Prova in itinere di meccanica razionale 1 M-Z del 31.10.2007

Esercizio 1

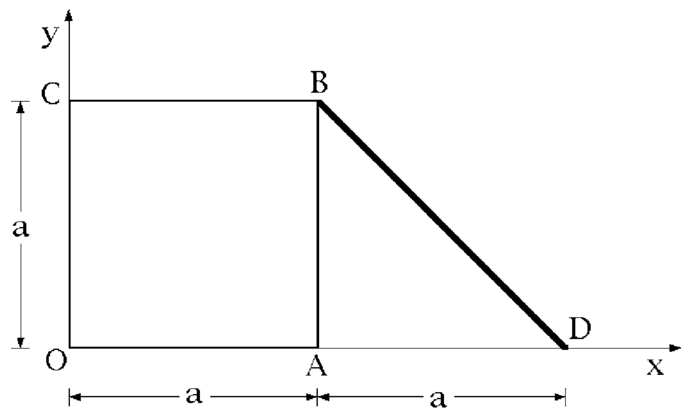
Nel piano Oxy di una terna $Oxyz$ sono collocate una piastra quadrata $OABC$, di lato a, e un'asta rettilinea che congiunge il vertice B con il punto $D(2a, 0, 0)$ — vedi figura. La densità della piastra si scrive

$$\sigma(P) = \frac{\mu}{a^4}|P-O|^2 \qquad \forall\, P \in OABC\,,$$

mentre quella dell'asta è data da

$$\lambda(P) = \frac{\mu}{\sqrt{2}\,a^3}|P-B|^2 \qquad \forall\, P \in BD\,,$$

essendo $\mu > 0$ una massa caratteristica del sistema.



Si chiede di determinare del sistema:

(a) la massa;

(b) il baricentro, verificando che esso appartiene all'inviluppo convesso del sistema.

Soluzione

(a) Massa del sistema

La proprietà di additività assicura che la massa del sistema può essere determinata calcolando separatamente e sommando le masse delle due parti rigide costituenti, la piastra $OABC$ e l'asta BD. Il punto di intersezione B fra le due parti costituisce infatti un insieme di misura nulla e non influenza in alcun modo il calcolo delle masse o dei baricentri parziali.

Massa della piastra
L'integrale della densità areale σ sul quadrato $OABC = [0,a]^2$ fornisce la massa della piastra quadrata:

$$m_{OABC} = \int_0^a dx \int_0^a dy\, \frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2) = \frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx\left(x^2 a + \frac{a^3}{3}\right) = \frac{\mu}{a^4}\left(\frac{a^3}{3}a + \frac{a^3}{3}a\right) = \frac{2}{3}\mu\,.$$

Massa dell'asta
In primo luogo si ricava una parametrizzazione dell'asta. Il segmento BD può parametrizzarsi per mezzo della relazione lineare

$$\begin{aligned} P-O &= (1-\xi)(B-O)+\xi(D-O) = (1-\xi)(a\hat{e}_1+a\hat{e}_2)+\xi\, 2a\hat{e}_1 = \\ &= (1+\xi)a\hat{e}_1+(1-\xi)a\hat{e}_2 \qquad \forall\, \xi\in[0,1] \end{aligned}$$

alla quale corrisponde l'elemento infinitesimo di lunghezza

$$ds = \left|\frac{dP}{d\xi}(\xi)\right| d\xi = |a\hat{e}_1 - a\hat{e}_2|\, d\xi = \sqrt{2}a\, d\xi$$

mentre la densità lineare assume la forma

$$\begin{aligned} \lambda(\xi) &= \frac{\mu}{\sqrt{2}\,a^3}\Big|(1+\xi)a\hat{e}_1+(1-\xi)a\hat{e}_2-(a\hat{e}_1+a\hat{e}_2)\Big|^2 = \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2}\,a^3}|\xi a\hat{e}_1 - \xi a\hat{e}_2|^2 = \frac{\mu}{\sqrt{2}\,a^3}2a^2\xi^2 = \sqrt{2}\frac{\mu}{a}\xi^2 \qquad \forall\,\xi\in[0,1]\,. \end{aligned}$$

La massa dell'asta si scrive perciò

$$m_{BD} = \int_0^1 \sqrt{2}\frac{\mu}{a}\xi^2\sqrt{2}a\, d\xi = 2\mu\int_0^1 \xi^2 d\xi = \frac{2}{3}\mu\,.$$

Massa del sistema
Per ottenere la massa dell'intero sistema non resta che sommare le masse parziali appena calcolate:

$$m = m_{OABC} + m_{BD} = \frac{2}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu = \frac{4}{3}\mu\,.$$

(*b*) **Baricentro del sistema, inviluppo convesso del sistema**
Poichè il sistema consiste di una superficie materiale (la piastra) e di una curva materiale (il segmento BD), il baricentro del sistema può essere determinato soltanto ricorrendo al teorema distributivo. Si tratta quindi di calcolare i baricentri della piastra e dell'asta, di immaginare concentrate in tali punti le intere masse m_{OABC} e m_{BD}, ed infine di determinare il baricentro del sistema fittizio di due punti materiali così ottenuto.

Baricentro della piastra
Rispetto alla terna $Oxyz$, il baricentro G_{OABC} della piastra deve essere individuato da un vettore posizione della forma

$$G_{OABC} - O = x_{OABC}\hat{e}_1 + y_{OABC}\hat{e}_2 = x_{OABC}\hat{e}_1 + x_{OABC}\hat{e}_2 \tag{0.1}$$

in quanto la retta $z = 0$, $y = x$, costituisce un evidente asse di simmetria della piastra; i punti simmetrici $(x, y) \in [0, a]^2$ e $(y, x) \in [0, a]^2$ si collocano infatti alla stessa distanza dall'origine O e presentano quindi la stessa densità areale:

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{a^4}(x^2 + y^2) = \frac{\mu}{a^4}(y^2 + x^2) = \sigma(y, x) \qquad \forall\,(x, y) \in [0, a]^2 .$$

L'ascissa del baricentro viene calcolata applicando direttamente la definizione e ricordando il valore della massa già ricavato al punto precedente:

$$\begin{aligned}
x_{OABC} &= \frac{1}{m_{OABC}} \int_{OABC} x\,\sigma\,dxdy = \frac{3}{2\mu} \int_0^a dx \int_0^a dy\, \frac{\mu}{a^4}(x^2 + y^2)x = \\
&= \frac{3}{2a^4} \int_0^a dx \int_0^a dy\,(x^3 + xy^2) = \frac{3}{2a^4} \int_0^a dx\Big(x^3 a + x\frac{a^3}{3}\Big) = \\
&= \frac{3}{2a^4}\Big(\frac{a^4}{4}a + \frac{a^2}{2}\frac{a^3}{3}\Big) = \frac{3}{2}a\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\Big) = \frac{5}{8}a
\end{aligned}$$

per cui la (0.1) fornisce

$$G_{OABC} - O = \frac{5}{8}a\,\hat{e}_1 + \frac{5}{8}a\,\hat{e}_2 .$$

Baricentro dell'asta
Per il teorema dell'inviluppo convesso, il baricentro G_{BD} dell'asta deve collocarsi lungo il segmento BD, la cui retta di giacitura ha equazione

$$\frac{x - x_B}{x_D - x_B} = \frac{y - y_B}{y_D - y_B}$$

ossia

$$\frac{x - a}{2a - a} = \frac{y - a}{0 - a}$$

e quindi, dopo semplici manipolazioni algebriche,

$$x + y - 2a = 0 . \tag{0.2}$$

Il vettore posizione del baricentro può ricercasi della forma

$$G_{BD} - O = x_{BD}\hat{e}_1 + y_{BD}\hat{e}_2$$

con ascissa

$$
\begin{aligned}
x_{BD} &= \frac{1}{m_{BD}} \int_{BD} x\,\lambda\, ds \;=\; \frac{3}{2\mu}\int_0^1 \sqrt{2}\frac{\mu}{a}\xi^2(1+\xi)a\,\sqrt{2}a\,d\xi \;= \\
&= 3a\int_0^1 (\xi^2+\xi^3)d\xi \;=\; 3a\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big) \;=\; \frac{7}{4}a
\end{aligned}
$$

e ordinata

$$
\begin{aligned}
y_{BD} &= \frac{1}{m_{BD}} \int_{BD} y\,\lambda\, ds \;=\; \frac{3}{2\mu}\int_0^1 \sqrt{2}\frac{\mu}{a}\xi^2(1-\xi)a\,\sqrt{2}a\,d\xi \;= \\
&= 3a\int_0^1 (\xi^2-\xi^3)d\xi \;=\; 3a\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big) \;=\; \frac{1}{4}a
\end{aligned}
$$

cosicchè risulta

$$G_{BD} - O \;=\; \frac{7}{4}a\,\hat{e}_1 + \frac{1}{4}a\,\hat{e}_2\,.$$

Si osservi che il baricentro calcolato giace effettivamente lungo il segmento BD, in quanto $a < x_{BD} < 2a$ e

$$\frac{7}{4}a + \frac{1}{4}a - 2a \;=\; 0$$

per cui l'equazione (0.2) è soddisfatta.

Baricentro del sistema

Il baricentro G del sistema viene calcolato come "baricentro dei baricentri" G_{OABC} e G_{BD}, per mezzo della formula distributiva

$$
\begin{aligned}
G - O &= \frac{m_{OABC}(G_{OABC}-O) + m_{BD}(G_{BD}-O)}{m_{OABC}+m_{BD}} \;= \\
&= \frac{3}{4\mu}\left[\frac{2}{3}\mu\Big(\frac{5}{8}a\,\hat{e}_1 + \frac{5}{8}a\,\hat{e}_2\Big) + \frac{2}{3}\mu\Big(\frac{7}{4}a\,\hat{e}_1 + \frac{1}{4}a\,\hat{e}_2\Big)\right] \;= \\
&= \frac{3}{4}\Big(\frac{5}{12}\,\hat{e}_1 + \frac{5}{12}\,\hat{e}_2 + \frac{14}{12}\,\hat{e}_1 + \frac{2}{12}\,\hat{e}_2\Big)\,a \;=\; \Big(\frac{19}{16}\,\hat{e}_1 + \frac{7}{16}\,\hat{e}_2\Big)a\,.
\end{aligned}
$$

È immediato verificare che il baricentro appartiene all'inviluppo convesso dell'insieme piastra+asta, che si identifica con il trapezio rettangolo $ODBC$. Per individuare l'inviluppo convesso del sistema basta considerare, nel piano di giacitura Oxy, l'intersezione dei semipiani chiusi:

$y \geq 0$ (semipiano dei punti di ordinata non negativa)

$$x \geq 0 \qquad \text{(semipiano dei punti di ascissa non negativa)}$$

$$y \leq a \qquad \text{(semipiano delimitato dalla retta } BC \text{ e posto al di sotto di questa)}$$

$$x + y - 2a \leq 0 \qquad \text{(semipiano delimitato dalla retta } BD \text{ e contenente l'origine } O\text{)}$$

che racchiudono l'intero sistema. Le coordinate $x = 19a/16$ $y = 7a/16$ del baricentro soddisfano tutte le precedenti diseguaglianze, per cui G appartiene all'inviluppo convesso del sistema.

Esercizio 2
Nel piano $Oxy = O\hat{e}_1\hat{e}_2$ di una terna inerziale un punto materiale P di massa $m = 2$ si muove soggetto a una resistenza viscosa di costante β. Una molla ideale di costante elastica $k = 13/25$ unisce P all'origine O. Supposti trascurabili gli attriti, determinare:

(a) le equazioni pure del moto del punto e i valori di β per i quali si hanno moti oscillatori smorzati;

(b) posizione e velocità di P all'istante $t = 2\pi$ qualora si abbia $\beta = 2/5$, $P(0) - O = 5\hat{e}_1$, $\dot{P}(0) = \hat{e}_1$.

Soluzione
(a) **Equazioni pure del moto e regime sottocritico**
Il punto è vincolato a muoversi nel piano coordinato Oxy di una terna inerziale, per cui il relativo vettore posizione assume la forma

$$P - O = x\,\hat{e}_1 + y\,\hat{e}_2\,.$$

D'altra parte, l'equazione del moto si scrive

$$2\ddot{P} + \beta\dot{P} + \frac{13}{25}(P - O) - \vec{\Phi} = 0$$

e fornisce due equazioni pure proiettando lungo le direzioni tangenti indipendenti di $\hat{e}_1$ ed $\hat{e}_2$:

$$2\ddot{x} + \beta\dot{x} + \frac{13}{25}x = 0 \qquad 2\ddot{y} + \beta\dot{y} + \frac{13}{25}y = 0 \tag{0.3}$$

La condizione perchè il regime di moto sia sottocritico, affinchè cioè tutti i moti del sistema siano oscillatori smorzati, è che assuma segno negativo il discriminante dell'equazione caratteristica

$$2\lambda^2 + \beta\lambda + \frac{13}{25} = 0$$

ossia

$$\Delta = \beta^2 - 8\,\frac{13}{25} = \beta^2 - \frac{104}{25} < 0\,.$$

Il regime sottocritico ricorre perciò se e soltanto se

$$0 < \beta < \sqrt{104}/5\,.$$

(*b*) **Posizione e velocità istantanea di** P
Per $\beta = 2/5$ le equazioni pure del moto (0.3) diventano

$$2\ddot{x} + \frac{2}{5}\dot{x} + \frac{13}{25}x = 0 \qquad 2\ddot{y} + \frac{2}{5}\dot{y} + \frac{13}{25}y = 0 \tag{0.4}$$

e ad esse corrisponde la stessa equazione caratteristica

$$2\lambda^2 + \frac{2}{5}\lambda + \frac{13}{25} = 0$$

che ammette le radici complesse coniugate

$$\lambda = \frac{1}{4}\left[-\frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} - \frac{104}{25}}\right] = \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{5} \pm 2i\right) = -\frac{1}{10} \pm \frac{i}{2}\,.$$

La soluzione generale delle equazioni (0.4) diventa perciò

$$x(t) = a_1 e^{-t/10}\cos\left(\frac{t}{2}\right) + a_2 e^{-t/10}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$y(t) = b_1 e^{-t/10}\cos\left(\frac{t}{2}\right) + b_2 e^{-t/10}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

con derivata

$$\dot{x}(t) = a_1 e^{-t/10}\left[-\frac{1}{10}\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right] + a_2 e^{-t/10}\left[-\frac{1}{10}\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$

$$\dot{y}(t) = b_1 e^{-t/10}\left[-\frac{1}{10}\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right] + b_2 e^{-t/10}\left[-\frac{1}{10}\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$

e le costanti reali arbitrarie a_1, a_2, b_1, b_2 che devono essere determinate in base alle condizioni iniziali. Nella fattispecie, le condizioni iniziali richieste sono

$$P(0) - O = 5\hat{e}_1 \qquad \dot{P}(0) = \hat{e}_1$$

ossia

$$x(0) = 5 \qquad y(0) = 0 \qquad \dot{x}(0) = 1 \qquad \dot{y}(0) = 0$$

per cui si ha ovviamente $y(t) = 0$ e

$$5 = x(0) = a_1 \qquad 1 = \dot{x}(0) = -\frac{1}{10}a_1 + \frac{1}{2}a_2$$

e quindi

$$a_1 = 5 \qquad a_2 = 3\,.$$

La soluzione diventa così $y(t) = 0$ e

$$x(t) \,=\, e^{-t/10}\left[5\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$

con $\dot{y}(t) = 0$ e

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) \,&=\, e^{-t/10}\left[-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{3}{10}\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{5}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{3}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right] \,= \\
&=\, e^{-t/10}\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{14}{5}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

All'istante $t = 2\pi$ risulta pertanto

$$P(2\pi) - O \,=\, -5\,e^{-\pi/5}\,\hat{e}_1 \qquad\qquad \dot{P}(2\pi) \,=\, -e^{-\pi/5}\,\hat{e}_1$$

Esercizio 3

Data una terna cartesiana ortogonale destra $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ di $\mathbb{E}^3$ si considera il sistema S dei vettori $\vec{v}_1 = -\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3$ e $\vec{v}_2 = 2\hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 - \hat{e}_3$, applicati nei punti $P_1(2,3,3)$ e $P_2(-1,-1,1)$ rispettivamente. Si chiede di:

(*a*) verificare che l'asse centrale di S esiste e giace nel piano di equazione $x - y/2 + z + 7/3 = 0$;

(*b*) calcolare il momento di S rispetto all'asse $x = -3\zeta + 1$, $y = 4\zeta$, $z = 2$, orientato secondo le $\zeta \in \mathbb{R}$ crescenti.

Soluzione

(*a*) **Asse centrale e suo piano di giacitura**

Il sistema di vettori applicati ha risultante non nullo

$$\vec{R} \,=\, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \,=\, -\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3 + 2\hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 - \hat{e}_3 \,=\, \hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3$$

per cui il relativo asse centrale risulta certamente definito. Il momento risultante in O del sistema è dato da:

$$\begin{aligned}
\vec{M}_O \,&=\, (P_1 - O)\wedge\vec{v}_1 + (P_2 - O)\wedge\vec{v}_2 \,= \\
&=\, (2\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3)\wedge(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3) + (-\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3)\wedge(2\hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 - \hat{e}_3) \,= \\
&=\, \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \,= \\
&=\, -6\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 5\hat{e}_3 + 4\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 5\hat{e}_3 \,=\, -2\hat{e}_2 + 10\hat{e}_3
\end{aligned}$$

per cui si ha

$$\vec{R}\wedge\vec{M}_O \,=\, \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 10 \end{vmatrix} \,=\, -20\hat{e}_1 - 6\hat{e}_2 - 4\hat{e}_3$$

ed essendo poi

$$|\vec{R}|^2 \;=\; |\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3|^2 \;=\; 1 + (-2)^2 + (-2)^2 \;=\; 9$$

l'equazione parametrica dell'asse centrale diventa

$$P - O \;=\; -\frac{20}{9}\hat{e}_1 - \frac{6}{9}\hat{e}_2 - \frac{4}{9}\hat{e}_3 + \alpha(\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3) \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}\,.$$

che, indicando separatamente le coordinate cartesiane x, y, z, equivale a

$$x \;=\; -\frac{20}{9} + \alpha \qquad y \;=\; -\frac{2}{3} - 2\alpha \qquad z \;=\; -\frac{4}{9} - 2\alpha \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{0.5}$$

Per verificare, come richiesto, che l'asse centrale giace nel piano di equazione

$$x - y/2 + z + 7/3 = 0 \tag{0.6}$$

basta sostituire le equazioni parametriche (0.5) in (0.6):

$$\Big(-\frac{20}{9} + \alpha\Big) - \frac{1}{2}\Big(-\frac{2}{3} - 2\alpha\Big) + \Big(-\frac{4}{9} - 2\alpha\Big) + \frac{7}{3} \;=\; 0$$

e constatare che quest'ultima è identicamente soddisfatta per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$-\frac{20}{9} + \frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{7}{3} + \Big(1 + 1 - 2\Big)\alpha \;=\; 0 \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}\,.$$

(*b*) **Momento assiale**
Si sceglie un punto Q dell'asse fissando a piacere il valore del parametro, per esempio $\zeta = 0$:

$$Q - O \;=\; \hat{e}_1 + 2\hat{e}_3\,.$$

I punti di applicazione dei vettori $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ rispetto a Q diventano perciò:

$$\begin{aligned} P_1 - Q \;&=\; 2\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3 - (\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3) \;=\; \hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + \hat{e}_3 \\ P_2 - Q \;&=\; -\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3 - (\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3) \;=\; -2\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - \hat{e}_3 \end{aligned}$$

e consentono di calcolare il momento risultante in Q del sistema come

$$\begin{aligned} \vec{M}_Q \;&=\; (P_1 - Q) \wedge \vec{v}_1 + (P_2 - Q) \wedge \vec{v}_2 \;= \\ &=\; \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \;= \\ &=\; -4\hat{e}_1 + 4\hat{e}_3 - 2\hat{e}_1 - 4\hat{e}_2 + 8\hat{e}_3 \;=\; -6\hat{e}_1 - 4\hat{e}_2 + 12\hat{e}_3\,. \end{aligned}$$

D'altra parte, il versore associato all'asse $x = -3\zeta + 1$, $y = 4\zeta$, $z = 2$, orientato secondo le $\zeta \in \mathbb{R}$ crescenti, vale

$$\hat{n} \,=\, \frac{-3\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2}{|-3\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2|} \,=\, \frac{-3\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2}{5} \,=\, -\frac{3}{5}\hat{e}_1 + \frac{4}{5}\hat{e}_2$$

per cui il momento assiale cercato risulta

$$M_{Q\hat{n}} \,=\, \vec{M}_Q \cdot \hat{n} \,=\, (-6\hat{e}_1 - 4\hat{e}_2 + 12\hat{e}_3) \cdot \Big(-\frac{3}{5}\hat{e}_1 + \frac{4}{5}\hat{e}_2\Big) \,=\, \frac{18}{5} - \frac{16}{5} \,=\, \frac{2}{5}\,.$$

Esercizio 4
In una terna inerziale $Oxyz$, con asse verticale Oy diretto verso l'alto, un punto materiale pesante P di massa m scorre senza attrito lungo la curva di equazione $\varphi(\xi) = \xi^2\hat{e}_1 + (\xi^3/3 - 3\xi^2/2 + 2\xi)\hat{e}_2$, $\xi \in \mathbb{R}$.

(*a*) Scrivere le equazioni pure del moto del sistema.

(*b*) Determinare i vettori posizione in $Oxyz$ dei punti di equilibrio del sistema.

Soluzione
(*a*) **Equazioni pure del moto**
Il punto materiale P ha massa m ed è vincolato a scorrere senza attrito lungo la curva di equazione parametrica

$$P(\xi) - O \,=\, \xi^2\hat{e}_1 + \Big(\frac{\xi^3}{3} - \frac{3}{2}\xi^2 + 2\xi\Big)\hat{e}_2\,, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

che è chiaramente C^∞ in $\mathbb{R}$ ed ivi ammette le derivate prima e seconda:

$$P'(\xi) \,=\, 2\xi\,\hat{e}_1 + \big(\xi^2 - 3\xi + 2\big)\hat{e}_2 \qquad P''(\xi) \,=\, 2\,\hat{e}_1 + (2\xi - 3)\hat{e}_2\,.$$

È evidente che la curva risulta regolare, in quanto $P'(\xi) \neq 0\ \forall\,\xi \in \mathbb{R}$. Oltre che alla reazione vincolare $\vec{\Phi}$, ortogonale al vincolo, il punto P è soggetto unicamente al proprio peso $m\vec{g} = -mg\,\hat{e}_2$, per cui il postulato delle reazioni vincolari porge

$$m\ddot{P} \,=\, -mg\,\hat{e}_2 + \vec{\Phi}$$

e una proiezione lungo la direzione tangente conduce all'equazione pura del moto richiesta:

$$m\ddot{P} \cdot P'(\xi) \,=\, -mg\,\hat{e}_2 \cdot P'(\xi)\,. \tag{0.7}$$

Osservato che

$$\ddot{P} \,=\, \frac{d}{dt}[P'(\xi)\,\dot{\xi}] \,=\, P'(\xi)\ddot{\xi} + P''(\xi)\dot{\xi}^2,$$

l'equazione (0.7) assume la forma equivalente

$$m|P'(\xi)|^2\ddot{\xi} + mP''(\xi) \cdot P'(\xi)\dot{\xi}^2 \,=\, -mg\,\hat{e}_2 \cdot P'(\xi)$$

nella quale risulta

$$|P'(\xi)|^2 \;=\; |2\xi\,\hat{e}_1 + \big(\xi^2 - 3\xi + 2\big)\hat{e}_2|^2 \;=\; 4\xi^2 + \big(\xi^2 - 3\xi + 2\big)^2$$

e

$$P''(\xi)\cdot P'(\xi) \;=\; 4\xi + \big(\xi^2 - 3\xi + 2\big)(2\xi - 3)$$

mentre

$$\hat{e}_2\cdot P'(\xi) \;=\; \xi^2 - 3\xi + 2$$

per cui si ottiene

$$[4\xi^2 + \big(\xi^2 - 3\xi + 2\big)^2]\ddot{\xi} + [4\xi + \big(\xi^2 - 3\xi + 2\big)(2\xi - 3)]\dot{\xi}^2 \;=\; -g(\xi^2 - 3\xi + 2) \qquad (0.8)$$

in cui il fattore comune m è stato omesso.

(b) **Posizioni di equilibrio**
Poichè il punto materiale è vincolato ad una curva *fissa* e liscia, le posizioni di equilibrio sono individuate tutte e soltanto dalle soluzioni statiche $\xi(t) = \xi_0$, costante, dell'equazione pura (0.8). Si ottiene così l'equazione di equilibrio

$$0 \;=\; -g(\xi_0^2 - 3\xi_0 + 2)$$

ossia l'equazione di secondo grado

$$\xi_0^2 - 3\xi_0 + 2 \;=\; 0$$

che ammette le radici reali

$$\xi_0 \;=\; \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \;=\; \frac{3 \pm 1}{2} \;=\; 1,\, 2\,.$$

Rispetto alla terna $Oxyz$ assegnata, le posizioni di equilibrio sono dunque individuate dai vettori posizione

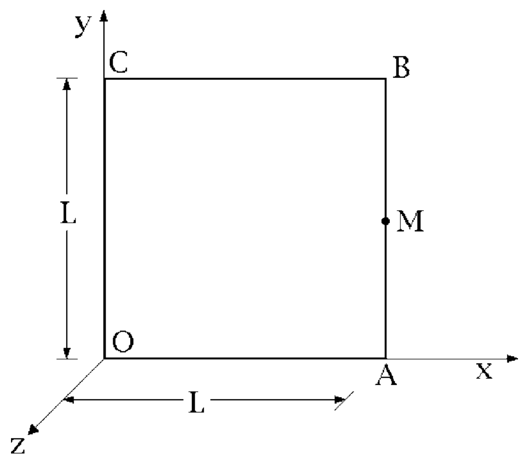
$$P(1) - O \;=\; 1^2\hat{e}_1 + \Big(\frac{1^3}{3} - \frac{3}{2}1^2 + 2\Big)\hat{e}_2 \;=\; \hat{e}_1 + \frac{5}{6}\hat{e}_2$$

$$P(2) - O \;=\; 2^2\hat{e}_1 + \Big(\frac{2^3}{3} - \frac{3}{2}2^2 + 4\Big)\hat{e}_2 \;=\; 4\hat{e}_1 + \frac{2}{3}\hat{e}_2\,.$$

Esercizio 5
Una lamina quadrata $OABC$, di lato L, è posta nel piano Oxy di una terna $Oxyz$ (vedi figura). La sua densità è espressa da

$$\sigma(x,y) \;=\; \frac{\mu}{L^3}(x+y) \qquad \forall\,(x,y)\in[0,L]^2$$

dove $\mu > 0$ è una costante con le dimensioni di una massa.



Determinare della lamina:

(a) la matrice d'inerzia in $Oxyz$ e una terna principale d'inerzia in O;

(b) il momento d'inerzia rispetto all'asse OM, dove M è il punto medio del lato AB;

(c) il momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta AB.

Soluzione

(a) **Matrice d'inerzia in $Oxyz$ e terna principale d'inerzia in O**

Matrice d'inerzia relativa a Oxyz

La lamina è ubicata nel piano coordinato Oxy della terna $Oxyz$, per cui la relativa matrice d'inerzia deve assumere la forma generale

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}+L_{yy} \end{pmatrix}$$

in cui figurano soltanto i momenti d'inerzia rispetto agli assi coordinati Ox, Oy e il prodotto d'inerzia corrispondente alle coordinate x e y. Il momento d'inerzia rispetto a Ox si calcola facilmente per integrazione diretta:

$$L_{xx} = \int_0^L dx \int_0^L dy\, y^2 \,\frac{\mu}{L^3}(x+y) = \frac{\mu}{L^3}\int_0^L dx \int_0^L dy\,(xy^2+y^3) =$$

$$= \frac{\mu}{L^3}\int_0^L dx\Big(x\frac{L^3}{3}+\frac{L^4}{4}\Big) = \frac{\mu}{L^3}\Big(\frac{L^2}{2}\frac{L^3}{3}+\frac{L^4}{4}L\Big) = \frac{5}{12}\mu L^2 .$$

Lo stesso risultato si ottiene per il momento d'inerzia relativo all'asse Oy

$$L_{yy} = \int_0^L dx \int_0^L dy\, x^2 \,\frac{\mu}{L^3}(x+y) = \int_0^L dy \int_0^L dx\, y^2 \,\frac{\mu}{L^3}(y+x) = L_{xx} = \frac{5}{12}\mu L^2$$

scambiando le variabili di integrazione x, y e usando l'invarianza della densità $\sigma(x, y)$ rispetto a tale trasformazione. Non rimane che determinare il prodotto d'inerzia residuo, per il quale si ha

$$
\begin{aligned}
L_{xy} &= -\int_0^L dx \int_0^L dy\, xy\, \frac{\mu}{L^3}(x+y) = -\frac{\mu}{L^3}\int_0^L dx \int_0^L dy\,(x^2 y + xy^2) = \\
&= -\frac{\mu}{L^3}\int_0^L dx\Big(x^2\frac{L^2}{2} + x\frac{L^3}{3}\Big) = -\frac{\mu}{L^3}\Big(\frac{L^3}{3}\frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{2}\frac{L^3}{3}\Big) = -\frac{1}{3}\mu L^2.
\end{aligned}
$$

La matrice d'inerzia cercata risulta pertanto

$$
[L_O] = \mu L^2 \begin{pmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}. \tag{0.9}
$$

Terna principale d'inerzia in O

Si osservi che la retta $z = 0$, $y = x$, è un asse di simmetria della lamina, in quanto nei punti simmetrici $(x, y) \in [0, L]^2$ e $(y, x) \in [0, L]^2$ la densità areale risulta la stessa:

$$
\sigma(x, y) = \frac{\mu}{L^3}(x+y) = \frac{\mu}{L^3}(y+x) = \sigma(y, x) \qquad \forall\,(x, y) \in [0, L]^2.
$$

Lo stesso asse costituisce perciò un asse principale d'inerzia in O del sistema. Un ovvio piano di simmetria è quello di giacitura Oxy, per cui Oz rappresenta un secondo asse principale d'inerzia in $O \in Oxy$ del sistema. Il terzo asse principale d'inerzia deve risultare passante per O e ortogonale ai precedenti, per cui è immediato identificarlo con la retta di equazione $z = 0$, $y = -x$. *La terna principale d'inerzia in O è così completamente individuata facendo uso di pure considerazioni di simmetria.* Allo stesso risultato si perviene risolvendo il problema agli autovalori. Conviene eseguire il calcolo in forma adimensionale, ignorando il comune fattore positivo μL^2 nella matrice (0.9) e considerando così l'equazione caratteristica

$$
\det \begin{pmatrix} 5/12 - \lambda & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 5/12 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 - \lambda \end{pmatrix} = 0
$$

che si riesprime immediatamente nella forma

$$
\Big(\frac{5}{6} - \lambda\Big)\Big(\frac{25}{144} + \lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda - \frac{1}{9}\Big) = 0
$$

ovvero

$$
\Big(\frac{5}{6} - \lambda\Big)\Big(\lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda + \frac{9}{144}\Big) = 0\,.
$$

Ne seguono le radici

$$
\lambda = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - \frac{9}{36}}\right] = \frac{1}{2}\Big(\frac{5}{6} \pm \frac{4}{6}\Big) = \frac{1}{12}\,,\ \frac{3}{4}
$$

e $\lambda = 5/6$, che costituiscono gli autovalori della matrice. I momenti principali d'inerzia in O della lamina sono quindi dati da

$$A_1 = \frac{1}{12}\mu L^2 \qquad A_2 = \frac{3}{4}\mu L^2 \qquad A_3 = \frac{5}{6}\mu L^2 .$$

Per $\lambda = 1/12$ il problema agli autovalori diventa

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{12} - \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{12} - \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} - \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0$$

e porge il sistema di equazioni algebriche lineare ed omogeneo

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_2 = 0 \\ -\frac{1}{3}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 = 0 \\ \frac{3}{4}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

equivalente alle due sole equazioni

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_2 \\ \xi_3 = 0 . \end{cases}$$

Una soluzione non banale è data da $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 0$, per cui un autovettore ortonormale si scrive

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_2$$

e individua il relativo asse principale d'inerzia come la retta bisettrice del primo quadrante nel piano coordinato Oxy.

Per $\lambda = 3/4$ si ottiene il problema agli autovalori

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{12} - \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{12} - \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} - \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0$$

e porge il sistema di equazioni algebriche lineare ed omogeneo

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_2 = 0 \\ -\frac{1}{3}\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_2 = 0 \\ \frac{1}{12}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

equivalente alle due sole equazioni

$$\begin{cases} \xi_1 \,=\, -\xi_2 \\ \xi_3 \,=\, 0\,. \end{cases}$$

Una soluzione non banale è data da $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -1$, $\xi_3 = 0$, per cui un autovettore ortonormale si scrive

$$\vec{v}_2 \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_2$$

e individua il relativo asse principale d'inerzia come la retta bisettrice del secondo quadrante nel piano coordinato Oxy.

Per $\lambda = 5/6$ si ha infine il problema agli autovalori

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{12} - \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{12} - \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} - \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0$$

dal quale si deduce il sistema equivalente di equazioni lineari omogenee

$$\xi_1 \,=\, 0 \qquad \xi_2 \,=\, 0\,.$$

Una soluzione non banale risulta

$$\xi_1 \,=\, 0 \qquad \xi_2 \,=\, 0 \qquad \xi_3 \,=\, 1$$

e corrisponde all'autovettore

$$\vec{v}_3 \,=\, \hat{e}_3$$

che individua l'asse Oz come terzo asse principale d'inerzia in O.

(b) **Momento d'inerzia rispetto all'asse OM**
Il punto medio M del segmento AB è individuato dal vettore posizione

$$M - O \,=\, A - O \,+\, M - A \,=\, L\hat{e}_1 + \frac{L}{2}\hat{e}_2$$

cui si associa il versore direttore

$$\hat{n} \,=\, \frac{M-O}{|M-O|} \,=\, \frac{L\hat{e}_1 + \frac{L}{2}\hat{e}_2}{L\sqrt{1+\frac{1}{4}}} \,=\, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big(\hat{e}_1 + \frac{1}{2}\hat{e}_2\Big) \,=\, \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{e}_2\,.$$

Il momento d'inerzia relativo all'asse $OM = O\hat{n}$ diventa pertanto

$$
\begin{aligned}
I_{O\hat{n}} &= \Big(\frac{2}{\sqrt{5}}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\ 0\Big)\mu L^2 \begin{pmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{5}\mu L^2 (2\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{5}\mu L^2 \Big(\frac{5}{6} - \frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3} + \frac{5}{12} \quad 0\Big) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\mu L^2 \Big(1 - \frac{2}{3} + \frac{5}{12}\Big) = \frac{3}{20}\mu L^2.
\end{aligned}
$$

(c) **Momento d'inerzia rispetto all'asse AB**
Per calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse AB conviene ricorrere al teorema di Huygens-Steiner. A questo scopo occorre determinare, in primo luogo, la massa della lamina

$$
m = \int_0^L dx \int_0^L dy\, \frac{\mu}{L^3}(x+y) = \int_0^L dx\, \frac{\mu}{L^3}\Big(xL + \frac{L^2}{2}\Big) = \frac{\mu}{L^3}\Big(\frac{L^2}{2}L + \frac{L^2}{2}L\Big) = \mu\,.
$$

Il baricentro del sistema deve invece determinarsi nella forma

$$
G - O = x_G \hat{e}_1 + x_G \hat{e}_2
$$

perchè la retta $y = x$, $z = 0$, è un asse di simmetria della superficie materiale, con

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{m}\int_{[0,L]^2} x\,\sigma(x,y)\,dxdy = \frac{1}{\mu}\int_0^L dx \int_0^L dy\, x\, \frac{\mu}{L^3}(x+y) = \frac{1}{L^3}\int_0^L dx \int_0^L dy (x^2 + xy) = \\
&= \frac{1}{L^3}\int_0^L dx \Big(x^2 L + x\frac{L^2}{2}\Big) = \frac{1}{L^3}\Big(\frac{L^3}{3}L + \frac{L^2}{2}\frac{L^2}{2}\Big) = \frac{7}{12}L\,.
\end{aligned}
$$

Di conseguenza, il vettore posizione del baricentro diventa

$$
G - O = \frac{7}{12}L\hat{e}_1 + \frac{7}{12}L\hat{e}_2\,.
$$

Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse parallelo a Oy e passante per il baricentro G si ottiene applicando il teorema di Huygens-Steiner

$$
I_{Gy} = I_{Oy} - m x_G^2 = L_{yy} - \mu x_G^2 = \frac{5}{12}\mu L^2 - \mu\frac{49}{144}L^2 = \frac{11}{144}\mu L^2\,.
$$

Lo stesso teorema permette poi di ricavare il momento d'inerzia relativo all'asse AB, parallelo a Oy ma non baricentrale,

$$
I_{AB} = I_{Gy} + m(L - x_G)^2 = \frac{11}{144}\mu L^2 + \frac{25}{144}\mu L^2 = \frac{1}{4}\mu L^2.
$$