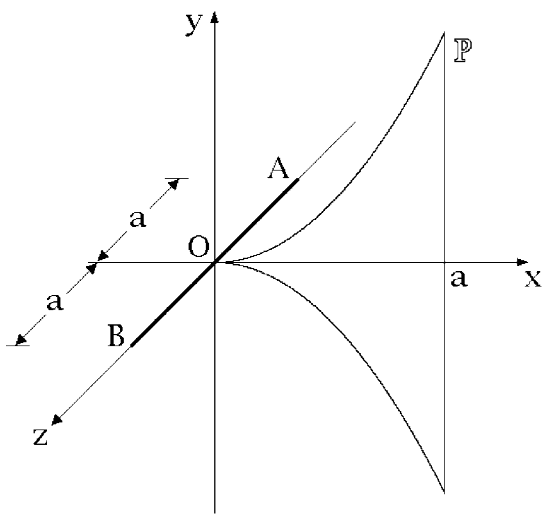
Prova in itinere di meccanica razionale 1 M-Z del 29.10.2008

Esercizio 1

Nel piano Oxy di una terna $Oxyz$ la regione delimitata dalle curve $y = x^2/a$, $y = -x^2/a$, $x = a$ è occupata da una piastra $\mathbb{P}$ di densità:

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{a^4} x|y|\,,$$

dove μ è una costante con le dimensioni di una massa. Lungo il segmento $-a \leq z \leq a$ dell'asse Oz è inoltre collocata una sbarra AB di densità $\lambda(z) = \mu(z + a)/a^2$.



Si chiede di determinare:

(a) la massa del sistema;

(b) i baricentri di piastra e asta;

(c) il baricentro del sistema.

Soluzione

(a) **Massa del sistema**

Per determinare la massa del sistema occorre calcolare le masse della piastra e della sbarra e quindi sommarle.

Massa della piastra

La massa della piastra si ricava integrando la densità $\sigma(x, y)$ sulla regione delimitata dalle curve $y = x^2/a$, $y = -x^2/a$ e $x = a$. Si ha così:

$$m_{\mathbb{P}} = \int_0^a dx \int_{-x^2/a}^{x^2/a} dy\, \frac{\mu}{a^4} x|y| = \frac{\mu}{a^4} \int_0^a dx\, x \int_{-x^2/a}^{x^2/a} dy\, |y| = \frac{\mu}{a^4} \int_0^a dx\, x\, 2 \int_0^{x^2/a} dy\, y =$$

$$= \frac{2\mu}{a^4}\int_0^a dx\, x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{x^2/a} = \frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx\, x\, \frac{x^4}{a^2} = \frac{\mu}{a^6}\int_0^a x^5 dx = \frac{\mu}{a^6}\,\frac{a^6}{6} = \frac{\mu}{6}\,.$$

Massa della sbarra
La massa della sbarra è data dall'integrale curvilineo:

$$m_{AB} = \int_{-a}^{a} dz\, \frac{\mu}{a^2}(z+a) = \frac{\mu}{a^2}\left[\frac{(z+a)^2}{2}\right]_{-a}^{a} = \frac{\mu}{a^2}\,\frac{1}{2}\,4a^2 = 2\mu\,.$$

Massa del sistema
La somma delle masse parziali calcolate conduce alla massa del sistema:

$$m = m_{\mathbb{P}} + m_{AB} = \frac{\mu}{6} + 2\mu = \frac{13}{6}\mu\,.$$

(b) **Baricentri di piastra e sbarra**
Baricentro della piastra
Il baricentro $G_{\mathbb{P}}$ della piastra deve appartenere al piano di giacitura Oxy di questa. Vale inoltre:

$$\sigma(x,y) = \frac{\mu}{a^4}x|y| = \frac{\mu}{a^4}x|-y| = \sigma(x,-y) \qquad \forall\,(x,y)\in\mathbb{P}\,,$$

per cui l'asse Ox è un asse di simmetria di $\mathbb{P}$ e il baricentro deve essere individuato da un vettore posizione della forma:

$$G_{\mathbb{P}} - O = x_{\mathbb{P}}\,\hat{e}_1\,.$$

L'ascissa del baricentro viene calcolata secondo la definizione

$$x_{\mathbb{P}} = \frac{1}{m_{\mathbb{P}}}\int_{\mathbb{P}} x\,\sigma\,dxdy = \frac{6}{\mu}\int_0^a dx \int_{-x^2/a}^{x^2/a} dy\, x\,\frac{\mu}{a^4}x|y| = \frac{6}{a^4}\int_0^a dx\, x^2 2\int_0^{x^2/a} dy\, y =$$

$$= \frac{6}{a^4}\int_0^a dx\, x^2\, 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2/a} = \frac{6}{a^4}\int_0^a x^2\frac{x^4}{a^2}\,dx = \frac{6}{a^6}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^a = \frac{6}{7}a$$

in modo che risulta

$$G_{\mathbb{P}} - O = \frac{6}{7}a\,\hat{e}_1\,.$$

Baricentro della sbarra
Per il teorema dell'inviluppo convesso, il baricentro G_{AB} della sbarra deve collocarsi lungo il segmento $-a \le z \le a$ dell'asse Oz:

$$G_{AB} - O = z_{AB}\,\hat{e}_3\,.$$

La coordinata z del baricentro si ottiene dall'espressione

$$z_{AB} = \frac{1}{m_{AB}} \int_{AB} z\,\lambda\,dz = \frac{1}{2\mu} \int_{-a}^{a} z\,\frac{\mu}{a^2}(z+a)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^{a} (z^2 + az)\,dz = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{z^3}{3} + a\frac{z^2}{2} \right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2a^2}\frac{2}{3}a^3 = \frac{1}{3}a$$

e quindi:

$$G_{AB} - O = \frac{1}{3} a\,\hat{e}_3 \,.$$

(c) **Baricentro del sistema**

Noti che siano le masse e i baricentri di piastra e sbarra, è facile determinare il baricentro G del sistema per mezzo del teorema distributivo:

$$G - O = \frac{m_{\mathbb{P}}(G_{\mathbb{P}} - O) + m_{AB}(G_{AB} - O)}{m} =$$

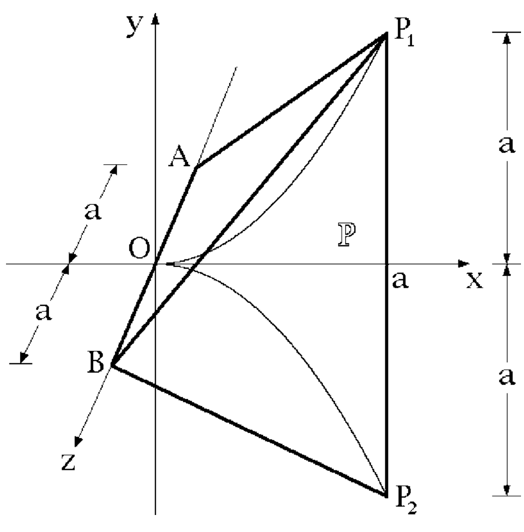
$$= \frac{6}{13\mu}\Big(\frac{\mu}{6}\,\frac{6}{7}a\,\hat{e}_1 + 2\mu\,\frac{1}{3}a\,\hat{e}_3\Big) = \frac{6}{13}\Big(\frac{1}{7}a\,\hat{e}_1 + \frac{2}{3}a\,\hat{e}_3\Big) = \frac{6}{91}a\,\hat{e}_1 + \frac{4}{13}a\,\hat{e}_3 \,.$$

Osservazione. Inviluppo convesso del sistema

È facile convincersi che l'inviluppo convesso del sistema è il tetraedro chiuso di vertici:

$$A(0,0,-a) \qquad B(0,0,a) \qquad P_1(a,a,0) \qquad P_2(a,-a,0)\,.$$

evidenziato con i segmenti in grassetto nella figura seguente:



Basta osservare preliminarmente che i quattro punti A, B, P_1 e P_2 sono tutti punti del sistema e quindi devono essere contenuti nell'inviluppo convesso del sistema. D'altra parte, il semispazio chiuso contenente P_2 che ha come frontiera il piano condotto per ABP_1 include completamente il sistema. Lo stesso accade per:

- il semispazio chiuso contenente P_1 e avente come frontiera il piano condotto per ABP_2;
- il semispazio chiuso contenente A e che ha il piano condotto per BP_1P_2 come frontiera;
- il semispazio chiuso contenente B e la cui frontiera è il piano condotto per AP_1P_2.

L'intersezione di questi quattro semispazi chiusi è precisamente il tetraedro ABP_1P_2, come affermato. Il baricentro G appartiene al tetraedro. Per provarlo si può verificare che il vettore posizione $G-O$ è esprimibile come combinazione lineare convessa dei vettori $A-O$, $B-O$, P_1-O e P_2-O, ossia nella forma

$$G-O = w_1(A-O)+w_2(B-O)+w_3(P_1-O)+w_4(P_2-O)$$

con i coefficienti w_i tutti non negativi e di somma unitaria:

$$w_i \geq 0 \qquad \forall\, i=1,2,3,4 \quad , \qquad \sum_{i=1}^{4} w_i = 1\,.$$

I coefficienti devono infatti soddisfare l'equazione vettoriale

$$w_1(-a\,\hat{e}_3)+w_2(+a\,\hat{e}_3)+w_3(a\,\hat{e}_1+a\,\hat{e}_2)+w_4(a\,\hat{e}_1-a\,\hat{e}_2) = \frac{6}{91}a\,\hat{e}_1+\frac{4}{13}a\,\hat{e}_3$$

che unitamente alla condizione sulla loro somma conduce al sistema lineare non omogeneo di quattro equazioni in quattro variabili

$$\begin{cases} w_3+w_4 = \dfrac{6}{91} \\ w_3-w_4 = 0 \\ -w_1+w_2 = \dfrac{4}{13} \\ w_1+w_2+w_3+w_4 = 1\,. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ottiene immediatamente:

$$w_3 = w_4 = \frac{1}{2}\frac{6}{91} = \frac{3}{91}\,,$$

in modo che le ultime due si riducono a

$$\begin{cases} -w_1+w_2 = \dfrac{4}{13} \\ w_1+w_2 = 1-\dfrac{6}{91} = \dfrac{85}{91} \end{cases}$$

e porgono infine:

$$w_1 = \frac{1}{2}\Big(\frac{85}{91}-\frac{4}{13}\Big) = \frac{57}{182} \quad , \qquad w_2 = \frac{1}{2}\Big(\frac{85}{91}+\frac{4}{13}\Big) = \frac{113}{182}\,.$$

I coefficienti calcolati sono tutti positivi e hanno somma 1, come è immediato verificare. La prova è completa.

Esercizio 2
Un punto materiale P di massa unitaria è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse orizzontale $Ox = O\hat{e}_1$ di una terna inerziale, soggetto a una resistenza viscosa con costante di frizione 2. Una molla di costante elastica k collega P all'origine O. Determinare:

(a) le equazioni pure del moto del punto e i valori di k per i quali si hanno moti oscillatori smorzati;

(b) posizione e velocità di P all'istante $t = \pi/2$ qualora si abbia $k = 5$ e $P(0) - O = 3\hat{e}_1$, $\dot{P}(0) = -2\hat{e}_1$ all'istante $t = 0$.

Soluzione
(a) **Equazioni pure del moto e regime sottocritico**
L'equazione pura del moto, ottenuta proiettando la seconda legge della dinamica lungo l'asse liscio Ox, è una equazione differenziale lineare e omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

e con la sostituzione $m = 1$, $\beta = 2$ si riduce a

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + kx = 0\,. \tag{0.1}$$

L'equazione caratteristica associata a (0.1) si scrive

$$\lambda^2 + 2\lambda + k = 0$$

ed ammette radici complesse coniugate (con parte reale negativa), corrispondenti al regime sottocritico od oscillatorio smorzato del sistema, se e soltanto se il discriminante dell'equazione risulta di segno negativo:

$$\Delta = 4 - 4k < 0$$

ossia per $k > 1$.

(b) **Posizione e velocità istantanea di P all'istante $t = \pi/2$**
Per $k = 5$ l'equazione caratteristica del sistema assume la forma

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

ed ammette le radici

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

cui corrisponde la soluzione generale

$$x(t) = c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{0.2}$$

nella quale le costanti reali arbitrarie c_1 e c_2 vanno determinate imponendo le condizioni iniziali assegnate. Nella fattispecie, all'istante $t = 0$ deve aversi:

$$x(0) \,=\, 3 \qquad\qquad \dot{x}(0) \,=\, -2\,.$$

La derivata di (0.2) risulta

$$\dot{x}(t) \,=\, c_1 e^{-t}[-\cos(2t) - 2\sin(2t)] + c_2 e^{-t}[-\sin(2t) + 2\cos(2t)] \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

per cui le condizioni iniziali richiedono che si abbia

$$3 \,=\, x(0) \,=\, c_1 \qquad\qquad -2 \,=\, \dot{x}(0) \,=\, -c_1 + 2c_2$$

e le costanti risultano perciò

$$c_1 \,=\, 3 \qquad\qquad c_2 \,=\, \frac{1}{2}\,.$$

Si perviene così alla soluzione del problema di Cauchy proposto:

$$x(t) \,=\, \left[3\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right] e^{-t} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

cui corrisponde la funzione derivata prima

$$\dot{x}(t) \,=\, 3e^{-t}[-\cos(2t) - 2\sin(2t)] + \frac{1}{2}e^{-t}[-\sin(2t) + 2\cos(2t)] \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Per $t = \pi/2$ si ha ovviamente

$$x(\pi/2) \,=\, -3\,e^{-\pi/2} \qquad\qquad \dot{x}(\pi/2) \,=\, 2\,e^{-\pi/2}$$

e la posizione e velocità di P sono pertanto:

$$P(\pi/2) - O \,=\, -3\,e^{-\pi/2}\,\hat{e}_1 \qquad\qquad \dot{P}(\pi/2) \,=\, 2\,e^{-\pi/2}\,\hat{e}_1\,.$$

Esercizio 3

In una terna cartesiana ortogonale destra $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ di $\mathbb{E}^3$ si considera il sistema S dei vettori $\vec{v}_1 = -\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2$, $\vec{v}_2 = 2\hat{e}_1 - 3\hat{e}_3$, $\vec{v}_3 = -\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3$, applicati rispettivamente nei punti $P_1(1,2,0)$, $P_2(-1,0,1)$ e $P_3(-2,1,2)$. Determinare di S:

(*a*) l'equazione parametrica dell'asse centrale, se definito;

(*b*) il momento rispetto all'asse a di equazione $x = 3\tau + 1$, $y = 4\tau$, $z = 0$, orientato secondo le $\tau \in \mathbb{R}$ crescenti.

Soluzione
(a) **Asse centrale**
L'esistenza dell'asse centrale è assicurata dal fatto che il risultante del sistema di vettori applicati è non nullo:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} \vec{v}_i = (-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) + (2\hat{e}_1 - 3\hat{e}_3) + (-\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3) = 3\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3 \neq 0\,.$$

Il momento risultante del sistema rispetto all'origine O si scrive invece

$$\begin{aligned}
\vec{M}_O &= \sum_{i=1}^{3} (P_i - O) \wedge \vec{v}_i = \\
&= (\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2) \wedge (-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) + \\
&+ (-\hat{e}_1 + \hat{e}_3) \wedge (2\,\hat{e}_1 - 3\,\hat{e}_3) + \\
&+ (-2\,\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3) \wedge (-\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3) = \\
&= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= 4\,\hat{e}_3 + (-\hat{e}_2) + (-\hat{e}_1 - \hat{e}_3) = -\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3
\end{aligned}$$

per cui si ottiene

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_O = (3\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3) \wedge (-\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7\,\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3\,.$$

L'equazione parametrica dell'asse centrale è quindi data da

$$P - O = \frac{1}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \wedge \vec{M}_O + \alpha \vec{R} = \frac{7\,\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3}{13} + \alpha(3\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3) \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}$$

e separando le relative componenti scalari diventa:

$$x = \frac{7}{13} \qquad y = \frac{2}{13} + 3\alpha \qquad z = \frac{3}{13} - 2\alpha \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{0.3}$$

Verifica del risultato
Come verifica del risultato ottenuto andiamo a calcolare il momento risultante di S rispetto ad un punto assegnato dell'asse centrale. Un punto cosiffatto si determina fissando un valore particolare di α nell'equazione parametrica (0.3), ad esempio $\alpha = 0$. Si ottiene così il punto B di vettore posizione:

$$B - O = \frac{7\,\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3}{13}$$

rispetto al quale il momento risultante del sistema vale:

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_B &= \vec{M}_O + (O-B)\wedge\vec{R} = \vec{M}_O + \vec{R}\wedge(B-O) = \\
&= -\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3 + (3\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3)\wedge\frac{7\,\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3}{13} = \\
&= -\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3 + \frac{1}{13}\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \\
&= -\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3 + \frac{13\,\hat{e}_1 - 14\,\hat{e}_2 - 21\,\hat{e}_3}{13} = -\frac{27}{13}\,\hat{e}_2 + \frac{18}{13}\,\hat{e}_3 = -\frac{9}{13}(3\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3)
\end{aligned}
$$

ed è chiaramente parallelo al risultante $\vec{R} = 3\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3$ del sistema di vettori applicati.

(b) **Momento assiale**
Il momento assiale di S va calcolato rispetto alla retta a di parametrizzazione

$$x = 3\tau + 1 \qquad y = 4\tau \qquad z = 0 \qquad \forall\,\tau\in\mathbb{R},$$

orientata nel senso delle τ crescenti. Un punto $A \in a$ si ricava facilmente ponendo $\tau = 0$:

$$A - O = \hat{e}_1 .$$

Rispetto a questo punto il momento risultante del sistema si calcola convenientemente con il teorema di cambiamento del polo, essendo già noto $\vec{M}_O$:

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_A &= \vec{M}_O + (O-A)\wedge\vec{R} = \vec{M}_O + \vec{R}\wedge(A-O) = \\
&= -\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3 + (3\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3)\wedge\hat{e}_1 = \\
&= -\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3 + (-3\,\hat{e}_3 - 2\,\hat{e}_2) = -\hat{e}_1 - 3\,\hat{e}_2 .
\end{aligned}
$$

Il versore direttore della retta orientata a è poi dato dalla derivata della parametrizzazione rispetto al parametro τ, debitamente normalizzata:

$$\hat{n} = \frac{3\,\hat{e}_1 + 4\,\hat{e}_2}{|3\,\hat{e}_1 + 4\,\hat{e}_2|} = \frac{3\,\hat{e}_1 + 4\,\hat{e}_2}{5} = \frac{3}{5}\,\hat{e}_1 + \frac{4}{5}\,\hat{e}_2 .$$

Ne deriva che il momento assiale di S rispetto ad a vale, per definizione,

$$I_a = \vec{M}_A\cdot\hat{n} = (-\hat{e}_1 - 3\,\hat{e}_2)\cdot\Big(\frac{3}{5}\,\hat{e}_1 + \frac{4}{5}\,\hat{e}_2\Big) = -\frac{3}{5} - \frac{12}{5} = -3 .$$

Esercizio 4
Una terna inerziale $Oxyz$ ha l'asse verticale Oy diretto verso l'alto. Un punto materiale pesante P di massa m scorre nel piano Oxy lungo la curva di equazione $y = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Determinare del sistema:

(a) le equazioni pure del moto, nell'ipotesi che la curva sia liscia;

(b) gli equilibri, sempre nell'ipotesi di curva liscia;

(c) gli equilibri qualora la curva avesse coefficiente di attrito radente statico $\mu_s = 0.2$.

Soluzione
(a) **Equazioni pure del moto nel caso di curva liscia**
La curva vincolare è individuata dalla parametrizzazione regolare

$$P(x) - O \;=\; x\,\hat{e}_1 + (x^3 - 3x^2)\,\hat{e}_2 \quad , \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

con le derivate prima e seconda:

$$P'(x) \;=\; \hat{e}_1 + (3x^2 - 6x)\,\hat{e}_2 \qquad\qquad P''(x) \;=\; 6(x-1)\,\hat{e}_2\,. \tag{0.4}$$

Lungo un generico moto possibile del sistema, descritto da una appropriata funzione $x(t)$ di classe C^2 in un intervallo di t, la velocità e l'accelerazione istantanea del punto assumono la forma

$$\dot{P} \;=\; P'(x)\,\dot{x}$$
$$\ddot{P} \;=\; P'(x)\,\ddot{x} + P''(x)\,\dot{x}^2$$

in modo che l'equazione del moto diventa:

$$m\ddot{P} \;=\; -mg\,\hat{e}_2 + \vec{\Phi}\,, \tag{0.5}$$

in termini della reazione vincolare $\vec{\Phi}$ esercitata dalla curva vincolare sul punto P. L'equazione pura del moto si determina proiettando la (0.5), in ogni suo punto, lungo la direzione tangente $P'(x)$. Si ha così, grazie all'ipotesi di curva liscia,

$$m\ddot{P}\cdot P'(x) \;=\; -mg\,\hat{e}_2 \cdot P'(x)$$

e quindi

$$m[P'(x)]^2\ddot{x} + mP'(x)\cdot P''(x)\dot{x}^2 \;=\; -mg\,\hat{e}_2 \cdot P'(x)\,.$$

Basta poi sostituire le espressioni (0.4) per ottenere:

$$m[1 + 9x^2(x-2)^2] + m3x(x-2)\,6(x-1)\,\dot{x}^2 \;=\; -mg3x(x-2)$$

ossia

$$m[1 + 9x^2(x-2)^2] + 18mx(x-1)(x-2)\,\dot{x}^2 \;=\; -3mgx(x-2)\,, \tag{0.6}$$

che per $x \in \mathbb{R}$ costituisce l'equazione del moto richiesta.

(b) **Posizioni di equilibrio nell'ipotesi di curva liscia**
Nel caso che la curva si possa considerare liscia, l'equazione pura del moto (0.6) consente di determinare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema sotto forma di soluzioni statiche — costanti. Si ha dunque la condizione di equilibrio:

$$0 \,=\, -3mgx(x-2)$$

dalla quale segue che gli equilibri del sistema sono tutte e sole le configurazioni corrispondenti alle ascisse:

$$x \,=\, 0 \qquad\qquad x \,=\, 2$$

vale a dire

$$P(0)-O \,=\, 0 \qquad\qquad P(2)-O \,=\, 2\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2\,.$$

(c) **Equilibri nell'ipotesi di curva con attrito**
Il punto materiale è vincolato ad una curva che rappresenta il grafico di una funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$, in un piano cartesiano Oxy che vede l'asse Oy diretto verticalmente verso l'alto. Poichè il punto risulta soggetto esclusivamente al proprio peso, la condizione di equilibrio su una curva con coefficiente di attrito radente statico $\mu_s = 0.2$ è data dalla diseguaglianza:

$$|f'(x)| \,\leq\, \mu_s$$

ossia

$$|3x^2 - 6x| \,\leq\, 0.2$$

che equivale alla doppia disequazione:

$$-0.2 \,\leq\, 3x^2 - 6x \,\leq\, 0.2$$

e quindi al sistema di disequazioni del secondo ordine:

$$\begin{cases} 0 \,\leq\, 3x^2 - 6x + 0.2 \\ 3x^2 - 6x - 0.2 \,\leq\, 0\,. \end{cases} \tag{0.7}$$

Per risolvere la prima disequazione è sufficiente determinare le radici del polinomio quadratico a secondo membro:

$$3x^2 - 6x + 0.2 \,=\, 0$$

che valgono:

$$x \,=\, \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 3\cdot 0.2}}{6} \,=\, \frac{6 \pm \sqrt{36 - 2.4}}{6} \,=\, \frac{6 \pm \sqrt{33.6}}{6}$$

per cui lo stesso polinomio si fattorizza nella forma

$$3x^2 - 6x + 0.2 \,=\, 3\Big(x - \frac{6+\sqrt{33.6}}{6}\Big)\Big(x - \frac{6-\sqrt{33.6}}{6}\Big)$$

dalla quale si deduce che le soluzioni della disequazione si hanno per

$$x \leq \frac{6-\sqrt{33.6}}{6} \simeq 0.033908$$

e per

$$x \geq \frac{6+\sqrt{33.6}}{6} \simeq 1.9660918\,.$$

Lo studio della seconda disequazione (0.7) richiede di calcolare le radici del polinomio a primo membro:

$$3x^2 - 6x - 0.2 = 0\,,$$

ossia

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 3 \cdot 0.2}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{38.4}}{6}\,,$$

e di scomporre il polinomio stesso in un prodotto di binomi di primo grado:

$$3x^2 - 6x - 0.2 = 3\Big(x - \frac{6-\sqrt{38.4}}{6}\Big)\Big(x - \frac{6+\sqrt{38.4}}{6}\Big)$$

in modo che la disequazione risulta soddisfatta soltanto per

$$\frac{6-\sqrt{38.4}}{6} \leq x \leq \frac{6+\sqrt{38.4}}{6}\,,$$

ovvero approssimativamente per

$$-0.0327955 \leq x \leq 2.0327956\,.$$

Le configurazioni di equilibrio del sistema sono perciò individuate da tutte e sole le ascisse ricomprese negli intervalli:

$$\frac{6-\sqrt{38.4}}{6} \leq x \leq \frac{6-\sqrt{33.6}}{6} \qquad \text{e} \qquad \frac{6+\sqrt{33.6}}{6} \leq x \leq \frac{6+\sqrt{38.4}}{6}$$

che numericamente si approssimano con

$$-0.0327955 \leq x \leq 0.033908 \qquad \text{e} \qquad 1.9660928 \leq x \leq 2.0327956\,.$$

Si osservi che il primo intervallo costituisce un intorno dell'equilibrio $x = 1$, calcolato nel caso di curva liscia. Analogamente, il secondo intervallo di equilibrio rappresenta un intorno di $x = 2$, l'altra configurazione di equilibrio determinata nell'ipotesi di curva senza attrito. Entrambi gli intervalli hanno un'ampiezza relativamente modesta, dato il valore piuttosto ridotto del coefficiente di attrito radente statico μ_s.

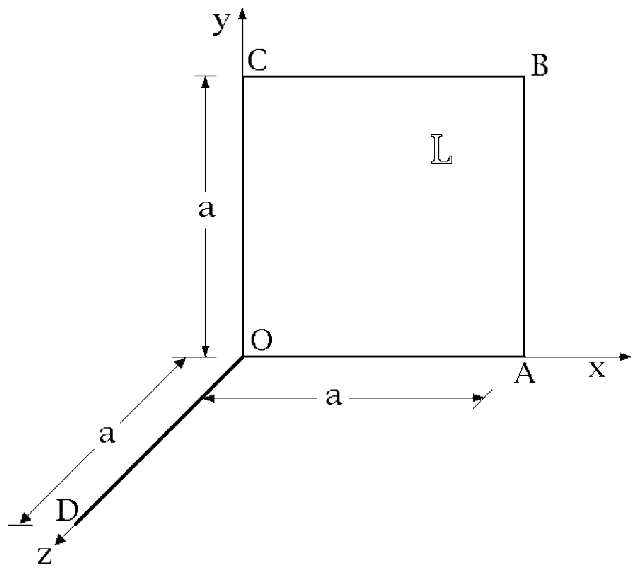
Esercizio 5

Una lamina quadrata $\mathbb{L}$, di lato a, si colloca nel piano Oxy di una terna $Oxyz$, con due lati lungo gli assi (vedi figura). La sua densità è data da

$$\sigma(x,y) = \mu x^2 y/a^5 \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{L}\,,$$

dove $\mu > 0$ è una massa caratteristica. Un'asta rettilinea OD, di lunghezza a, è posta lungo il semiasse Oz positivo e ha densità

$$\lambda(z) = \frac{\mu}{a\sqrt{a}}\sqrt{z} \qquad \forall\, z \in [0,a]\,.$$



Determinare del sistema:

(a) la matrice d'inerzia in $Oxyz$;

(b) il momento d'inerzia rispetto all'asse OB.

Soluzione

(a) **Matrice d'inerzia in** $Oxyz$

La matrice d'inerzia del sistema rispetto al riferimento $Oxyz$ è data dalla somma delle matrici d'inerzia, relative alla stessa terna, di piastra e asta.

Matrice d'inerzia dell'asta

Siccome l'asta è ubicata lungo l'asse Oz, la sua matrice d'inerzia rispetto a $Oxyz$ assume la forma

$$[L_O^{OD}] = \begin{pmatrix} L_{xx}^{OD} & 0 & 0 \\ 0 & L_{xx}^{OD} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mu a^2 \begin{pmatrix} 2/7 & 0 & 0 \\ 0 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in quanto

$$
\begin{aligned}
L_{xx}^{OD} &= \int_0^a dz\,\lambda(z)\,z^2 \;=\; \int_0^a dz\,\frac{\mu}{a^{3/2}} z^{1/2}\,z^2 \;=\; \frac{\mu}{a^{3/2}}\int_0^a z^{5/2} dz \;= \\
&= \frac{\mu}{a^{3/2}}\left[\frac{2}{7}z^{7/2}\right]_0^a \;=\; \frac{\mu}{a^{3/2}}\,\frac{2}{7}a^{7/2} \;=\; \frac{2}{7}\mu a^2\,.
\end{aligned}
$$

Matrice d'inerzia della lamina
La collocazione della lamina nel piano coordinato $Oxyz$ autorizza ad affermare che la relativa matrice d'inerzia in $Oxyz$ sia della forma

$$
[L_O^{\mathbb{L}}] \;=\; \begin{pmatrix} L_{xx}^{\mathbb{L}} & L_{xy}^{\mathbb{L}} & 0 \\ L_{xy}^{\mathbb{L}} & L_{yy}^{\mathbb{L}} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^{\mathbb{L}} + L_{yy}^{\mathbb{L}} \end{pmatrix}. \tag{0.8}
$$

I due momenti indipendenti e l'unico prodotto d'inerzia non banale si calcolano ricorrendo alla definizione, per mezzo degli appropriati integrali di superficie. Per il momento relativo all'asse Ox si ha l'espressione:

$$
L_{xx}^{\mathbb{L}} \;=\; \int_{\mathbb{L}} y^2\sigma\,dxdy \;=\; \int_0^a dx\int_0^a dy\,y^2\,\frac{\mu}{a^5}\,x^2 y \;=\; \frac{\mu}{a^5}\int_0^a x^2 dx\int_0^a y^3 dy \;=\; \frac{\mu}{a^5}\,\frac{a^3}{3}\,\frac{a^4}{4} \;=\; \frac{1}{12}\mu a^2
$$

mentre quello associato all'asse Oy è dato da:

$$
L_{yy}^{\mathbb{L}} \;=\; \int_{\mathbb{L}} x^2\sigma\,dxdy \;=\; \int_0^a dx\int_0^a dy\,x^2\,\frac{\mu}{a^5}\,x^2 y \;=\; \frac{\mu}{a^5}\int_0^a x^4 dx\int_0^a y\,dy \;=\; \frac{\mu}{a^5}\,\frac{a^5}{5}\,\frac{a^2}{2} \;=\; \frac{1}{10}\mu a^2
$$

ed il prodotto d'inerzia residuo vale:

$$
L_{xy}^{\mathbb{L}} \;=\; -\int_{\mathbb{L}} xy\,\sigma\,dxdy \;=\; -\int_0^a dx\int_0^a dy\,xy\,\frac{\mu}{a^5}x^2 y \;=\; -\frac{\mu}{a^5}\int_0^a x^3 dx\int_0^a y^2 dy \;=\; -\frac{1}{12}\mu a^2
$$

in modo che la matrice d'inerzia cercata diventa:

$$
[L_O^{\mathbb{L}}] \;=\; \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/12 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 11/60 \end{pmatrix}. \tag{0.9}
$$

Matrice d'inerzia del sistema
Sommando le matrici d'inerzia parziali (0.8) e (0.9) si perviene alla matrice d'inerzia in $Oxyz$ dell'intero sistema:

$$
\begin{aligned}
[L_O] \;=\; [L_O^{OD}] + [L_O^{\mathbb{L}}] \;&=\; \mu a^2 \begin{pmatrix} 2/7 & 0 & 0 \\ 0 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/12 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 11/60 \end{pmatrix} \;= \\
&= \mu a^2 \begin{pmatrix} 31/84 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 27/70 & 0 \\ 0 & 0 & 11/60 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(b) **Momento d'inerzia rispetto all'asse OB**

La retta OB, rispetto alla quale si richiede di calcolare il momento d'inerzia del sistema, passa chiaramente per l'origine ed il suo versore direttore si scrive:

$$\hat{n} \,=\, \frac{B-O}{|B-O|} \,=\, \frac{a\,\hat{e}_1 + a\,\hat{e}_2}{|a\,\hat{e}_1 + a\,\hat{e}_2|} \,=\, \frac{a\,\hat{e}_1 + a\,\hat{e}_2}{\sqrt{2}\,a} \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_2\,.$$

Il momento d'inerzia cercato vale perciò:

$$\begin{aligned}
I_{OB} \,&=\, I_{O\hat{n}} \,=\, \hat{n}\cdot L_O(\hat{n}) \,=\, \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \;\; 0\Big)\,[L_O]\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \,= \\
&=\, \frac{1}{2}(1 \;\; 1 \;\; 0)\,\mu a^2 \begin{pmatrix} 31/84 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 27/70 & 0 \\ 0 & 0 & 11/60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,= \\
&=\, \frac{1}{2}\mu a^2\Big(\frac{31}{84} - \frac{1}{12} \quad -\frac{1}{12} + \frac{27}{70} \quad 0\Big)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,= \\
&=\, \frac{1}{2}\mu a^2\Big(\frac{31}{84} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{27}{70}\Big) \,=\, \frac{1}{2}\mu a^2\Big(\frac{17}{84} + \frac{27}{70}\Big) \,=\, \frac{247}{840}\mu a^2\,.
\end{aligned}$$