

□ **Esercizio 1-A**

Un punto materiale  $P$  di massa unitaria è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse  $Ox$  di una terna inerziale. Una molla di costante elastica  $k = 4$  congiunge l'origine  $O$  con il punto  $P$ , che è inoltre soggetto ad una forza di resistenza viscosa con costante di frizione  $\beta$ . Determinare:

- (a) l'equazione del moto del sistema e la condizione su  $\beta$  affinché i moti siano oscillatori smorzati;
- (b) la soluzione generale dell'equazione del moto per  $\beta = 3$ .

**Soluzione**

(a) **Equazione del moto e condizione dei moti oscillatori**

Le forze elastica e di resistenza viscosa sono espresse da

$$F_{\text{el}} = -4x \quad F_{\text{viscosa}} = -\beta\dot{x}$$

per cui il secondo principio della dinamica porge l'equazione del moto

$$\ddot{x} = -4x - \beta\dot{x}$$

che è ovviamente identificabile con quella di un oscillatore armonico smorzato unidimensionale. Si tratta di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + 4x = 0$$

le cui soluzioni hanno carattere oscillatorio smorzato se e soltanto se risulta negativo il discriminante dell'equazione caratteristica associata, ossia

$$\beta^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = \beta^2 - 16 < 0$$

e dunque per tutti e soli i  $\beta$  della forma

$$0 < \beta < 4.$$

(b) **Soluzione per  $\beta = 3$**

Nel caso si abbia  $\beta = 3$  l'equazione differenziale del moto diventa

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 0$$

e ad essa si associa l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$$

le cui soluzioni risultano

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{2}.$$

La soluzione generale dell'equazione vale pertanto

$$x(t) = e^{-\frac{3}{2}t} \left[ c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \right] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

per una scelta arbitraria delle costanti  $c_1$  e  $c_2$  — che sono univocamente specificate dalla condizioni iniziali  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$ . Si ricorda che una forma equivalente della soluzione generale è data da

$$x(t) = Ae^{-\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t + \varphi\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con l'ampiezza  $A \geq 0$  e la fase  $\varphi$  costanti arbitrarie fissate dalle condizioni iniziali.

### □ Esercizio 2-A

Si ricavi l'equazione dell'asse centrale del sistema composto dai vettori  $\bar{v}_1 = 2\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - \hat{e}_3$ , applicato nel punto  $P_1(0, -1, 1)$ , e  $\bar{v}_2 = -\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + \hat{e}_3$ , applicato nel punto  $P_2(-2, 1, 0)$ .

### Soluzione

Il sistema si compone dei due vettori applicati:

$$\bar{v}_1 = 2\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - \hat{e}_3 \text{ applicato in } P_1(0, -1, 1) \text{ e}$$

$$\bar{v}_2 = -\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + \hat{e}_3 \text{ applicato in } P_2(-2, 1, 0).$$

Il risultante del sistema è diverso da zero

$$\bar{R} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \hat{e}_1 + 2\hat{e}_2$$

in modo che è univocamente definito l'asse centrale del sistema, i cui punti  $A$  possono determinarsi per mezzo della relazione

$$A - O = \frac{\bar{R} \wedge \bar{M}_O}{|\bar{R}|^2} + \alpha \bar{R} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

nella quale il polo  $O$  può essere scelto a piacere. Convieni, in particolare, identificare il polo con il punto  $P_1$  in modo da semplificare l'espressione. Il momento risultante in  $P_1$  si riduce infatti al solo contributo del secondo vettore applicato

$$\begin{aligned} \bar{M}_{P_1} &= (P_1 - P_1) \wedge \bar{v}_1 + (P_2 - P_1) \wedge \bar{v}_2 = (-2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - \hat{e}_3) \wedge (-\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + \hat{e}_3) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 4\hat{e}_3. \end{aligned}$$

L'equazione dell'asse centrale diventa perciò

$$\begin{aligned} A - P_1 &= \frac{\overline{R} \wedge \overline{M}_{P_1}}{|\overline{R}|^2} + \alpha \overline{R} = \frac{1}{1+4} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} + \alpha(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) = \\ &= \frac{1}{5}(-8\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2 - 7\hat{e}_3) + \alpha(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) = \left(\alpha - \frac{8}{5}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{4}{5} + 2\alpha\right)\hat{e}_2 - \frac{7}{5}\hat{e}_3 \end{aligned}$$

e sostituendo il vettore  $P_1 - O$  porge infine la parametrizzazione richiesta

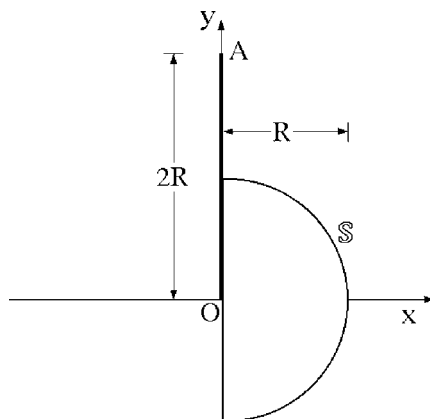
$$\begin{aligned} A - O &= P_1 - O + A - P_1 = -\hat{e}_2 + \hat{e}_3 + \left(\alpha - \frac{8}{5}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{4}{5} + 2\alpha\right)\hat{e}_2 - \frac{7}{5}\hat{e}_3 = \\ &= \left(-\frac{8}{5} + \alpha\right)\hat{e}_1 + \left(-\frac{1}{5} + 2\alpha\right)\hat{e}_2 - \frac{2}{5}\hat{e}_3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esplicitando le componenti, l'equazione parametrica dell'asse centrale può scriversi altresì

$$\begin{cases} x = -\frac{8}{5} + \alpha \\ y = -\frac{1}{5} + 2\alpha \\ z = -\frac{2}{5} \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

### □ Esercizio 3-A

Si consideri il sistema illustrato in figura,



composto da un semidisco circolare  $\mathbb{S}$  di centro  $O$  e raggio  $R$ , e da un'asta rettilinea  $OA$ , di lunghezza  $2R$ . La densità lineare dell'asta si scrive

$$\lambda(y) = \frac{\mu}{R^2}y \quad \forall y \in [0, 2R],$$

mentre quella del semidisco in un suo punto arbitrario  $P$  vale

$$\sigma(P) = \frac{\mu}{\pi R^3} |P - O| \quad \forall P \in \mathbb{S},$$

dove la costante  $\mu > 0$  ha le dimensioni di una massa. Determinare:

- (a) la massa del sistema;
- (b) la posizione del baricentro del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$ .

### Soluzione

#### (a) Massa del sistema

La massa dell'asta  $OA$  si ricava integrandone la densità lungo il segmento  $OA$  e vale perciò

$$m_{OA} = \int_0^{2R} \frac{\mu}{R^2} y dy = \frac{\mu}{R^2} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{2R} = \frac{\mu}{R^2} 2R^2 = 2\mu.$$

La massa del semidisco viene determinata in modo analogo, integrando la densità areale  $\sigma$  sulla regione del piano  $Oxy$  parametrizzata da

$$(x, y) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi), \quad (\rho, \phi) \in [0, R] \times [-\pi/2, \pi/2]$$

nelle coordinate polari usuali  $(\rho, \phi)$ . Si ha pertanto, ricordando che il determinante jacobiano del sistema di coordinate polari piane vale  $\rho$ , e che per definizione  $|P - O| = \rho$ ,

$$m_{\mathbb{S}} = \int_0^R d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \rho \frac{\mu}{\pi R^3} \rho = \frac{\mu}{\pi R^3} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi = \frac{\mu}{\pi R^3} \frac{R^3}{3} \pi = \frac{\mu}{3}.$$

Non rimane che sommare i risultati ottenuti per determinare la massa totale del sistema

$$m = m_{OA} + m_{\mathbb{S}} = 2\mu + \frac{\mu}{3} = \frac{7}{3}\mu.$$

#### (b) Baricentro del sistema

Trattandosi di sistema composto da una curva e da una superficie materiale, si rende necessario calcolare preventivamente i baricentri dell'asta  $OA$  e del semidisco  $\mathbb{S}$  per poi applicare il teorema distributivo al sistema così decomposto. Il baricentro dell'asta deve ricercarsi nella forma

$$G_{OA} - O = y_{OA} \hat{e}_2$$

ascissa e quota del baricentro risultando nulle per l'evidente simmetria. L'ordinata si determina facendo uso della definizione

$$y_{OA} = \frac{1}{m_{OA}} \int_{OA} \lambda y ds = \frac{1}{2\mu} \int_0^{2R} \frac{\mu}{R^2} y y dy = \frac{1}{2R^2} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{2R} = \frac{4}{3}R$$

sicch  risulta

$$G_{OA} - O = \frac{4}{3}R \hat{e}_2 .$$

Quanto al semidisco, la posizione del baricentro pu  senz'altro esprimersi come

$$G_S - O = x_S \hat{e}_1$$

perch   $Ox$    asse di simmetria —  $y_S = 0$  — e  $Oxy$  costituisce un piano di simmetria della figura —  $z_S = 0$ . Si ha perci 

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{m_S} \int_S x \sigma dA = \frac{3}{\mu} \int_0^R d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \rho \cos \phi \frac{\mu}{\pi R^3} \rho = \\ &= \frac{3}{\mu} \frac{\mu}{\pi R^3} \int_0^R \rho^3 d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{3}{\pi R^3} \frac{R^4}{4} 2 = \frac{3}{2\pi} R \end{aligned}$$

per cui

$$G_S - O = \frac{3}{2\pi} R \hat{e}_1 .$$

Il baricentro del sistema viene infine calcolato con la legge distributiva, che porge

$$G - O = \frac{m_{OA}(G_{OA} - O) + m_S(G_S - O)}{m} = \frac{2\mu \frac{4}{3} R \hat{e}_2 + \frac{\mu}{3} \frac{3}{2\pi} R \hat{e}_1}{\frac{7}{3}\mu} = \frac{3}{14\pi} R \hat{e}_1 + \frac{8}{7} R \hat{e}_2 .$$

#### □ Esercizio 4-A

Un punto materiale pesante di massa  $m = 1$    vincolato a scorrere senza attrito lungo la curva di equazione  $y = x^2 - 2x$ ,  $z = 0$ , rispetto ad una terna inerziale  $Oxyz$  di asse verticale  $Oy$ , orientato verso l'alto.

- (a) Scrivere le equazioni del moto del sistema.
- (b) Determinare le posizioni di equilibrio del sistema.

#### Soluzione

##### (a) Equazioni del moto

La parametrizzazione della curva vincolare   data dall'applicazione

$$P(x) - O = x \hat{e}_1 + (x^2 - 2x) \hat{e}_2 , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

e la sua derivata prima risulta sempre diversa da zero — curva regolare —

$$P'(x) = \hat{e}_1 + 2(x - 1) \hat{e}_2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} ,$$

definendo perciò un vettore tangente alla curva nella posizione  $P(x)$ . La velocità istantanea del punto materiale vincolato alla curva si scrive peraltro

$$\dot{P} = [\hat{e}_1 + 2(x-1)\hat{e}_2] \dot{x}$$

e l'accelerazione istantanea viene calcolata derivando una seconda volta rispetto al tempo

$$\ddot{P} = [\hat{e}_1 + 2(x-1)\hat{e}_2] \ddot{x} + 2\dot{x}^2 \hat{e}_2.$$

L'equazione pura del moto lungo la curva liscia si ottiene proiettando lungo la direzione tangente alla curva nella posizione considerata il postulato delle reazioni vincolari

$$m\ddot{P} = -mg\hat{e}_2 + \bar{\Phi}$$

che fornisce così

$$\ddot{P} \cdot P'(x) = -g\hat{e}_2 \cdot P'(x)$$

ossia

$$\{[\hat{e}_1 + 2(x-1)\hat{e}_2] \ddot{x} + 2\dot{x}^2 \hat{e}_2\} \cdot [\hat{e}_1 + 2(x-1)\hat{e}_2] = -g\hat{e}_2 \cdot [\hat{e}_1 + 2(x-1)\hat{e}_2]$$

e quindi

$$[1 + 4(x-1)^2] \ddot{x} + 4(x-1)\dot{x}^2 = -2g(x-1)$$

che è l'equazione del moto cercata.

### (b) **Equilibri**

Le posizioni di equilibrio del sistema corrispondono alle soluzioni statiche delle equazioni del moto

$$x(t) = x_0, \quad \text{costante}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e sono pertanto individuate dalla condizione

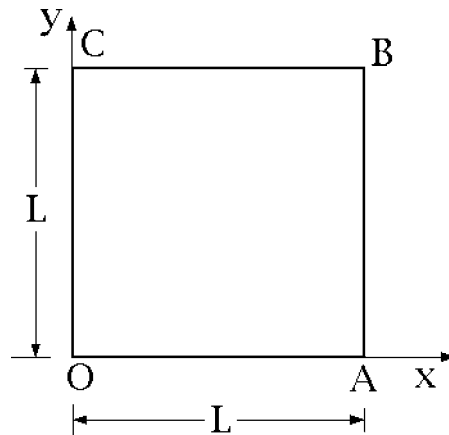
$$0 = -2g(x_0 - 1)$$

ovvero da  $x = x_0 = 1$ . La sola posizione di equilibrio del sistema è dunque data da

$$P(1) - O = \hat{e}_1 - \hat{e}_2.$$

□ **Esercizio 5-A**

Nella terna di riferimento  $Oxyz$  si considera una lamina quadrata  $OABC$ , di lato  $L$ , collocata nel piano coordinato  $Oxy$ , come illustrato in figura.



La densità superficiale della lamina in un suo generico punto  $P(x, y)$  è data dall'espressione

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{L^4}xy \quad \forall (x, y) \in OABC,$$

dove  $\mu > 0$  ha le dimensioni di una massa. Determinare:

- la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$ ;
- il momento d'inerzia rispetto alla retta che passa per l'origine e per il punto  $D(5, 3, 4)$ ;
- una terna principale d'inerzia in  $O$  del sistema.

**Soluzione**

(a) **Matrice d'inerzia relativa a  $Oxyz$**

La densità areale di massa della lamina quadrata si scrive più esplicitamente come

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{L^4}xy \quad \forall (x, y) \in [0, L]^2.$$

Poiché la figura — piana — giace interamente nel piano coordinato  $Oxy$  della terna cartesiana ortogonale  $Oxyz$ , la matrice d'inerzia rispetto a tale terna deve presentarsi nella forma generale

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix}$$

dove i soli elementi incogniti sono i momenti d'inerzia  $L_{xx}$ ,  $L_{yy}$  ed il prodotto d'inerzia  $L_{xy}$ , che vengono calcolati direttamente facendo uso della definizione. Per il momento d'inerzia rispetto all'asse coordinato  $Ox$  si ha

$$L_{xx} = \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{\mu}{L^4}xy y^2 = \frac{\mu}{L^4} \int_0^L x dx \int_0^L y^3 dy = \frac{\mu}{L^4} \frac{L^2}{2} \frac{L^4}{4} = \frac{1}{8}\mu L^2$$

mentre per il momento d'inerzia relativo all'altro asse  $Oy$  vale

$$L_{yy} = \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{\mu}{L^4} xy x^2 = \frac{\mu}{L^4} \int_0^L x^3 dx \int_0^L y dy = \frac{\mu}{L^4} \frac{L^4}{4} \frac{L^2}{2} = \frac{1}{8} \mu L^2.$$

Un calcolo analogo consente di valutare il prodotto d'inerzia residuo

$$L_{xy} = - \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{\mu}{L^4} xy xy = - \frac{\mu}{L^4} \int_0^L x^2 dx \int_0^L y^2 dy = - \frac{\mu}{L^4} \frac{L^3}{3} \frac{L^3}{3} = - \frac{1}{9} \mu L^2$$

per cui la matrice d'inerzia del sistema si riduce a

$$[L_O] = \mu L^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

**(b) Momento d'inerzia rispetto ad  $OD$**

La retta passante per l'origine e per il punto  $D(5, 3, 4)$  è individuata dal versore

$$\hat{n} = \frac{D - O}{|D - O|} = \frac{5 \hat{e}_1 + 3 \hat{e}_2 + 4 \hat{e}_3}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{5 \hat{e}_1 + 3 \hat{e}_2 + 4 \hat{e}_3}{5\sqrt{2}}.$$

Il momento d'inerzia relativo all'asse  $OD$  può così essere calcolato mediante la formula generale  $I_{O\hat{n}} = \hat{n} \cdot L_O(\hat{n})$ , ossia

$$\begin{aligned} I_{OD} &= (n_x \ n_y \ n_z)[L_O] \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \frac{1}{50} (5 \ 3 \ 4) \mu L^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{50} \mu L^2 (5 \ 3 \ 4) \begin{pmatrix} \frac{5}{8} - \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{9} + \frac{3}{8} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \mu L^2 \left( \frac{25}{8} - \frac{5}{3} - \frac{5}{3} + \frac{9}{8} + 4 \right) = \frac{59}{600} \mu L^2. \end{aligned}$$

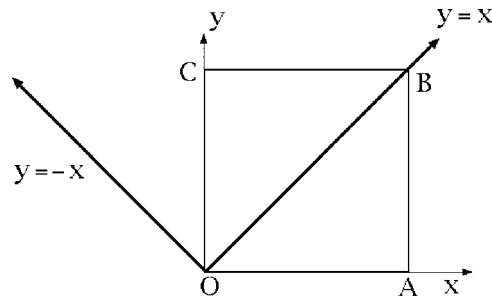
**(c) Terna principale d'inerzia in  $O$**

A causa dell'ovvia relazione

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{L^4} xy = \frac{\mu}{L^4} yx = \sigma(y, x) \quad \forall (x, y) \in [0, L]^2,$$

la retta bisettrice  $y = x$ ,  $z = 0$  è un evidente asse di simmetria della figura e ne costituisce pertanto un asse principale d'inerzia in  $O$ . Altro asse principale d'inerzia in  $O$  è l'asse coordinato  $Oz$ , dal momento che  $Oxy$  rappresenta un ovvio piano di simmetria. Non

rimane che considerare la retta  $y = -x, z = 0$ , ortogonale alle precedenti, per completare la terna principale d'inerzia in  $O$ .



□ **Esercizio 1-B**

Un punto materiale  $A$  di massa  $m = 2$  è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse  $Oy$  di un riferimento inerziale. Una molla di costante elastica  $k = 2$  congiunge l'origine  $O$  con il punto  $A$ , che è inoltre soggetto ad una forza di resistenza viscosa con costante di frizione  $\beta$ . Determinare:

- (a) l'equazione del moto del sistema e la condizione su  $\beta$  affinché i moti siano oscillatori smorzati;
- (b) la soluzione generale dell'equazione del moto per  $\beta = 3$ .

**Soluzione**

(a) **Equazione del moto e condizione dei moti oscillatori**

Le forze elastica e viscosa si esprimono rispettivamente come

$$F_{el} = -2y \quad F_{viscosa} = -\beta\dot{y}$$

per cui il secondo principio della dinamica porge l'equazione del moto

$$2\ddot{y} + \beta\dot{y} + 2y = 0$$

che è lineare, omogenea e a coefficienti costanti. Le relative soluzioni hanno carattere oscillatorio smorzato se e soltanto se il discriminante dell'equazione caratteristica risulta di segno negativo

$$\beta^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = \beta^2 - 16 < 0$$

ossia per tutti e soltanto i  $\beta$  che soddisfano la condizione

$$0 < \beta < 4.$$

(b) **Soluzione generale per  $\beta = 3$**

Per  $\beta = 3$  l'equazione del moto si riduce a

$$2\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$$

e l'equazione caratteristica corrispondente assume la forma

$$2\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

con soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{4}.$$

Da queste si deduce la soluzione generale dell'equazione del moto

$$y(t) = e^{-\frac{3}{4}t} \left[ c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) \right] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

nella quale compaiono le costanti reali arbitrarie  $c_1$  e  $c_2$ .

### □ Esercizio 2-B

Determinare l'equazione dell'asse centrale del sistema composto dai vettori  $\bar{w}_1 = -\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - \hat{e}_3$ , applicato nel punto  $P_1(1, 0, -1)$ , e  $\bar{w}_2 = \hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\hat{e}_3$ , applicato nel punto  $P_2(0, -2, 1)$ .

### Soluzione

Il sistema è costituito dai due vettori applicati

$$\bar{w}_1 = -\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - \hat{e}_3 \text{ con punto di applicazione in } P_1(1, 0, -1) \text{ e}$$

$$\bar{w}_2 = \hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\hat{e}_3 \text{ applicato in } P_2(0, -2, 1).$$

Per il risultante il calcolo è immediato

$$\bar{R} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 = \hat{e}_1 + 2\hat{e}_3$$

mentre conviene determinare il momento risultante rispetto al polo  $P_1$ , in modo da ridurre l'espressione al contributo del solo vettore applicato  $(P_2, \bar{w}_2)$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{P_1} &= (P_1 - P_1) \wedge \bar{w}_1 + (P_2 - P_1) \wedge \bar{w}_2 = (-\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3) \wedge (\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\hat{e}_3) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4\hat{e}_1 + 5\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3. \end{aligned}$$

Vale inoltre

$$\bar{R} \wedge \bar{M}_{P_1} = (\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3) \wedge (-4\hat{e}_1 + 5\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -7\hat{e}_1 - 8\hat{e}_2 + 4\hat{e}_3.$$

I punti  $A$  dell'asse centrale sono pertanto individuati, tutti e soltanto, dall'espressione vettoriale

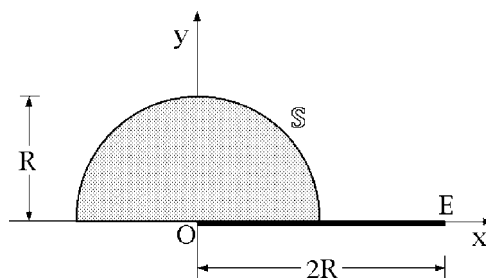
$$\begin{aligned} A - O &= P_1 - O + \frac{\overline{R} \wedge \overline{M}_{P_1}}{|\overline{R}|^2} + \alpha \overline{R} = \hat{e}_1 - \hat{e}_3 + \frac{-7\hat{e}_1 - 8\hat{e}_2 + 4\hat{e}_3}{5} + \alpha(\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3) = \\ &= -\frac{2}{5}\hat{e}_1 + \left(\alpha - \frac{8}{5}\right)\hat{e}_2 + \left(-\frac{1}{5} + 2\alpha\right)\hat{e}_3. \end{aligned}$$

L'equazione dell'asse centrale si scrive perciò nella forma parametrica

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = -\frac{8}{5} + \alpha \\ z = -\frac{1}{5} + 2\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

### □ Esercizio 3-B

Si consideri il sistema illustrato in figura,



composto da un semidisco circolare  $\mathbb{S}$  di centro  $O$  e raggio  $R$ , e da un'asta rettilinea  $OE$ , di lunghezza  $2R$ . La densità lineare dell'asta si scrive

$$\lambda(x) = \frac{\mu}{R^2}x \quad \forall x \in [0, 2R],$$

mentre quella del semidisco in un suo punto arbitrario  $P$  vale

$$\sigma(P) = \frac{\mu}{\pi R^3}|P - O| \quad \forall P \in \mathbb{S},$$

dove la costante  $\mu > 0$  ha le dimensioni di una massa. Determinare:

- la massa del sistema;
- la posizione del baricentro del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$ .

## Soluzione

### (a) Massa del sistema

La massa dell'asta  $OE$  si calcola integrando sullo stesso segmento la densità lineare  $\lambda$

$$m_{OE} = \int_0^{2R} \frac{\mu}{R^2} x dx = \frac{\mu}{R^2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{2R} = 2\mu$$

mentre quella del semidisco conviene determinarla in coordinate polari

$$x = \rho \cos \phi \quad y = \rho \sin \phi \quad , \quad (\rho, \phi) \in [0, R] \times [0, \pi]$$

e vale dunque

$$m_{\mathbb{S}} = \int_0^R d\rho \int_0^\pi d\phi \rho \frac{\mu}{\pi R^3} = \frac{\mu}{\pi R^3} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi d\phi = \frac{\mu}{\pi R^3} \frac{R^3}{3} \pi = \frac{\mu}{3}.$$

La massa del sistema è la somma delle masse di asta e semidisco

$$m = m_{OE} + m_{\mathbb{S}} = 2\mu + \frac{\mu}{3} = \frac{7}{3}\mu.$$

### (b) Baricentro del sistema

Per simmetria, il baricentro dell'asta  $OE$  deve collocarsi lungo l'asse  $Ox$ . La sola coordinata interessante è quindi l'ascissa, che si calcola da definizione

$$x_{OE} = \frac{1}{m_{OE}} \int_0^{2R} x \frac{\mu}{R^2} x dx = \frac{1}{2\mu} \frac{\mu}{R^2} \int_0^{2R} x^2 dx = \frac{1}{2R^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{2R} = \frac{4}{3}R$$

per cui il baricentro è individuato dal vettore posizione

$$G_{OE} - O = \frac{4}{3}R \hat{e}_1.$$

Il semidisco  $\mathbb{S}$ , completamente ubicato nel piano coordinato  $Oxy$ , ammette  $Oy$  come evidente asse di simmetria, avendosi

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{\pi R^3} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\mu}{\pi R^3} \sqrt{(-x)^2 + y^2} = \sigma(-x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{S}$$

ed il suo baricentro  $G_{\mathbb{S}}$  deve giacere lungo lo stesso asse. L'ordinata di  $G_{\mathbb{S}}$  si ricava dalla definizione

$$\begin{aligned} y_{\mathbb{S}} &= \frac{1}{m_{\mathbb{S}}} \int_0^R d\rho \int_0^\pi d\phi \rho \sin \phi \frac{\mu}{\pi R^3} \rho = \\ &= \frac{3}{\mu} \frac{\mu}{\pi R^3} \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{3}{\pi R^3} [-\cos \phi]_0^\pi \frac{R^4}{4} = \frac{3}{2\pi} R \end{aligned}$$

in modo che

$$G_S - O = \frac{3}{2\pi} R \hat{e}_2.$$

Per calcolare il baricentro  $G$  dell'intero sistema non rimane che applicare il teorema distributivo e scrivere

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_{OE}(G_{OE} - O) + m_S(G_S - O)}{m_{OE} + m_S} = \\ &= \frac{3}{7\mu} \left( 2\mu \frac{4}{3} R \hat{e}_1 + \frac{\mu}{3} \frac{3}{2\pi} R \hat{e}_2 \right) = \frac{8}{7} R \hat{e}_1 + \frac{3}{14\pi} R \hat{e}_2. \end{aligned}$$

#### □ Esercizio 4-B

Un punto materiale pesante di massa unitaria è vincolato a scorrere senza attrito lungo la curva di equazione  $y = -x^2 + 4x$ ,  $z = 0$ , rispetto ad una terna inerziale  $Oxyz$  di asse verticale  $Oy$ , orientato verso l'alto.

- (a) Scrivere le equazioni del moto del sistema.
- (b) Determinare le posizioni di equilibrio del sistema.

#### Soluzione

La parametrizzazione della curva vincolare si scrive usando l'ascissa  $x$  come parametro

$$P(x) - O = x \hat{e}_1 + (-x^2 + 4x) \hat{e}_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ed è chiaramente una parametrizzazione  $C^\infty$  regolare

$$P'(x) = \hat{e}_1 + (-2x + 4) \hat{e}_2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

#### (a) Equazioni del moto

La velocità istantanea di un generico moto regolare compatibile con il vincolo,  $P(t) - O = P[x(t)]$ , si scrive

$$\dot{P}(t) = [\hat{e}_1 + (4 - 2x) \hat{e}_2] \dot{x}$$

e l'accelerazione viene determinata con una successiva derivazione in  $t$

$$\ddot{P}(t) = [\hat{e}_1 + (4 - 2x) \hat{e}_2] \ddot{x} - 2\dot{x}^2 \hat{e}_2.$$

L'equazione pura del moto viene ricavata proiettando l'equazione tratta dal postulato delle reazioni vincolari lungo la direzione tangente alla curva, individuata dal vettore  $P'(x)$ ,

$$m\ddot{P} \cdot P'(x) = -mg \hat{e}_2 \cdot P'(x)$$

e ricordando che il punto materiale ha massa unitaria si riduce a

$$[1 + (4 - 2x)^2] \ddot{x} - 2\dot{x}^2(4 - 2x) = -g(4 - 2x).$$

(b) **Equilibri**

Le configurazioni di equilibrio si hanno in corrispondenza delle soluzioni statiche  $x(t) = x_0$ , costante, delle equazioni pure del moto. Sono perciò individuate dall'equazione algebrica

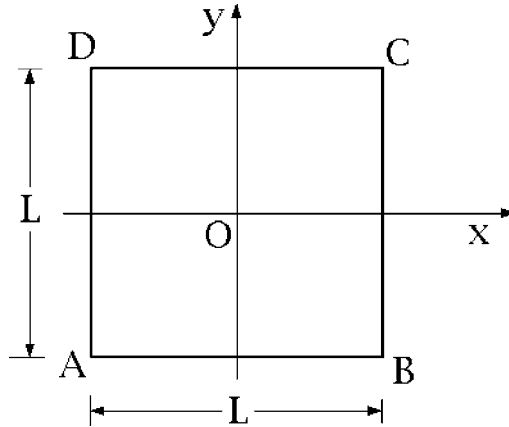
$$-g(4 - 2x_0) = 0$$

la cui unica soluzione è  $x_0 = 2$  — il solo punto in cui la tangente alla curva risulta orizzontale. L'unica configurazione di equilibrio del sistema è quindi

$$P_0 - O = 2\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2.$$

□ **Esercizio 5-B**

Si considera una lamina quadrata  $ABCD$  di centro  $O$  e lato  $L$ , con i lati rispettivamente paralleli agli assi  $Ox$  e  $Oy$  della terna  $Oxyz$  indicata in figura.



La densità superficiale della lamina in un suo generico punto  $Q(x, y)$  è data dall'espressione

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{L^6} x^2 y^2 \quad \forall (x, y) \in [-L/2, L/2]^2,$$

con  $\mu$  costante positiva. Determinare:

- (a) la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$  ;
- (b) il momento d'inerzia rispetto alla retta  $AB$ ;
- (c) una terna centrale d'inerzia del sistema.

**Soluzione**

È evidente che gli assi coordinati  $Ox$  ed  $Oy$  sono assi di simmetria della figura, in quanto

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{L^6} x^2 y^2 = \frac{\mu}{L^6} x^2 (-y)^2 = \sigma(x, -y) \quad \forall (x, y) \in [-L/2, L/2] \times [-L/2, L/2]$$

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{L^6} x^2 y^2 = \frac{\mu}{L^6} (-x)^2 y^2 = \sigma(-x, y) \quad \forall (x, y) \in [-L/2, L/2] \times [-L/2, L/2]$$

per cui risulta che l'origine  $O$  costituisce anche un centro di simmetria, identificabile con il baricentro del sistema.

(a) **Matrice d'inerzia in  $Oxyz$**

Per le predette proprietà di simmetria ci si aspetta che la matrice d'inerzia sia diagonale. In effetti, trattandosi di sistema piano completamente ubicato nel piano  $Oxy$ , la matrice d'inerzia deve assumere la forma standard

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix}$$

nella quale i momenti d'inerzia sono identici

$$L_{xx} = \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \frac{\mu}{L^6} x^2 y^2 y^2 = \frac{\mu}{L^6} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \int_{-L/2}^{L/2} y^4 dy = \frac{1}{960} \mu L^2$$

$$L_{yy} = \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \frac{\mu}{L^6} x^2 y^2 x^2 = \frac{\mu}{L^6} \int_{-L/2}^{L/2} x^4 dx \int_{-L/2}^{L/2} y^2 dy = \frac{1}{960} \mu L^2$$

mentre l'unico prodotto d'inerzia si annulla

$$L_{xy} = - \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \frac{\mu}{L^6} x^2 y^2 xy = \frac{\mu}{L^6} \int_{-L/2}^{L/2} x^3 dx \int_{-L/2}^{L/2} y^3 dy = 0$$

in modo che risulta

$$[L_O] = \mu L^2 \begin{pmatrix} 1/960 & 0 & 0 \\ 0 & 1/960 & 0 \\ 0 & 0 & 1/480 \end{pmatrix}.$$

(b) **Momento d'inerzia relativo alla retta  $AB$**

La retta  $AB$  è parallela all'asse baricentrale  $Ox$  e collocato a distanza  $L/2$  da questo. È dunque lecito applicare il teorema di Huygens-Steiner e scrivere per il momento d'inerzia relativo a  $AB$  l'espressione

$$I_{AB} = L_{xx} + m \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{960} \mu L^2 + m \frac{L^2}{4}$$

dove  $m$  indica la massa della lamina quadrata

$$m = \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \frac{\mu}{L^6} x^2 y^2 = \frac{\mu}{L^6} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \int_{-L/2}^{L/2} y^2 dy = \frac{\mu}{L^6} \frac{L^3}{12} \frac{L^3}{12} = \frac{1}{144} \mu.$$

Si conclude pertanto che

$$I_{AB} = \frac{1}{960}\mu L^2 + \frac{1}{144}\mu \frac{L^2}{4} = \frac{1}{360}\mu L^2.$$

**(c) Terna centrale d'inerzia**

Essendo  $O$  centro di simmetria e gli assi coordinati  $Ox$  e  $Oy$  assi di simmetria della figura, si conclude che la terna  $Oxyz$  è una terna centrale d'inerzia. Vale la pena di osservare, tuttavia, che causa l'indentità dei momenti d'inerzia  $L_{xx}$  ed  $L_{yy}$  tutte le rette passanti per  $O$  e collocate nel piano coordinato  $Oxy$  rappresentano altrettanti assi centrali d'inerzia del sistema; di conseguenza, qualsiasi terna ruotata attorno all'asse  $Oz$  di angolo arbitrario, rispetto a  $Oxyz$ , costituirebbe ancora una terna centrale d'inerzia del sistema.

**□ Esercizio 1-C**

Un punto materiale  $Q$  di massa  $m = 3$  è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse  $Ox$  di una terna inerziale. Una molla di costante elastica  $k = 3/4$  congiunge l'origine  $O$  con il punto  $Q$ , che è inoltre soggetto ad una forza di resistenza viscosa con costante di frizione  $\beta$ . Determinare:

- (a) l'equazione del moto del sistema e la condizione su  $\beta$  affinché i moti siano oscillatori smorzati;
- (b) la soluzione generale dell'equazione del moto per  $\beta = 2$ .

**Soluzione**

**(a) Equazione del moto e condizione dei moti oscillatori smorzati**

Poiché le forze elastica e di resistenza viscosa si esprimono per mezzo delle ovvie relazioni

$$F_{\text{el}} = -\frac{3}{4}x \quad F_{\text{viscosa}} = -\beta\dot{x},$$

il secondo principio della dinamica fornisce direttamente le equazioni del moto del punto  $Q$  nella forma

$$3\ddot{x} + \beta\dot{x} + \frac{3}{4}x = 0$$

che è immediato riconoscere come una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti. Come è ben noto, le soluzioni di questa equazione hanno natura oscillatoria smorzata se e soltanto se il discriminante della relativa equazione caratteristica

$$3\lambda^2 + \beta\lambda + \frac{3}{4} = 0$$

ha segno negativo, ossia

$$\beta^2 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} = \beta^2 - 9 < 0$$

e quindi per tutti e soli i valori della costante di frizione compresi nell'intervallo

$$0 < \beta < 3.$$

(b) **Soluzione generale per  $\beta = 2$**

Qualora risulti  $\beta = 2$  l'equazione del moto prende la forma

$$3\ddot{x} + 2\dot{x} + \frac{3}{4}x = 0$$

e la corrispondente equazione caratteristica vale

$$3\lambda^2 + 2\lambda + \frac{3}{4} = 0$$

con radici complesse coniugate

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-9}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{5}i}{6}.$$

La soluzione generale dell'equazione del moto è così data dall'espressione

$$x(t) = e^{-\frac{1}{3}t} \left[ c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{6}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{6}t\right) \right] \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

nella quale compaiono le costanti arbitrarie  $c_1$  e  $c_2$ . Una forma equivalente della soluzione è quella che chiama in causa le costanti di ampiezza —  $A \geq 0$  — e di fase —  $\varphi \in \mathbb{R}$  —

$$x(t) = Ae^{-\frac{1}{3}t} \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{6}t + \varphi\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

### □ **Esercizio 2-C**

Determinare l'equazione dell'asse centrale del sistema composto dai vettori  $\bar{v}_1 = -\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3$ , applicato nel punto  $Q_1(-1, 1, 0)$ , e  $\bar{v}_2 = 3\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3$ , applicato nel punto  $Q_2(1, 0, -2)$ .

#### **Soluzione**

Il sistema consiste dei due vettori

$$\bar{v}_1 = -\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3, \text{ applicato in } Q_1(-1, 1, 0) \text{ e}$$

$$\bar{v}_2 = 3\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3, \text{ applicato in } Q_2(1, 0, -2)$$

ha risultante non nullo

$$\bar{R} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = 2\hat{e}_1 + \hat{e}_3$$

e dunque ammette un asse centrale, univocamente definito. Per determinarlo è necessario calcolare preliminarmente il momento risultante rispetto ad un polo arbitrario, che conviene peraltro identificare con uno dei punti di applicazione,

$$\begin{aligned} \bar{M}_{Q_1} &= (Q_1 - Q_1) \wedge \bar{v}_1 + (Q_2 - Q_1) \wedge \bar{v}_2 = (2\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - 2\hat{e}_3) \wedge (3\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\hat{e}_1 - 4\hat{e}_2 + 5\hat{e}_3. \end{aligned}$$

Si ha allora

$$\overline{R} \wedge \overline{M}_{Q_1} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 4\hat{e}_1 - 7\hat{e}_2 - 8\hat{e}_3,$$

per cui i punti  $A$  dell'asse centrale sono tutti individuati dalla relazione vettoriale

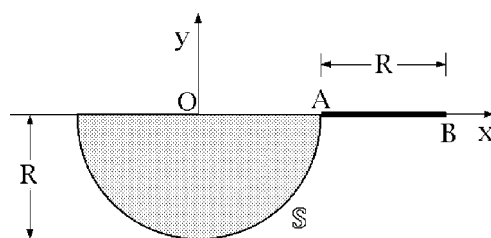
$$\begin{aligned} A - O &= Q_1 - O + \frac{\overline{R} \wedge \overline{M}_{Q_1}}{|\overline{R}|^2} + \alpha \overline{R} = -\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \frac{4\hat{e}_1 - 7\hat{e}_2 - 8\hat{e}_3}{5} + \alpha(2\hat{e}_1 + \hat{e}_3) = \\ &= \left(-\frac{1}{5} + 2\alpha\right)\hat{e}_1 - \frac{2}{5}\hat{e}_2 + \left(-\frac{8}{5} + \alpha\right)\hat{e}_3 \end{aligned}$$

per  $\alpha \in \mathbb{R}$  arbitrario. L'equazione parametrica dell'asse centrale si scrive pertanto

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5} + 2\alpha \\ y = -\frac{2}{5} \\ z = -\frac{8}{5} + \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

### □ Esercizio 3-C

Si consideri il sistema illustrato in figura,



composto da un semidisco circolare  $\mathbb{S}$  di centro  $O$  e raggio  $R$ , e da un'asta rettilinea  $AB$ , di lunghezza  $R$  (vedi figura). La densità lineare dell'asta si scrive

$$\lambda(x) = \frac{\mu}{R^2}x \quad \forall x \in [R, 2R],$$

mentre quella del semidisco in un suo punto arbitrario  $P$  vale

$$\sigma(P) = \frac{\mu}{\pi R^3}|P - O| \quad \forall P \in \mathbb{S},$$

avendo la costante  $\mu > 0$  le dimensioni di una massa. Determinare:

- la massa del sistema;
- la posizione del baricentro del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$ .

## Soluzione

### (a) Massa del sistema

La massa dell'asta  $AB$  si calcola con una integrazione della densità  $\lambda$  lungo il segmento  $AB$

$$m_{AB} = \int_R^{2R} \frac{\mu}{R^2} x dx = \frac{\mu}{R^2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_R^{2R} = \frac{\mu}{R^2} \frac{3R^2}{2} = \frac{3}{2} \mu.$$

La massa del semidisco circolare viene invece calcolata eseguendo l'integrale della densità areale  $\sigma$  in coordinate polari piane

$$(x, y) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \quad , \quad (\rho, \phi) \in [0, R] \times [\pi, 2\pi],$$

e risulta perciò

$$m_S = \int_0^R d\rho \int_\pi^{2\pi} d\phi \rho \frac{\mu}{\pi R^3} \rho = \frac{\mu}{\pi R^3} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_\pi^{2\pi} d\phi = \frac{\mu}{\pi R^3} \frac{R^3}{3} \pi = \frac{\mu}{3}.$$

La massa del sistema si ottiene infine come somma delle masse di asta e semidisco

$$m = m_{AB} + m_S = \frac{3}{2} \mu + \frac{\mu}{3} = \frac{11}{6} \mu.$$

### (b) Baricentro del sistema

Il baricentro del sistema viene determinato per mezzo della proprietà distributiva, che richiede l'individuazione dei baricentri di asta e semidisco. Il baricentro  $G_{AB}$  di  $AB$  è ubicato lungo l'asse  $Ox$ , per simmetria, e se ne deve calcolare la sola ascissa  $x_{AB}$

$$x_{AB} = \frac{1}{m_{AB}} \int_R^{2R} x \frac{\mu}{R^2} x dx = \frac{2}{3\mu} \frac{\mu}{R^2} \int_R^{2R} x^2 dx = \frac{2}{3R^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_R^{2R} = \frac{14}{9} R$$

sicché risulta

$$G_{AB} - O = \frac{14}{9} R \hat{e}_1.$$

L'evidente asse di simmetria  $Oy$  autorizza a calcolare del semidisco  $S$  la sola ordinata del baricentro  $G_S$

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{m_S} \int_0^R d\rho \int_\pi^{2\pi} d\phi \rho \rho \sin \phi \frac{\mu}{\pi R^3} \rho = \frac{3}{\mu} \frac{\mu}{\pi R^3} \int_0^R \rho^3 d\rho \int_\pi^{2\pi} \sin \phi d\phi = \\ &= \frac{3}{\pi R^3} \frac{R^4}{4} [-\cos \phi]_\pi^{2\pi} = -\frac{3}{2\pi} R \end{aligned}$$

fornendone così il vettore posizione nella terna  $Oxyz$

$$G_S - O = -\frac{3}{2\pi} R \hat{e}_2.$$

Il teorema distributivo porge infine

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_{AB}(G_{AB} - O) + m_S(G_S - O)}{m_{AB} + m_S} = \\ &= \frac{6}{11\mu} \left[ \frac{3}{2}\mu \frac{14}{9} R \hat{e}_1 + \frac{\mu}{3} \left( -\frac{3}{2\pi} R \hat{e}_2 \right) \right] = \frac{14}{11} R \hat{e}_1 - \frac{3}{11\pi} R \hat{e}_2. \end{aligned}$$

#### □ Esercizio 4-C

Un punto materiale pesante di massa unitaria è vincolato a scorrere lungo la curva liscia di equazione  $y = -x^3 + 12x$ ,  $z = 0$ , rispetto ad una terna inerziale  $Oxyz$  di asse verticale  $Oy$ , orientato verso l'alto.

- (a) Scrivere le equazioni del moto del sistema.  
 (b) Determinare le posizioni di equilibrio del sistema.

#### Soluzione

La parametrizzazione della curva vincolare è data da

$$P(x) - O = x \hat{e}_1 + (-x^3 + 12x) \hat{e}_2, \quad x \in \mathbb{R},$$

ed ammette la derivata prima

$$P'(x) = \hat{e}_1 + 3(4 - x^2) \hat{e}_2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

che, in quanto diversa da zero e  $C^1$ , permette di riconoscere la parametrizzazione come regolare in  $\mathbb{R}$  e definisce un vettore tangente alla curva nella posizione  $P(x)$ .

#### (a) Equazioni del moto

Per un moto regolare arbitrario del punto sulla curva vincolare,  $P(t) = P[x(t)]$ , con  $x(t)$  funzione  $C^2$  in un intervallo reale di  $t$ , la velocità istantanea assume la forma

$$\dot{P}(t) = [\hat{e}_1 + 3(4 - x^2) \hat{e}_2] \dot{x}$$

mentre per l'accelerazione istantanea una seconda derivazione rispetto al tempo fornisce

$$\ddot{P}(t) = [\hat{e}_1 + 3(4 - x^2) \hat{e}_2] \ddot{x} - 6x\dot{x}^2 \hat{e}_2.$$

L'equazione pura del moto è la semplice proiezione lungo la direzione tangente locale della seconda legge della dinamica — estesa al sistema vincolato, postulato delle reazioni vincolari —

$$m\ddot{P} \cdot P'(x) = -mg \hat{e}_2 \cdot P'(x)$$

e tenuto conto del valore unitario della massa  $m$  diventa

$$[1 + 9(4 - x^2)^2] \ddot{x} - 18(4 - x^2)x\dot{x}^2 = -3g(4 - x^2).$$

(b) **Equilibri**

Gli equilibri sono associati alle soluzioni statiche delle equazioni del moto

$$x(t) = x_0, \text{ costante } \forall t \in \mathbb{R}$$

e coincidono quindi con le soluzioni dell'equazione algebrica

$$-3g(4 - x_0^2) = 0$$

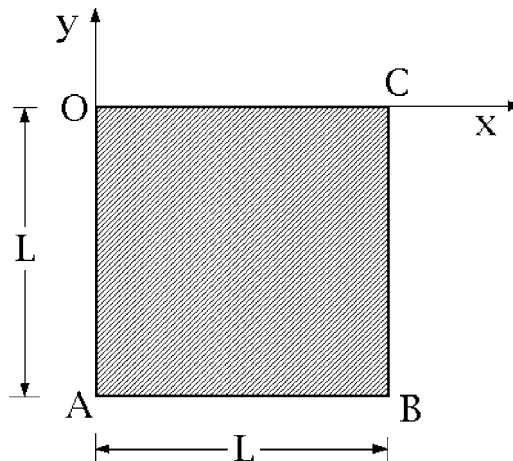
immediatamente identificabili con  $x_0 = -2$  e  $x_0 = +2$ . Le configurazioni di equilibrio del sistema sono pertanto

$$P(-2) - O = -2 \hat{e}_1 - 16 \hat{e}_2 \quad \text{e} \quad P(2) - O = 2 \hat{e}_1 + 16 \hat{e}_2$$

corrispondenti alle sole posizioni della curva con tangente orizzontale.

□ **Esercizio 5-C**

Nella terna di riferimento  $Oxyz$  si considera una lamina quadrata  $OABC$  di lato  $L$  i cui lati si dispongono parallelamente agli assi  $Ox$  ed  $Oy$ , come illustrato in figura.



La densità areale della lamina in un suo generico punto  $P(x, y)$  è data dall'espressione

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{L^5} xy^2 \quad \forall (x, y) \in [0, L] \times [-L, 0].$$

Determinare:

- (a) la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$ ;
- (b) il momento d'inerzia rispetto alla retta  $OB$ ;
- (c) i momenti principali d'inerzia in  $O$  del sistema.

## Soluzione

### (a) Matrice d'inerzia in $Oxyz$

L'averne introdotta la terna di riferimento in modo che il piano coordinato  $Oxy$  contenga l'intera superficie materiale comporta che la matrice d'inerzia sia del tipo

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix}$$

con i momenti  $L_{xx}$ ,  $L_{yy}$  ed il prodotto d'inerzia  $L_{xy}$  da determinare direttamente per mezzo delle definizioni. Il momento d'inerzia relativo all'asse  $Ox$  vale

$$L_{xx} = \int_0^L dx \int_{-L}^0 dy \frac{\mu}{L^5} xy^2 y^2 = \frac{\mu}{L^5} \int_0^L x dx \int_{-L}^0 y^4 dy = \frac{\mu}{L^5} \frac{L^2}{2} \frac{L^5}{5} = \frac{1}{10} \mu L^2$$

mentre per il momento d'inerzia rispetto ad  $Oy$  si ha

$$L_{yy} = \int_0^L dx \int_{-L}^0 dy \frac{\mu}{L^5} xy^2 x^2 = \frac{\mu}{L^5} \int_0^L x^3 dx \int_{-L}^0 y^2 dy = \frac{\mu}{L^5} \frac{L^4}{4} \frac{L^3}{3} = \frac{1}{12} \mu L^2.$$

Espressione analoga si ricava per il prodotto d'inerzia

$$L_{xy} = - \int_0^L dx \int_{-L}^0 dy \frac{\mu}{L^5} xy^2 xy = - \frac{\mu}{L^5} \int_0^L x^2 dx \int_{-L}^0 y^3 dy = - \frac{\mu}{L^4} \frac{L^3}{3} \left[ \frac{y^4}{4} \right]_{-L}^0 = \frac{1}{12} \mu L^2$$

che permette dunque di scrivere esplicitamente la matrice  $[L_O]$

$$[L_O] = \mu L^2 \begin{pmatrix} 1/10 & 1/12 & 0 \\ 1/12 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 11/60 \end{pmatrix}.$$

### (b) Momento d'inerzia rispetto alla retta $OB$

La retta  $OB$  è una retta passante per l'origine individuata dal versore tangente

$$\hat{n} = \frac{B - O}{|B - O|} = \frac{\hat{e}_1 - \hat{e}_2}{|\hat{e}_1 - \hat{e}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2 = n_1 \hat{e}_1 + n_2 \hat{e}_2 + n_3 \hat{e}_3$$

il che consente di calcolare il momento d'inerzia rispetto a  $OB = O\hat{n}$  per mezzo della relazione generale

$$\begin{aligned} I_{OB} = I_{O\hat{n}} = \hat{n} \cdot L_O(\hat{n}) &= \frac{1}{2} (1 \ -1 \ 0) \mu L^2 \begin{pmatrix} 1/10 & 1/12 & 0 \\ 1/12 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 11/60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} (1 \ -1 \ 0) \mu L^2 \begin{pmatrix} 1/60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{120} \mu L^2. \end{aligned}$$

(c) **Momenti principali d'inerzia in  $O$**

I momenti principali d'inerzia in  $O$  sono gli autovalori dell'operatore d'inerzia  $L_O$  del sistema nello stesso punto, identificabili con gli autovalori di una qualsiasi matrice di rappresentazione di  $L_O$  rispetto ad una base comune assegnata. Indicato con  $\mu L^2 \lambda$  il generico autovalore, l'equazione caratteristica associata alla matrice d'inerzia in  $Oxyz$  è data da

$$\det([L_O] - \mu L^2 \lambda \mathbb{1}) = (\mu L^2)^3 \left[ \left( \frac{1}{10} - \lambda \right) \left( \frac{1}{12} - \lambda \right) - \frac{1}{144} \right] \left( \frac{11}{60} - \lambda \right) = 0$$

e dopo una semplice manipolazione algebrica assume la forma equivalente

$$\left( \lambda^2 - \frac{11}{60} \lambda + \frac{1}{720} \right) \left( \frac{11}{60} - \lambda \right) = 0.$$

Una soluzione ovvia si ha per

$$\lambda = \frac{11}{60}$$

mentre le altre due radici risultano

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[ \frac{11}{60} \pm \sqrt{\frac{121}{3600} - \frac{4}{720}} \right] = \frac{11 \pm \sqrt{101}}{120}.$$

I momenti principali d'inerzia in  $O$  valgono pertanto, in ordine crescente,

$$A_1 = \frac{11 - \sqrt{101}}{120} \mu L^2 \quad A_2 = \frac{11}{60} \mu L^2 \quad A_3 = \frac{11 + \sqrt{101}}{120} \mu L^2.$$