^2$. La matrice d'inerzia è quindi pari alla differenza fra le matrici d'inerzia, calcolate rispetto alla medesima terna $Oxyz$, di $[0, 2a]^2$ e $[0, a]^2$. Per brevità, si calcolano direttamente le differenze fra i relativi elementi di matrice, per ciascun momento e prodotto d'inerzia di \mathbb{P} . Poichè la piastra giace interamente nel piano Oyz , la matrice d'inerzia di \mathbb{P} deve presentarsi nella forma generale

$$[L_O^{\mathbb{P}}] = \begin{pmatrix} L_{yy}^{\mathbb{P}} + L_{zz}^{\mathbb{P}} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{\mathbb{P}} & L_{yz}^{\mathbb{P}} \\ 0 & L_{yz}^{\mathbb{P}} & L_{zz}^{\mathbb{P}} \end{pmatrix}.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse Oy è dato da

$$\begin{aligned} L_{yy}^{\mathbb{P}} &= \int_{[0, 2a]^2} z^2 \sigma \, dydz - \int_{[0, a]^2} z^2 \sigma \, dydz = \\ &= \int_0^{2a} dy \int_0^{2a} dz z^2 \frac{\mu}{a^3} (y+z) - \int_0^a dy \int_0^a dz z^2 \frac{\mu}{a^3} (y+z) = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \int_0^{2a} dy \int_0^{2a} dz (yz^2 + z^3) - \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dy \int_0^a dz (yz^2 + z^3) = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \int_0^{2a} dy \left[y \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^{2a} - \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dy \left[y \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^a = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \int_0^{2a} \left(y \frac{8a^3}{3} + 4a^4 \right) dy - \frac{\mu}{a^3} \int_0^a \left(y \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{4} \right) dy = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \left[\frac{y^2}{2} \frac{8}{3} a^3 + 4a^4 y \right]_0^{2a} - \frac{\mu}{a^3} \left[\frac{y^2}{2} \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{4} y \right]_0^a = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{16}{3} a^5 + 8a^5 \right) - \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{a^5}{6} + \frac{a^5}{4} \right) = \frac{40}{3} \mu a^2 - \frac{5}{12} \mu a^2 = \frac{155}{12} \mu a^2 \end{aligned}$$

e coincide con quello relativo all'asse Oz

$$\begin{aligned} L_{zz}^{\mathbb{P}} &= \int_{[0,2a]^2} y^2 \sigma \, dydz - \int_{[0,a]^2} y^2 \sigma \, dydz = \\ &= \int_0^{2a} dy \int_0^{2a} dz y^2 \frac{\mu}{a^3} (y+z) - \int_0^a dy \int_0^a dz y^2 \frac{\mu}{a^3} (y+z) = L_{yy}^{\mathbb{P}} = \frac{155}{12} \mu a^2 \end{aligned}$$

grazie al cambiamento di variabili $(y, z) \in [0, 2a]^2 \rightarrow (z, y) \in [0, 2a]^2$. L'unico prodotto d'inerzia non banale vale invece

$$\begin{aligned} L_{yz}^{\mathbb{P}} &= - \int_{[0,2a]^2} yz \sigma \, dydz + \int_{[0,a]^2} yz \sigma \, dydz = \\ &= - \int_0^{2a} dy \int_0^{2a} dz yz \frac{\mu}{a^3} (y+z) + \int_0^a dy \int_0^a dz yz \frac{\mu}{a^3} (y+z) = \\ &= - \frac{\mu}{a^3} \int_0^{2a} dy \int_0^{2a} dz (y^2 z + yz^2) + \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dy \int_0^a dz (y^2 z + yz^2) = \\ &= - \frac{\mu}{a^3} \int_0^{2a} dy \left[y^2 \frac{z^2}{2} + y \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{2a} + \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dy \left[y^2 \frac{z^2}{2} + y \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^a = \\ &= - \frac{\mu}{a^3} \int_0^{2a} \left(y^2 2a^2 + y \frac{8}{3} a^3 \right) dy + \frac{\mu}{a^3} \int_0^a \left(y^2 \frac{a^2}{2} + y \frac{a^3}{3} \right) dy = \\ &= - \frac{\mu}{a^3} \left[2a^2 \frac{y^3}{3} + \frac{8}{3} a^3 \frac{y^2}{2} \right]_0^{2a} + \frac{\mu}{a^3} \left[\frac{y^3}{3} \frac{a^2}{2} + \frac{y^2}{2} \frac{a^3}{3} \right]_0^a = \\ &= - \frac{\mu}{a^3} \left(2a^2 \frac{8}{3} a^3 + \frac{8}{3} a^3 2a^2 \right) + \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{a^5}{6} + \frac{a^5}{6} \right) = \\ &= - \left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3} \right) \mu a^2 + \frac{1}{3} \mu a^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{32}{3} \right) \mu a^2 = - \frac{31}{3} \mu a^2. \end{aligned}$$

La matrice d'inerzia della piastra \mathbb{P} rispetto alla terna $Oxyz$ diventa pertanto:

$$[L_O^{\mathbb{P}}] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 155/6 & 0 & 0 \\ 0 & 155/12 & -31/3 \\ 0 & -31/3 & 155/12 \end{pmatrix}.$$

(c) Matrice d'inerzia del sistema

Per determinare la matrice d'inerzia del sistema basta calcolare la matrice d'inerzia in $Oxyz$ della curva γ e sommarla a quella della piastra \mathbb{P} : la proprietà additiva della matrice

d'inerzia è infatti applicabile grazie al fatto che l'intersezione $\mathbb{P} \cap \gamma$ consta di un unico punto e su di essa tutti gli integrali curvilinei e di superficie sono nulli.

Matrice d'inerzia di γ

La curva materiale si situa nel piano coordinato Oxy , per cui la relativa matrice d'inerzia deve assumere la forma semplificata

$$[L_O^\gamma] = \begin{pmatrix} L_{xx}^\gamma & L_{xy}^\gamma & 0 \\ L_{xy}^\gamma & L_{yy}^\gamma & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^\gamma + L_{yy}^\gamma \end{pmatrix}.$$

Il momento d'inerzia relativo all'asse Ox è dato dall'integrale curvilineo

$$\begin{aligned} L_{xx}^\gamma &= \int_\gamma y^2 \lambda ds = \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 \phi \frac{2\mu}{\pi a} a d\phi = \frac{2}{\pi} \mu a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi d\phi = \\ &= \frac{2}{\pi} \mu a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi = \frac{2}{\pi} \mu a^2 \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \mu a^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin \pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \mu a^2 \end{aligned}$$

e si identifica con quello rispetto all'asse Oy — come peraltro evidente per simmetria —

$$\begin{aligned} L_{yy}^\gamma &= \int_\gamma x^2 \lambda ds = \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 \phi \frac{2\mu}{\pi a} a d\phi = \frac{2}{\pi} \mu a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi d\phi = \\ &= \frac{2}{\pi} \mu a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi = \frac{1}{\pi} \mu a^2 \left[\phi + \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \mu a^2. \end{aligned}$$

Il prodotto d'inerzia relativo agli assi Ox e Oy risulta invece

$$\begin{aligned} L_{xy}^\gamma &= - \int_\gamma xy \lambda ds = - \int_0^{\pi/2} a \cos \phi a \sin \phi \frac{2\mu}{\pi a} a d\phi = \\ &= - \frac{2}{\pi} \mu a^2 \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi d\phi = - \frac{2}{\pi} \mu a^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^{\pi/2} = - \frac{1}{\pi} \mu a^2 \end{aligned}$$

in modo che la matrice d'inerzia cercata si riduce a

$$[L_O^\gamma] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\pi & 0 \\ -1/\pi & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia del sistema

La matrice d'inerzia del sistema è la somma delle matrici d'inerzia parziali già calcolate:

$$\begin{aligned} [L_O] &= [L_O^\gamma] + [L_O^{\mathbb{P}}] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\pi & 0 \\ -1/\pi & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu a^2 \begin{pmatrix} 155/6 & 0 & 0 \\ 0 & 155/12 & -31/3 \\ 0 & -31/3 & 155/12 \end{pmatrix} = \\ &= \mu a^2 \begin{pmatrix} 79/3 & -1/\pi & 0 \\ -1/\pi & 161/12 & -31/3 \\ 0 & -31/3 & 167/12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta $y = 0, 3z + 4x = 0$

La retta di equazione $y = 0, 3z + 4x = 0$, passa certamente per l'origine O della terna di riferimento ed ammette il versore direttore

$$\hat{n} = \frac{\hat{e}_1 - \frac{4}{3}\hat{e}_3}{\left| \hat{e}_1 - \frac{4}{3}\hat{e}_3 \right|} = \frac{3\hat{e}_1 - 4\hat{e}_3}{5} = \frac{3}{5}\hat{e}_1 - \frac{4}{5}\hat{e}_3.$$

Il momento d'inerzia relativo alla retta assegnata $O\hat{n}$ è quindi espresso dalla relazione matriciale

$$\begin{aligned} I_{O\hat{n}} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \mu a^2 \begin{pmatrix} 79/3 & -1/\pi & 0 \\ -1/\pi & 161/12 & -31/3 \\ 0 & -31/3 & 167/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ -4/5 \end{pmatrix} = \\ &= \mu a^2 \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{79}{5} \\ -\frac{3}{5\pi} + \frac{124}{15} \\ -\frac{167}{15} \end{pmatrix} = \mu a^2 \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{79}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{167}{15} \right) = \frac{1379}{75} \mu a^2. \end{aligned}$$

(e) Momento d'inerzia della piastra rispetto alla retta $y = 2a, z = 2a$

Indicato con A il vertice $(y, z) = (2a, 2a)$ della piastra \mathbb{P} , il momento d'inerzia cercato è quello relativo alla retta Ax . Considerando le rette parallele Ax, Ox e $G_{\mathbb{P}}x$, il teorema di Huygens-Steiner porge le equazioni:

$$I_{Ox}^{\mathbb{P}} = I_{G_{\mathbb{P}}x}^{\mathbb{P}} + m_{\mathbb{P}} |G_{\mathbb{P}} - O|^2$$

$$I_{Ax}^{\mathbb{P}} = I_{G_{\mathbb{P}}x}^{\mathbb{P}} + m_{\mathbb{P}} |A - G_{\mathbb{P}}|^2$$

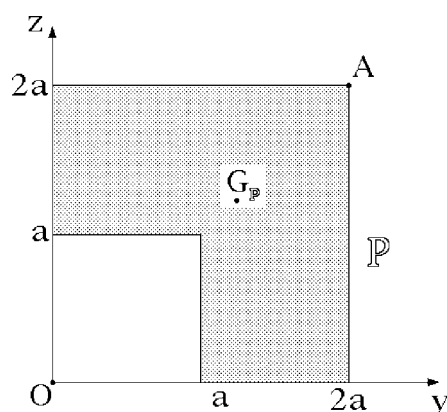
che sottratte membro a membro l'una dall'altra conducono alla relazione

$$I_{Ax}^{\mathbb{P}} - I_{Ox}^{\mathbb{P}} = m_{\mathbb{P}} |A - G_{\mathbb{P}}|^2 - m_{\mathbb{P}} |G_{\mathbb{P}} - O|^2$$

e quindi a

$$\begin{aligned}
 I_{Ax}^{\mathbb{P}} &= I_{Ox}^{\mathbb{P}} + m_{\mathbb{P}}|A - G_{\mathbb{P}}|^2 - m_{\mathbb{P}}|G_{\mathbb{P}} - O|^2 = \\
 &= \frac{155}{6}\mu a^2 + 7\mu \left[\left(2a - \frac{5}{4}a\right)^2 + \left(2a - \frac{5}{4}a\right)^2 \right] - 7\mu \left[\left(\frac{5}{4}a\right)^2 + \left(\frac{5}{4}a\right)^2 \right] = \\
 &= \frac{155}{6}\mu a^2 + 7\mu a^2 \frac{9}{8} - 7\mu a^2 \frac{25}{8} = \frac{71}{6}\mu a^2
 \end{aligned}$$

che è il momento d'inerzia richiesto. La figura seguente mostra la mutua collocazione dei punti O , $G_{\mathbb{P}}$ e A nel piano Oyz ; le distanze fra questi punti rappresentano chiaramente le distanze fra i corrispondenti assi — ortogonali al piano coordinato Oyz .



Soluzione dell'esercizio 2

(a) Equilibri ordinari e di confine

Le forze che agiscono su questo sistema scleronomo a vincoli ideali sono tutte posizionali e conservative: il peso e le interazioni elastiche associate alle molle $C - P$ e $C - C^*$. È quindi definito un potenziale del sistema, dato dalla somma di un potenziale gravitazionale e di un potenziale elastico.

Potenziale gravitazionale

La guida circolare omogenea γ ha nel proprio centro C un ovvio centro di simmetria, che dunque va identificato con il baricentro. Il potenziale delle forze peso è dunque la somma di un termine relativo alla guida e di uno relativo al punto materiale:

$$U_g = -mg \hat{e}_2 \cdot (C - O) - mg \hat{e}_2 \cdot (P - O).$$

Il centro della guida è individuato dal vettore posizione

$$C - O = R \sin \vartheta \hat{e}_1 - R \cos \vartheta \hat{e}_2$$

mentre per il punto P si ha

$$\begin{aligned}
 P - O &= P - C + C - O = Rs \cos \vartheta \hat{e}_1 + Rs \sin \vartheta \hat{e}_2 + R \sin \vartheta \hat{e}_1 - R \cos \vartheta \hat{e}_2 = \\
 &= R(s \cos \vartheta + \sin \vartheta) \hat{e}_1 + R(s \sin \vartheta - \cos \vartheta) \hat{e}_2.
 \end{aligned} \tag{0.2}$$

Il potenziale gravitazionale diventa pertanto:

$$U_g = mgR \cos \vartheta - mgR(s \sin \vartheta - \cos \vartheta) = 2mgR \cos \vartheta - mgRs \sin \vartheta.$$

Potenziale elastico

Il potenziale elastico del sistema è dato da

$$\begin{aligned} U_{el} &= -\frac{k}{2}|C - C^*|^2 - \frac{h}{2}|P - C|^2 = -\frac{mg}{R}|C - C^*|^2 - \frac{2mg}{R}|P - C|^2 = \\ &= -\frac{mg}{R}|R \cos \vartheta|^2 - \frac{2mg}{R}|Rs|^2 = -mgR \cos^2 \vartheta - 2mgRs^2. \end{aligned}$$

Potenziale del sistema

La somma dei potenziali parziali calcolati fornisce il potenziale del sistema:

$$\begin{aligned} U(s, \vartheta) &= 2mgR \cos \vartheta - mgRs \sin \vartheta - mgR \cos^2 \vartheta - 2mgRs^2 = \\ &= mgR(2 \cos \vartheta - s \sin \vartheta - \cos^2 \vartheta - 2s^2) \quad \forall (s, \vartheta) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Equilibri ordinari

Gli equilibri ordinari del sistema sono tutti e soli i punti critici del potenziale ricompresi nella striscia aperta di \mathbb{R}^2 :

$$\{(s, \vartheta) \in \mathbb{R}^2, : -1 < s < 1\}$$

e si ottengono quindi risolvendo sullo stesso dominio aperto il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial s} = mgR(-\sin \vartheta - 4s) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = mgR(-2 \sin \vartheta - s \cos \vartheta + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta) = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} -\sin \vartheta - 4s = 0 \\ -2 \sin \vartheta - s \cos \vartheta + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta = 0. \end{cases} \quad (0.3)$$

Dalla prima delle equazioni (0.3) si deduce la relazione

$$s = -\frac{1}{4} \sin \vartheta,$$

che sostituita nella seconda porge

$$-2 \sin \vartheta + \frac{1}{4} \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta = 0$$

ossia

$$\sin \vartheta \left(-\frac{8}{9} + \cos \vartheta \right) = 0.$$

in modo che i valori di equilibrio della variabile angolare risultano:

$$\vartheta = 0 \quad \vartheta = \pi \quad \vartheta = \arccos(8/9) \quad \vartheta = -\arccos(8/9)$$

I corrispondenti valori della coordinata s sono $s = 0$ per i primi due angoli e

$$s = -\frac{1}{4} \sin[\arccos(8/9)] = -\frac{1}{4} \sqrt{1 - (8/9)^2} = -\frac{\sqrt{17}}{36} \quad s = +\frac{\sqrt{17}}{36}$$

per i due rimanenti. Ne deriva che le configurazioni di equilibrio del sistema sono le seguenti:

$$\begin{aligned} (s, \vartheta) &= (0, 0) & (s, \vartheta) &= (0, \pi) \\ (s, \vartheta) &= \left(-\sqrt{17}/36, \arccos(8/9)\right) & (s, \vartheta) &= \left(\sqrt{17}/36, -\arccos(8/9)\right). \end{aligned}$$

Equilibri di confine

Le configurazioni di confine del sistema sono individuate dalle coppie di valori delle coordinate lagrangiane del tipo

$$\{(s, \vartheta) = (-1, \vartheta) : \vartheta \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \{(s, \vartheta) = (+1, \vartheta) : \vartheta \in \mathbb{R}\}.$$

I due insiemi, che rappresentano rispettivamente il bordo inferiore e quello superiore della striscia $\{(s, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq s \leq 1\}$, vengono esaminati separatamente.

(i) *Configurazioni* $(s, \vartheta) = (-1, \vartheta)$

Il teorema dei lavori virtuali afferma che una configurazione di questo tipo è di equilibrio per il sistema se e solo se:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(-1, \vartheta) \delta s + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}(-1, \vartheta) \delta \vartheta \leq 0 \quad \forall \delta s \geq 0, \forall \delta \vartheta \in \mathbb{R}$$

ossia

$$\frac{\partial U}{\partial s}(-1, \vartheta) \leq 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta}(-1, \vartheta) = 0$$

e quindi

$$mgR(-\sin \vartheta + 4) \leq 0 \quad mgR(-2 \sin \vartheta + \cos \vartheta + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta) = 0.$$

La prima condizione non può mai essere soddisfatta con $\vartheta \in \mathbb{R}$, per cui questo tratto di frontiera non accoglie alcuna configurazione di equilibrio.

(ii) *Configurazioni* $(s, \vartheta) = (1, \vartheta)$

Nella fattispecie la condizione di equilibrio prescritta dal teorema dei lavori virtuali è

$$\frac{\partial U}{\partial s}(1, \vartheta) \delta s + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}(1, \vartheta) \delta \vartheta \leq 0 \quad \forall \delta s \leq 0, \forall \delta \vartheta \in \mathbb{R}$$

e si riduce a

$$\frac{\partial U}{\partial s}(1, \vartheta) \geq 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta}(1, \vartheta) = 0$$

ovvero a

$$mgR(-\sin \vartheta - 4) \geq 0 \quad mgR(-2 \sin \vartheta - \cos \vartheta + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta) = 0.$$

Anche in questo caso la prima delle condizioni di equilibrio non è mai soddisfatta. Pertanto, neppure lungo questo tratto di frontiera sono presenti configurazioni di equilibrio.

(b) Stabilità degli equilibri ordinari

Le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari di questo sistema scleronomo posizionale conservativo si possono analizzare con i teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. Per far questo è necessario determinare le derivate parziali seconde del potenziale:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}(s, \vartheta) = -4mgR \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial s}(s, \vartheta) = -mgR \cos \vartheta$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \vartheta}(s, \vartheta) = -mgR \cos \vartheta \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}(s, \vartheta) = mgR(-2 \cos \vartheta + s \sin \vartheta + 2 \cos^2 \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta)$$

che definiscono la matrice hessiana di U :

$$H_U(s, \vartheta) = mgR \begin{pmatrix} -4 & -\cos \vartheta \\ -\cos \vartheta & -2 \cos \vartheta + s \sin \vartheta + 2 \cos^2 \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

Configurazione $(s, \vartheta) = (0, 0)$

In questa configurazione la matrice hessiana del potenziale assume la forma

$$H_U(0, 0) = mgR \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed è indefinita per via del segno negativo del suo determinante:

$$\det H_U(0, 0) = -(mgR)^2.$$

L'equilibrio è dunque instabile per l'inversione parziale del teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(s, \vartheta) = (0, \pi)$

La matrice hessiana del potenziale è in questo caso

$$H_U(0, \pi) = mgR \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ma risulta ancora indefinita a causa del determinante negativo

$$\det H_U(0, \pi) = -17(mgR)^2$$

ed assicura l'instabilità dell'equilibrio in virtù del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(s, \vartheta) = \left(-\sqrt{17}/36, \arccos(8/9)\right)$

Nella fattispecie la matrice hessiana del potenziale diventa:

$$H_U\left(-\frac{\sqrt{17}}{36}, \arccos\left(\frac{8}{9}\right)\right) = mgR \begin{pmatrix} -4 & -8/9 \\ -8/9 & -217/324 \end{pmatrix}$$

ed è definita negativa in forza del teorema di Sylvester:

$$-4 < 0 \quad \det \begin{pmatrix} -4 & -8/9 \\ -8/9 & -217/324 \end{pmatrix} = \frac{17}{9} > 0$$

ovvero per via dei segni di determinante e traccia:

$$\det H_U\left(-\frac{\sqrt{17}}{36}, \arccos\left(\frac{8}{9}\right)\right) = \frac{17}{9}(mgR)^2 > 0$$

$$\text{tr} H_U\left(-\frac{\sqrt{17}}{36}, \arccos\left(\frac{8}{9}\right)\right) = -\frac{1513}{324}mgR < 0.$$

La configurazione di equilibrio costituisce perciò un massimo relativo proprio del potenziale e deve reputarsi stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(s, \vartheta) = \left(\sqrt{17}/36, -\arccos(8/9)\right)$

La matrice hessiana del potenziale coincide con quella calcolata nella configurazione precedente

$$H_U\left(\frac{\sqrt{17}}{36}, -\arccos\left(\frac{8}{9}\right)\right) = mgR \begin{pmatrix} -4 & -8/9 \\ -8/9 & -217/324 \end{pmatrix}$$

e conduce alle stesse conclusioni circa la stabilità dell'equilibrio. Da notare che il risultato era atteso, in quanto le due configurazioni $(s, \vartheta) = \left(-\sqrt{17}/36, \arccos(8/9)\right)$ e $(s, \vartheta) = \left(\sqrt{17}/36, -\arccos(8/9)\right)$ sono simmetriche rispetto all'origine $(s, \vartheta) = (0, 0)$, mentre il potenziale si presenta come una funzione pari:

$$U(-s, -\vartheta) = U(s, \vartheta) \quad \forall (s, \vartheta) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}.$$

(c) Energia cinetica

L'energia cinetica del sistema è la somma dei contributi relativi alla guida circolare γ e al punto materiale P .

Energia cinetica della guida circolare

La guida γ ruota con velocità angolare $\dot{\vartheta} \hat{e}_3$ attorno all'asse fisso Oz ed il suo momento d'inerzia rispetto allo stesso asse è calcolabile direttamente mediante il teorema di Huygens-Steiner:

$$I_{Oz}^\gamma = I_{Cz}^\gamma + m|C - O|^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$$

L'energia cinetica vale così:

$$T_\gamma = \frac{1}{2}I_{Oz}^\gamma |\dot{\vartheta} \hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2} 2mR^2 \dot{\vartheta}^2 = mR^2 \dot{\vartheta}^2.$$

Energia cinetica del punto P

La velocità istantanea del punto P si ricava derivando rispetto al tempo il vettore posizione (0.2), in cui s e ϑ sono riguardate come funzioni regolari di t :

$$\dot{P} = R(\dot{s} \cos \vartheta - s \sin \vartheta \dot{\vartheta} + \cos \vartheta \dot{\vartheta}) \hat{e}_1 + R(\dot{s} \sin \vartheta + s \cos \vartheta \dot{\vartheta} + \sin \vartheta \dot{\vartheta}) \hat{e}_2. \quad (0.4)$$

Il modulo quadrato della velocità è quindi

$$\begin{aligned} \dot{P}^2 &= R^2(\dot{s} \cos \vartheta - s \sin \vartheta \dot{\vartheta} + \cos \vartheta \dot{\vartheta})^2 + R^2(\dot{s} \sin \vartheta + s \cos \vartheta \dot{\vartheta} + \sin \vartheta \dot{\vartheta})^2 = \\ &= R^2(\dot{s}^2 \cos^2 \vartheta + s^2 \sin^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 + \cos^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 - 2s \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{s} \dot{\vartheta} + 2\cos^2 \vartheta \dot{s} \dot{\vartheta} - 2s \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2 \\ &\quad + \dot{s}^2 \sin^2 \vartheta + s^2 \cos^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 + 2s \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{s} \dot{\vartheta} + 2\sin^2 \vartheta \dot{s} \dot{\vartheta} + 2s \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2) \\ &= R^2(\dot{s}^2 + s^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{s} \dot{\vartheta}) \end{aligned}$$

per cui l'energia cinetica del punto materiale si riduce a

$$T_P = \frac{m}{2} \dot{P}^2 = \frac{mR^2}{2} (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{s} \dot{\vartheta}).$$

Energia cinetica del sistema

Sommando le energie cinetiche di guida ed asta si perviene all'energia cinetica del sistema:

$$T = T_\gamma + T_P = mR^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{mR^2}{2} (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{s} \dot{\vartheta}) = \frac{mR^2}{2} (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\vartheta}^2 + 3\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{s} \dot{\vartheta}).$$

(d) Equazioni di Lagrange

Il sistema è per ipotesi olonomo, a vincoli ideali e soggetto soltanto a sollecitazioni posizionali conservative. Le equazioni pure del moto possono quindi essere espresse in forma lagrangiana

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0$$

con il potenziale cinetico $\mathcal{L} = T + U$ dato da:

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\vartheta}^2 + 3\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{s} \dot{\vartheta}) + mgR(2 \cos \vartheta - s \sin \vartheta - \cos^2 \vartheta - 2s^2).$$

Ricordando che nel calcolo dei binomi di Lagrange a primo membro le derivate parziali vanno determinate trattando le variabili $s, \vartheta, \dot{s}, \dot{\vartheta}$ come indipendenti, si hanno le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} &= mR^2(\dot{s} + \dot{\vartheta}) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) &= mR^2(\ddot{s} + \ddot{\vartheta}) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= mR^2 s \dot{\vartheta}^2 + mgR(-\sin \vartheta - 4s) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} &= mR^2(s^2 \dot{\vartheta} + 3\dot{\vartheta} + \dot{s}) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) &= mR^2(s^2 \ddot{\vartheta} + 2s\dot{s}\dot{\vartheta} + 3\ddot{\vartheta} + \ddot{s}) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} &= mgR(-2 \sin \vartheta - s \cos \vartheta + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta). \end{aligned}$$

Ne seguono le equazioni pure del moto:

$$\begin{cases} mR^2(\ddot{s} + \ddot{\vartheta}) - mR^2s\dot{\vartheta}^2 + mgR(\sin \vartheta + 4s) = 0 \\ mR^2(s^2\ddot{\vartheta} + 2s\dot{s}\dot{\vartheta} + 3\ddot{\vartheta} + \ddot{s}) - mgR(-2\sin \vartheta - s\cos \vartheta + 2\cos \vartheta \sin \vartheta) = 0. \end{cases}$$

(e) Quantità di moto e momento angolare in O

L'impulso e il momento angolare in O del sistema vengono calcolati per mezzo della proprietà additiva di queste grandezze, che sono definite come somma dei contributi della guida circolare e del punto materiale P .

Quantità di moto

La quantità di moto della guida circolare γ si ottiene moltiplicandone la massa m per la velocità istantanea del baricentro C :

$$\vec{Q}^\gamma = m\dot{C} = mR(\cos \vartheta \hat{e}_1 + \sin \vartheta \hat{e}_2)\dot{\vartheta}$$

Per quanto riguarda il punto P , basta moltiplicare per la massa m ambo i membri della (0.4):

$$\vec{Q}^P = m\dot{P} = mR(\dot{s}\cos \vartheta - s\sin \vartheta \dot{\vartheta} + \cos \vartheta \dot{\vartheta})\hat{e}_1 + mR(\dot{s}\sin \vartheta + s\cos \vartheta \dot{\vartheta} + \sin \vartheta \dot{\vartheta})\hat{e}_2.$$

La somma dei due termini parziali conduce al risultato richiesto:

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \vec{Q}^\gamma + \vec{Q}^P = mR(\cos \vartheta \hat{e}_1 + \sin \vartheta \hat{e}_2)\dot{\vartheta} + \\ &\quad + mR(\dot{s}\cos \vartheta - s\sin \vartheta \dot{\vartheta} + \cos \vartheta \dot{\vartheta})\hat{e}_1 + mR(\dot{s}\sin \vartheta + s\cos \vartheta \dot{\vartheta} + \sin \vartheta \dot{\vartheta})\hat{e}_2. \end{aligned}$$

Momento angolare nel polo O

Il momento angolare in O della guida circolare si ricava immediatamente, osservando che la guida ruota con velocità angolare $\dot{\vartheta}\hat{e}_3$ attorno all'asse fisso Oz , che detto asse fisso è principale d'inerzia in O per la guida e che il momento d'inerzia rispetto allo stesso asse è I_{Oz}^γ :

$$\vec{K}_O^\gamma = L_O^\gamma(\dot{\vartheta}\hat{e}_3) = I_{Oz}^\gamma\dot{\vartheta}\hat{e}_3 = 2mR^2\dot{\vartheta}\hat{e}_3,$$

espressione nella quale si è indicato con L_O^γ l'operatore d'inerzia in O di γ . Per il punto P la definizione del momento angolare in O porge l'espressione:

$$\begin{aligned} \vec{K}_O^P &= (P - O) \wedge m\dot{P} = [R(s\cos \vartheta + \sin \vartheta)\hat{e}_1 + R(s\sin \vartheta - \cos \vartheta)\hat{e}_2] \wedge \\ &\quad \wedge m[R(\dot{s}\cos \vartheta - s\sin \vartheta \dot{\vartheta} + \cos \vartheta \dot{\vartheta})\hat{e}_1 + R(\dot{s}\sin \vartheta + s\cos \vartheta \dot{\vartheta} + \sin \vartheta \dot{\vartheta})\hat{e}_2] = \\ &= mR^2[(s\cos \vartheta + \sin \vartheta)(\dot{s}\sin \vartheta + s\cos \vartheta \dot{\vartheta} + \sin \vartheta \dot{\vartheta}) - \\ &\quad - (s\sin \vartheta - \cos \vartheta)(\dot{s}\cos \vartheta - s\sin \vartheta \dot{\vartheta} + \cos \vartheta \dot{\vartheta})]\hat{e}_3 = \\ &= mR^2(s^2\dot{\vartheta} + \dot{s} + \dot{\vartheta})\hat{e}_3. \end{aligned}$$

Sommando i momenti angolari di guida e punto materiale si perviene al momento angolare in O dell'intero sistema:

$$\vec{K}_O = \vec{K}_O^\gamma + \vec{K}_O^P = 2mR^2\dot{\vartheta}\hat{e}_3 + mR^2(s^2\dot{\vartheta} + \dot{s} + \dot{\vartheta})\hat{e}_3 = mR^2(s^2\dot{\vartheta} + \dot{s} + 3\dot{\vartheta})\hat{e}_3.$$