

Prova in itinere di meccanica razionale 1 M-Z del 02.11.2006

Esercizio 1

Un punto materiale P di massa $m = 2$ può scorrere senza attrito lungo l'asse Ox di una terna inerziale. Il punto P è collegato all'origine O da una molla ideale di costante elastica $k = 3$, ed è inoltre soggetto ad una forza di resistenza viscosa con costante di frizione β . Determinare:

- l'equazione del moto del sistema e la condizione su β affinché i moti siano oscillatori smorzati;
- la soluzione generale dell'equazione del moto per $\beta = 4$ ed il moto di dati iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 2$.

Soluzione

(a) Equazione del moto e condizione dei moti oscillatori smorzati

L'equazione del moto del punto vincolato si ricava dal postulato delle reazioni vincolari:

$$2\ddot{P} = -3(P - O) - \beta\dot{P} + \vec{\Phi}$$

essendosi indicato con $\vec{\Phi}$ il risultante delle reazioni vincolari agenti sul punto materiale. Detto risultante è ortogonale all'asse Ox , che per ipotesi non esercita forze di attrito sul punto. La posizione di questo è individuata per mezzo dell'ovvia parametrizzazione

$$P(x) - O = x \hat{e}_1 \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

L'equazione pura del moto è allora data dalla proiezione dell'equazione precedente lungo l'asse vincolare e si scrive pertanto

$$2\ddot{x} + \beta\dot{x} + 3x = 0 . \tag{0.1}$$

È questa un'equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea e a coefficienti costanti. Le sue soluzioni sono individuate tramite l'equazione caratteristica

$$2\lambda^2 + \beta\lambda + 3 = 0$$

che ha discriminante $\Delta = \beta^2 - 24$. I moti del sistema risultano oscillatori smorzati se e soltanto se il discriminante assume segno negativo, ossia per $\beta^2 - 24 < 0$. Ricordando che per definizione la costante di frizione può essere soltanto positiva, la condizione per i moti oscillatori diventa dunque

$$0 < \beta < 2\sqrt{6} .$$

(b) Soluzione generale e problema di Cauchy per $\beta = 4$

Nel caso che sia $\beta = 4$ l'equazione pura del moto (0.1) si riduce a

$$2\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0$$

e l'equazione caratteristica assume la forma

$$2\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

con le radici complesse coniugate

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{4} = \frac{-4 \pm i\sqrt{8}}{4} = -1 \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La soluzione generale dell'equazione del moto diventa così

$$x(t) = c_1 e^{-t} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + c_2 e^{-t} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

in termini delle costanti reali arbitrarie c_1 e c_2 , determinate dalle eventuali condizioni iniziali. La derivata prima della soluzione vale

$$\dot{x}(t) = e^{-t} \left[-c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \right]$$

per cui le condizioni iniziali richieste impongono che si abbia

$$0 = x(0) = c_1 \quad 2 = \dot{x}(0) = -c_1 + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ossia

$$c_1 = 0 \quad c_2 = 2\sqrt{2}.$$

In definitiva, la soluzione del problema di Cauchy proposto è data dall'espressione

$$x(t) = 2\sqrt{2}e^{-t} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2

Indicata con $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ una terna cartesiana ortogonale destra in E^3 , si ricavi l'espressione parametrica dell'asse centrale del sistema composto dai vettori $\vec{v}_1 = -2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3$, applicato nel punto $P_1(2, 1, 3)$, e $\vec{v}_2 = \hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3$, applicato nel punto $P_2(-1, 0, 2)$.

Soluzione

Esistenza ed unicità dell'asse centrale sono assicurate dal valore non nullo del risultante

$$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = -\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + \hat{e}_3.$$

Il momento risultante del sistema rispetto all'origine O è dato da

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= (P_1 - O) \wedge \vec{v}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{v}_2 = \\ &= (2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 3\hat{e}_3) \wedge (-2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3) + (-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3) \wedge (\hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -4\hat{e}_1 - 4\hat{e}_2 + 4\hat{e}_3 + 6\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3 = 2\hat{e}_1 + 7\hat{e}_3\end{aligned}$$

per cui

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -14\hat{e}_1 + 9\hat{e}_2 + 4\hat{e}_3$$

mentre il modulo quadrato del risultante vale

$$|\vec{R}|^2 = |-\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + \hat{e}_3|^2 = 1 + 4 + 1 = 6.$$

L'equazione parametrica dell'asse centrale si scrive perciò, in forma vettoriale, come

$$\begin{aligned}A - O &= \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \alpha \vec{R} = \frac{-14\hat{e}_1 + 9\hat{e}_2 + 4\hat{e}_3}{6} + \alpha(-\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + \hat{e}_3) = \\ &= -\frac{7}{3}\hat{e}_1 + \frac{3}{2}\hat{e}_2 + \frac{2}{3}\hat{e}_3 + \alpha(-\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + \hat{e}_3)\end{aligned}$$

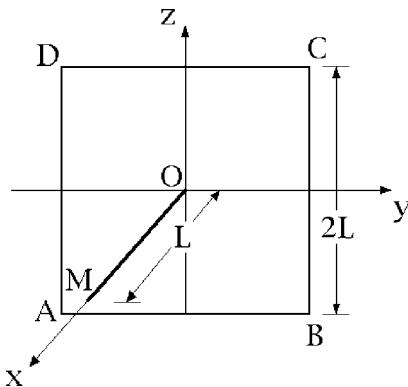
e porge le relazioni parametriche scalari

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{3} - \alpha \\ y = \frac{3}{2} - 2\alpha \\ z = \frac{2}{3} + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

che identificano l'asse centrale cercato.

Esercizio 3

Il sistema illustrato in figura,



è composto da una lamina quadrata $ABCD$ di centro O e lato $2L$, con i lati paralleli agli assi coordinati Oy e Oz , e da un'asta rettilinea OM , di lunghezza L , posta lungo il semiasse Ox positivo. In un suo generico punto P la densità areale della lamina si scrive

$$\sigma(P) = \frac{\mu}{L^4} |P - O|^2 \quad \forall P \in ABCD$$

mentre quella lineare dell'asta vale

$$\lambda(x) = \frac{\mu}{L^3} x^2 \quad \forall x \in [0, L].$$

Determinare del sistema:

- (a) la matrice d'inerzia rispetto alla terna $Oxyz$;
- (b) il momento d'inerzia rispetto all'asse di equazione parametrica $x = 3\alpha$, $y = 0$, $z = -4\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (c) i momenti principali d'inerzia e una terna principale d'inerzia in O .

Soluzione

Per additività, la matrice d'inerzia del sistema è data dalla somma delle matrici d'inerzia della lamina quadrata e dell'asta rettilinea, calcolate rispetto alla medesima terna $Oxyz$. Convienne calcolare separatamente le due matrici d'inerzia parziali, per poi sommarle.

Matrice d'inerzia della lamina quadrata

Poichè la lamina si colloca nel piano coordinato Oyz , la matrice d'inerzia relativa alla terna $Oxyz$ deve assumere la forma generale

$$[L_O^\ell] = \begin{pmatrix} L_{yy}^\ell + L_{zz}^\ell & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^\ell & L_{yz}^\ell \\ 0 & L_{yz}^\ell & L_{zz}^\ell \end{pmatrix}$$

potendosi identificare immediatamente l'asse Ox con un asse principale d'inerzia in O . Il momento d'inerzia relativo all'asse Oy si calcola per mezzo di una integrazione esplicita

$$\begin{aligned} L_{yy}^\ell &= \int_{-L}^L dy \int_{-L}^L dz \, z^2 \frac{\mu}{L^4} (y^2 + z^2) = \frac{\mu}{L^4} \int_{-L}^L dy \int_{-L}^L dz \, (y^2 z^2 + z^4) = \\ &= \frac{\mu}{L^4} \int_{-L}^L dy \left[y^2 \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right]_{z=-L}^L = \frac{\mu}{L^4} \int_{-L}^L dy \left[\frac{2}{3} L^3 y^2 + \frac{2}{5} L^5 \right] = \\ &= \frac{\mu}{L^4} \left[\frac{2}{3} L^3 \frac{y^3}{3} + \frac{2}{5} L^5 y \right]_{y=-L}^L = \frac{\mu}{L^4} \left(\frac{4}{9} L^6 + \frac{4}{5} L^6 \right) = \frac{56}{45} \mu L^2 \end{aligned}$$

che invece non è necessaria per valutare il momento d'inerzia rispetto ad Oz , che coincide con il precedente per simmetria:

$$L_{zz}^{\ell} = \int_{-L}^L dy \int_{-L}^L dz y^2 \frac{\mu}{L^4} (y^2 + z^2) = \int_{-L}^L dz \int_{-L}^L dy z^2 \frac{\mu}{L^4} (z^2 + y^2) = L_{yy}^{\ell} = \frac{56}{45} \mu L^2$$

come è immediato accertare scambiando le variabili di integrazione y e z . Allo stesso modo, non è necessario ricorrere all'integrazione esplicita per calcolare il prodotto d'inerzia L_{yz}^{ℓ} , che deve chiaramente annullarsi

$$L_{yz}^{\ell} = 0$$

in quanto gli assi Oy e Oz sono di simmetria per il sistema e devono quindi identificarsi con altrettanti assi principali d'inerzia in O : $Oxyz$ è una terna principale d'inerzia in O per la lamina. In conclusione, la matrice d'inerzia in $Oxyz$ della lamina quadrata assume la forma diagonale

$$[L_O^{\ell}] = \mu L^2 \begin{pmatrix} 112/45 & 0 & 0 \\ 0 & 56/45 & 0 \\ 0 & 0 & 56/45 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia dell'asta rettilinea

Dal momento che l'asta rettilinea giace lungo l'asse coordinate Ox , la relativa matrice d'inerzia in $Oxyz$ deve assumere la forma generale

$$[L_O^a] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^a & 0 \\ 0 & 0 & L_{zz}^a \end{pmatrix}$$

nella quale il momento d'inerzia rispetto all'asse Oy risulta

$$L_{yy}^a = \int_0^L x^2 \frac{\mu}{L^3} x^2 dx = \frac{\mu}{L^3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^L = \frac{1}{5} \mu L^2$$

e per simmetria deve assumere lo stesso valore del momento relativo a Oz

$$L_{zz}^a = \int_0^L x^2 \frac{\mu}{L^3} x^2 dx = L_{yy}^a = \frac{1}{5} \mu L^2.$$

Ne deriva che

$$[L_O^a] = \mu L^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Matrice d'inerzia del sistema

La matrice d'inerzia del sistema si può ora calcolare sfruttando la proprietà additiva:

$$[L_O] = [L_O^{\ell}] + [L_O^a] = \mu L^2 \begin{pmatrix} 112/45 & 0 & 0 \\ 0 & 13/9 & 0 \\ 0 & 0 & 13/9 \end{pmatrix}.$$

(b) **Momento d'inerzia**

La retta di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 0 \\ z = -4\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

passa chiaramente per l'origine O della terna di riferimento — per verificarlo basta porre $\alpha = 0$ — e ad essa è associato il versore tangente

$$\hat{n} = \frac{3\hat{e}_1 - 4\hat{e}_3}{|3\hat{e}_1 - 4\hat{e}_3|} = \frac{3\hat{e}_1 - 4\hat{e}_3}{5} = \frac{3}{5}\hat{e}_1 - \frac{4}{5}\hat{e}_3.$$

È dunque lecito calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse $O\hat{n}$ per mezzo della relazione matriciale

$$\begin{aligned} I_{O\hat{n}} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \mu L^2 \begin{pmatrix} 112/45 & 0 & 0 \\ 0 & 13/9 & 0 \\ 0 & 0 & 13/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ -4/5 \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{112}{45} \frac{9}{25} + \frac{13}{9} \frac{16}{25} \right) \mu L^2 = \frac{2048}{1125} \mu L^2. \end{aligned}$$

(c) **Momenti e terna principale d'inerzia in O**

La terna $Oxyz$ è principale d'inerzia in O , in quanto la relativa matrice d'inerzia $[L_O]$ si presenta in forma diagonale. I momenti principali d'inerzia si identificano dunque con gli elementi diagonali della stessa matrice:

$$A_1 = \frac{112}{45} \mu L^2 \quad A_2 = \frac{13}{9} \mu L^2 \quad A_3 = \frac{13}{9} \mu L^2.$$

Vale la pena di sottolineare che due degli autovalori — A_2 e A_3 — sono coincidenti. Qualsiasi combinazione lineare non nulla dei relativi autovettori \hat{e}_2 ed \hat{e}_3 costituisce pertanto ancora un autovettore associato allo stesso autovalore. Ne segue che la terna principale d'inerzia in O del sistema non risulta individuata univocamente, potendosi ruotare a piacere attorno all'asse Oz .

Esercizio 4

Un punto materiale pesante di massa $m = 1$ è vincolato a scorrere senza attrito lungo la curva di equazione $y = x^3 - 3x^2 + 1$, $z = 0$, rispetto alla terna inerziale $Oxyz$ con l'asse verticale Oy orientato verso l'alto.

- (a) Scrivere le equazioni pure del moto del sistema, indicando con $g > 0$ l'accelerazione di gravità.
- (b) Determinare le posizioni di equilibrio del sistema.

Soluzione

Il punto è vincolato a muoversi lungo la curva liscia di parametrizzazione

$$P(x) - O = x \hat{e}_1 + (x^3 - 3x^2 + 1) \hat{e}_2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (0.2)$$

ed avendo massa unitaria deve ritenersi soggetto ad una forza peso del tipo $-g \hat{e}_2$ — si assume infatti $g > 0$ e l'asse verticale Oy è orientato verso l'alto per ipotesi. Le derivate prima e seconda della parametrizzazione si calcolano immediatamente

$$P'(x) = \hat{e}_1 + (3x^2 - 6x) \hat{e}_2 \quad P''(x) = 6(x - 1) \hat{e}_2 .$$

Si osservi che la parametrizzazione è regolare, risultando $P'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

(a) Equazioni del moto

Per un qualsiasi moto possibile regolare, descritto ponendo $x = x(t)$ nella parametrizzazione (0.2), la velocità istantanea si esprime nella forma

$$\dot{P} = P'(x) \dot{x}$$

mentre per l'accelerazione istantanea si ha

$$\ddot{P} = P'(x) \ddot{x} + P''(x) \dot{x}^2 .$$

L'equazione del moto del sistema viene dedotta ricorrendo al postulato delle reazioni vincolari, delle quali si indica con $\vec{\Phi}$ il risultante,

$$P'(x) \ddot{x} + P''(x) \dot{x}^2 = -g \hat{e}_2 + \vec{\Phi} .$$

Grazie all'assenza di attriti, è sufficiente proiettare lungo la direzione tangente $P'(x)$ per ridurre l'equazione del moto alla forma pura

$$P'(x) \cdot P'(x) \ddot{x} + P'(x) \cdot P''(x) \dot{x}^2 = -g \hat{e}_2 \cdot P'(x)$$

che si scrive esplicitamente come

$$[1 + (3x^2 - 6x)^2] \ddot{x} + (3x^2 - 6x)6(x - 1) \dot{x}^2 = -g(3x^2 - 6x) . \quad (0.3)$$

(b) Posizioni di equilibrio

Gli equilibri del sistema sono le configurazioni $x = x_0$ nelle quali il sistema può porsi in quiete

$$x(t) = x_0 , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Imponendo che un simile stato di quiete sia soluzione dell'equazione pura del moto (0.3) si perviene alla condizione di equilibrio

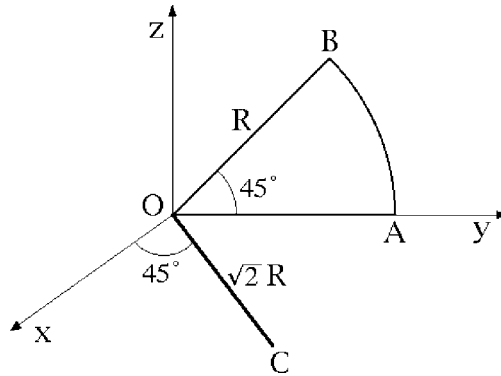
$$0 = -g(3x_0^2 - 6x_0) = -3gx_0(x_0 - 2)$$

dalla quale si deducono le configurazioni di equilibrio cercate

$$x = 0, \quad x = 2.$$

Esercizio 5

Nel piano Oyz di una terna $Oxyz$ giace un settore circolare OAB di centro O , raggio R e angolo al centro di 45° , con il lato OA su Oy . Nel piano Oxy un'asta rettilinea OC di lunghezza $\sqrt{2}R$ forma un angolo di 45° con il semiasse Ox positivo.



Indicata con μ una costante positiva, nel generico punto P di OAB la densità areale risulta

$$\sigma(P) = \frac{8\mu}{\pi R^2},$$

mentre in ogni punto $Q \in OC$ la densità lineare vale

$$\lambda(Q) = \frac{\mu}{R^2} |Q - O|.$$

Determinare:

- (a) la massa del sistema;
- (b) il baricentro del sistema.

Soluzione

(a) Massa del sistema

La massa del sistema è data dalla somma delle masse del settore OAB e dell'asta OC , che si determinano separatamente per integrazione diretta.

Massa del settore circolare

La massa m_s del settore circolare si calcola integrando in coordinate polari piane la densità areale costante $\sigma = 8\mu/\pi R^2$:

$$m_s = \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/4} d\phi \rho \frac{8\mu}{\pi R^2} = \frac{8\mu}{\pi R^2} \frac{R^2}{2} \frac{\pi}{4} = \mu.$$

Massa dell'asta rettilinea

Poiché l'asta si colloca lungo la bisettrice del primo quadrante nel piano coordinato Oxy , con un estremo in O e lunghezza complessiva $\sqrt{2}R$, una sua semplice parametrizzazione è data da

$$Q(x) - O = x \hat{e}_1 + x \hat{e}_2, \quad x \in [0, R],$$

cui corrisponde l'elemento infinitesimo di lunghezza

$$ds = |Q'(x)| dx = |\hat{e}_1 + \hat{e}_2| dx = \sqrt{2} dx.$$

Per ricavare la massa dell'asta si deve dunque calcolare l'integrale definito

$$m_a = \int_0^R \frac{\mu}{R^2} \sqrt{x^2 + x^2} \sqrt{2} dx = \frac{\mu}{R^2} \int_0^R \sqrt{2}x \sqrt{2} dx = \frac{2\mu}{R^2} \int_0^R x dx = \mu.$$

Massa del sistema

Per la determinazione della massa del sistema non rimane che sommare i contributi di settore e asta:

$$m = m_s + m_a = \mu + \mu = 2\mu.$$

(b) Baricentro del sistema

Il sistema è costituito da una superficie materiale omogenea — il settore circolare — e da una curva materiale — l'asta rettilinea — per cui si rende necessario ricorrere al teorema distributivo per individuare il baricentro del sistema. Da notare che le due parti possono considerarsi disgiunte, data l'irrelevanza dell'unico punto di intersezione O nel calcolo sia degli integrali curvilinei su OC che di quelli di superficie sul settore OAB . Preliminarmente si calcolano i baricentri delle due parti costituenti.

Baricentro del settore circolare

Il vettore posizione del baricentro G_s del settore circolare può esprimersi nella forma

$$G_s - O = x_s \hat{e}_1 + y_s \hat{e}_2 + z_s \hat{e}_3$$

dove tuttavia deve assumersi $x_s = 0$, data la presenza dell'evidente piano di simmetria Oyz — che costituisce il piano di giacitura della superficie piana OAB . L'ordinata si calcola per integrazione diretta, notando che $y = \rho \cos \phi$,

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{1}{m_s} \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/4} d\phi \rho \frac{8\mu}{\pi R^2} \rho \cos \phi = \frac{1}{\mu} \frac{8\mu}{\pi R^2} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/4} \cos \phi d\phi = \\ &= \frac{8}{\pi R^2} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R [\sin \phi]_0^{\pi/4} = \frac{8}{\pi R^2} \frac{R^3}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R \end{aligned}$$

al pari della corrispondente quota

$$\begin{aligned} z_s &= \frac{1}{m_s} \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/4} d\phi \rho \frac{8\mu}{\pi R^2} \rho \sin \phi = \frac{1}{\mu \pi R^2} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/4} \sin \phi d\phi = \\ &= \frac{8}{\pi R^2} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R [-\cos \phi]_0^{\pi/4} = \frac{8}{\pi R^2} \frac{R^3}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{4}{3\pi} (2 - \sqrt{2}) R. \end{aligned}$$

in quanto $z = \rho \sin \phi$. Il baricentro del settore risulta perciò

$$G_s - O = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R \hat{e}_2 + \frac{4}{3\pi} (2 - \sqrt{2}) R \hat{e}_3.$$

Da rilevare come la tangente dell'angolo ϕ_0 che il vettore posizione $G_s - O$ forma con il semiasse Oy positivo sia uguale a

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{z_s}{y_s} = \frac{4}{3\pi} (2 - \sqrt{2}) R \frac{3\pi}{4\sqrt{2}R} = \sqrt{2} - 1$$

che, come è immediato verificare con l'appropriata formula di bisezione, corrisponde alla tangente di 22.5° :

$$\operatorname{tg} 22.5^\circ = \operatorname{tg} \left(\frac{45^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{1}} = \sqrt{2} - 1$$

per cui risulta $\phi_0 = 22.5^\circ$. Il baricentro G_s si colloca dunque lungo la bisettrice del settore circolare, che infatti costituisce un ovvio asse di simmetria del settore omogeneo.

Baricentro dell'asta

Il baricentro dell'asta è individuato dal vettore posizione

$$G_a - O = x_a \hat{e}_1 + y_a \hat{e}_2 + z_a \hat{e}_3$$

dove la quota z_a può certamente ritenersi nulla a causa dell'ovvio piano di simmetria Oxy della figura. Poiché inoltre il sistema risulta allineato lungo la bisettrice del primo quadrante nel piano coordinato Oxy , che ne costituisce un asse di simmetria, il baricentro dovrà situarsi sul medesimo asse e ascissa ed ordinata dovranno assumere lo stesso valore

$$y_a = x_a.$$

Si deve pertanto procedere al calcolo della sola ascissa x_a , che segue immediatamente dall'apposito integrale curvilineo

$$x_a = \frac{1}{m_a} \int_0^R x \frac{\mu}{R^2} \sqrt{x^2 + x^2} \sqrt{2} dx = \frac{1}{\mu R^2} \int_0^R x^2 dx = \frac{2}{R^2} \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3} R,$$

in modo che

$$G_a - O = \frac{2}{3}R\hat{e}_1 + \frac{2}{3}R\hat{e}_2.$$

Baricentro del sistema

Per il baricentro G del sistema la formula distributiva porge il vettore posizione, rispetto ad $Oxyz$:

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_s(G_s - O) + m_a(G_a - O)}{m_s + m_a} = \\ &= \frac{1}{2\mu} \left[\mu \left(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}R\hat{e}_2 + \frac{4}{3\pi}(2 - \sqrt{2})R\hat{e}_3 \right) + \mu \left(\frac{2}{3}R\hat{e}_1 + \frac{2}{3}R\hat{e}_2 \right) \right] = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}R\hat{e}_2 + \frac{2}{3\pi}(2 - \sqrt{2})R\hat{e}_3 + \frac{1}{3}R\hat{e}_1 + \frac{1}{3}R\hat{e}_2 = \\ &= \frac{1}{3}R\hat{e}_1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \right)R\hat{e}_2 + \frac{2}{3\pi}(2 - \sqrt{2})R\hat{e}_3. \end{aligned}$$