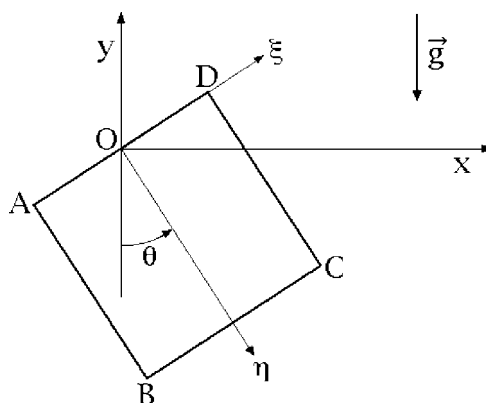


Esercizio 1

La lamina quadrata $ABCD$ è vincolata a ruotare nel piano verticale Oxy attorno all'asse Oz , essendo O il punto medio del suo lato AD . La lamina ha lato di lunghezza L , è soggetta alla forza peso, e rispetto al riferimento solidale $O\xi\eta$ mostrato in figura la sua densità in un generico punto $P(\xi, \eta)$ è data dall'espressione:

$$\sigma(\xi, \eta) = \frac{m}{L^4} \eta^2 \quad (\xi, \eta) \in [-L/2, L/2] \times [0, L].$$

In O è inoltre applicato il momento $\vec{M}_O = -\alpha \vec{\omega}$, essendo α una costante positiva e $\vec{\omega}$ la velocità angolare istantanea del sistema.

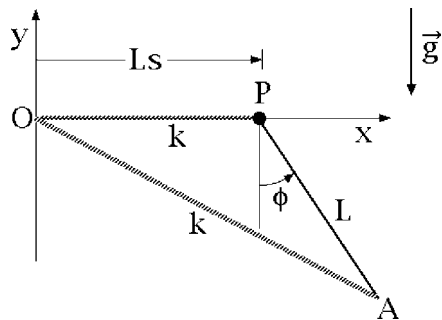


Determinare:

- (a) la posizione del baricentro G rispetto al riferimento solidale $O\xi\eta$;
- (b) le equazioni pure del moto nell'ipotesi di asse fisso privo di attrito, usando l'angolo θ in figura;
- (c) l'espressione dell'energia cinetica del sistema in $Oxyz$;
- (d) gli equilibri del sistema;
- (e) le proprietà di stabilità degli equilibri del sistema.

Esercizio 2

Nel piano verticale Oxy di una terna cartesiana ortogonale si consideri il sistema costituito da un punto materiale P , di massa m , vincolato a scorrere lungo l'asse orizzontale Ox e da un'asta rigida omogenea PA , di lunghezza L e massa M , incernierata in P e libera di muoversi in Oxy . Il sistema è pesante e due molle di eguale costante elastica k collegano l'origine O rispettivamente al punto P e all'estremità A dell'asta.



Supponendo i vincoli lisci e facendo uso dei parametri adimensionali s e ϕ mostrati in figura come coordinate lagrangiane, determinare:

- l'energia cinetica del sistema rispetto alla terna $Oxyz$;
- le configurazioni di equilibrio del sistema;
- le equazioni lagrangiane del moto;
- un integrale primo del sistema.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Posizione del baricentro rispetto al riferimento solidale

Indicate con ξ_G e η_G le coordinate del baricentro G rispetto al riferimento solidale, si ha immediatamente che:

$$\xi_G = 0$$

in quanto l'asse $O\eta$ rappresenta un evidente asse di simmetria del sistema — la densità σ dipende dalla sola coordinata η e non da ξ . Il problema si riduce pertanto alla determinazione della sola coordinata η_G , applicando la definizione di baricentro. A questo scopo si procede al calcolo preliminare della massa M della lamina:

$$\begin{aligned} M &= \int_{[-L/2, L/2]} d\xi \int_{[0, L]} d\eta \sigma(\xi, \eta) = \int_{[-L/2, L/2]} d\xi \int_{[0, L]} d\eta \frac{m}{L^4} \eta^2 = \\ &= L \frac{m}{L^4} \int_0^L \eta^2 d\eta = \frac{m}{L^3} \frac{L^3}{3} = \frac{m}{3} \end{aligned}$$

in modo che la coordinata η_G del baricentro risulta:

$$\begin{aligned} \eta_G &= \frac{1}{M} \int_{[-L/2, L/2]} d\xi \int_{[0, L]} d\eta \eta \sigma(\xi, \eta) = \\ &= \frac{3}{m} \int_{[-L/2, L/2]} d\xi \int_{[0, L]} d\eta \eta \frac{m}{L^4} \eta^2 = \frac{3}{m} L \frac{m}{L^4} \left[\frac{\eta^4}{4} \right]_0^L = \frac{3}{4} L. \end{aligned}$$

La posizione del baricentro rispetto al riferimento solidale è quindi individuata dalle coordinate:

$$(\xi_G, \eta_G) = \left(0, \frac{3}{4} L \right).$$

(b) Equazioni pure del moto nell'ipotesi di asse fisso privo di attrito

Sotto l'ipotesi che l'asse fisso Oz sia privo di attrito, e che quindi il momento risultante rispetto all'asse fisso di tutte le reazioni vincolari esterne risulti costantemente nullo, l'equazione pura del moto è la proiezione lungo Oz dell'equazione cardinale del momento angolare in O — o in un qualsiasi altro punto dell'asse, il risultato è indipendente da questa scelta. Poiché il vettore velocità angolare istantanea della lamina vale $\dot{\theta} \hat{e}_3$, indicato con I_{Oz} il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse fisso Oz , si ha:

$$\begin{aligned} I_{Oz} \ddot{\theta} &= \hat{e}_3 \cdot [(G - O) \wedge M \vec{g} - \alpha \dot{\theta} \hat{e}_3] = \hat{e}_3 \cdot (G - O) \wedge M(-g \hat{e}_2) - \alpha \dot{\theta} = \\ &= Mg \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_2 \wedge (G - O) - \alpha \dot{\theta} = Mg \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_2 \cdot (G - O) - \alpha \dot{\theta} = \\ &= -Mg \hat{e}_1 \cdot (G - O) - \alpha \dot{\theta} \end{aligned}$$

ed essendo:

$$G - O = \frac{3}{4} L \sin \theta \hat{e}_1 - \frac{3}{4} L \cos \theta \hat{e}_2 \quad \text{e:} \quad M = \frac{m}{3}$$

l'equazione del moto si riduce a:

$$I_{Oz} \ddot{\theta} = -\frac{mgL}{4} \sin \theta - \alpha \dot{\theta}.$$

Non resta che ricavare esplicitamente l'espressione del momento d'inerzia:

$$\begin{aligned}
 I_{Oz} &= \int_{[-L/2, L/2]} d\xi \int_{[0, L]} d\eta \sigma(\xi, \eta) (\xi^2 + \eta^2) = \\
 &= \int_{-L/2}^{L/2} d\xi \xi^2 \int_0^L d\eta \frac{m}{L^4} \eta^2 + \int_{-L/2}^{L/2} d\xi \int_0^L d\eta \frac{m}{L^4} \eta^4 = \\
 &= \left[\frac{\xi^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} \frac{m}{L^4} \frac{L^3}{3} + \frac{m}{L^4} L \frac{L^5}{5} = \frac{1}{3} \frac{L^3}{4} \frac{m}{3L} + \frac{mL^2}{5} = \frac{mL^2}{36} + \frac{mL^2}{5} = \frac{41}{180} mL^2
 \end{aligned}$$

per ottenere l'equazione completa:

$$\frac{41}{180} mL^2 \ddot{\theta} = -\frac{mgL}{4} \sin \theta - \alpha \dot{\theta}.$$

(c) Espressione dell'energia cinetica

L'energia cinetica di un sistema rigido con asse fisso Oz e momento d'inerzia I_{Oz} rispetto a tale asse si scrive in termini della velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$ come:

$$T = \frac{1}{2} I_{Oz} |\vec{\omega}|^2$$

e nella fattispecie risulta:

$$T = \frac{1}{2} I_{Oz} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{41}{180} mL^2 \dot{\theta}^2 = \frac{41}{360} mL^2 \dot{\theta}^2.$$

(d) Equilibri

Trattandosi di sistema scleronomo, tutti gli equilibri sono associati a soluzioni statiche delle equazioni pure del moto: la quiete in una configurazione assegnata ed individuata dal valore θ_0 del parametro θ è un moto del sistema se $\theta(t) = \theta_0 \forall t \in \mathbb{R}$ è soluzione (statica) delle equazioni del moto. La configurazione $\theta = \theta_0$ sarà perciò di equilibrio se e soltanto se:

$$0 = -\frac{mgL}{4} \sin \theta_0$$

da cui si deduce:

$$\theta_0 = 0, \quad \pi$$

modulo multipli interi di 2π , peraltro fisicamente irrilevanti. Gli equilibri del sistema sono dunque tutti e soltanto $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

(e) Stabilità degli equilibri

Quello considerato è un sistema scleronomo ad un solo grado di libertà, sul quale agiscono:

- o una sollecitazione $-\frac{mgL}{4} \sin \theta$ che ha natura posizionale e conservativa, potendosi scrivere:

$$-\frac{mgL}{4} \sin \theta = U'(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

in termini della funzione potenziale:

$$U(\theta) = \frac{mgL}{4} \cos \theta;$$

◦ una sollecitazione $-\alpha\dot{\theta}$, che invece è di tipo dissipativo in quanto la sua potenza risulta:

$$\pi = -\alpha\dot{\theta}\dot{\theta} = -\alpha\dot{\theta}^2 \leq 0 \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2.$$

Lo studio della stabilità degli equilibri può essere condotto mediante il teorema di Lagrange-Dirichlet. A questo scopo si calcola la derivata seconda del potenziale:

$$U''(\theta) = -\frac{mgL}{4} \cos \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

e se ne determina il valore in corrispondenza di ogni configurazione di equilibrio.

Configurazione $\theta = 0$

La derivata seconda del potenziale assume segno negativo:

$$U''(0) = -\frac{mgL}{4} < 0$$

per cui la configurazione risulta un massimo relativo proprio del potenziale, stabile in forza del teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $\theta = \pi$

In questo caso la derivata seconda risulta positiva:

$$U''(\pi) = \frac{mgL}{4} > 0$$

e il punto $\theta = \pi$ si riconosce essere un minimo relativo proprio di U . Nonostante il ricorrere del massimo in $\theta = \pi$ sia escluso mediante l'esame della derivata seconda, non è tuttavia possibile fare ricorso al teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, a causa della sollecitazione dissipativa $-\alpha\dot{\theta}$. Per l'analisi di stabilità sarebbe quindi necessario ricorrere a tecniche più sofisticate.

Osservazione. Instabilità di $\theta = \pi$ e asintotica stabilità di $\theta = 0$

Si può verificare che la configurazione $\theta = \pi$ risulta instabile, mentre $\theta = 0$ non è puramente stabile, ma presenta altresì carattere attrattivo — equilibrio asintoticamente stabile. A queste conclusioni è dato pervenire seguendo almeno due procedure alternative, entrambe standard. Nella prima si fa ricorso ai criteri di Barbasin-Krasovskii, una volta verificata la natura completamente dissipativa della sollecitazione di resistenza viscosa ed il carattere isolato degli equilibri. Nella seconda si fa riferimento all'usuale teorema di analisi lineare della stabilità, che riconduce la discussione della stabilità dell'equilibrio per le equazioni pure del moto a quella dello stesso equilibrio per il sistema delle equazioni del moto linearizzate nell'intorno della soluzione statica relativa all'equilibrio considerato.

I metodo. Criteri di Barbasin-Krasovskii

La sollecitazione $Q_\theta = -\alpha\dot{\theta}$ è completamente dissipativa, in quanto di potenza non positiva:

$$\pi = Q_\theta\dot{\theta} = -\alpha\dot{\theta}\dot{\theta} = -\alpha\dot{\theta}^2 \leq 0 \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$$

e nulla soltanto a velocità generalizzata nulla:

$$\pi = -\alpha\dot{\theta}^2 = 0 \quad \iff \quad \dot{\theta} = 0.$$

Poiché le equazioni del moto sono autonome — non dipendenti esplicitamente dal tempo — e tutti gli equilibri si presentano isolati — in quanto in numero finito, non esistono equilibri che siano punti di accumulazione di altri equilibri dello stesso sistema —, per i criteri di Barbasin-Krasovskii i punti di equilibrio corrispondenti a massimi relativi propri del potenziale U sono asintoticamente stabili, mentre tutti gli equilibri che non si identificano con massimi relativi propri del potenziale si rivelano instabili. I risultati ottenuti al precedente punto (e) consentono pertanto di concludere che:

- $\theta = 0$ è asintoticamente stabile, quale massimo relativo proprio di U ;
- $\theta = \pi$ è instabile in quanto equilibrio isolato, ma non massimo relativo proprio del potenziale.

Ciò completa l'analisi di stabilità degli equilibri del sistema.

II metodo. Analisi lineare della stabilità

Le equazioni del moto del sistema:

$$\frac{41}{180}mL^2\ddot{\theta} = -\alpha\dot{\theta} - \frac{mgL}{4}\sin\theta$$

vengono riscritte come sistema del primo ordine introducendo la variabile ausiliaria $\omega = \dot{\theta}$:

$$\begin{cases} \frac{41}{180}mL^2\dot{\omega} = -\alpha\omega - \frac{mgL}{4}\sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

sistema che è poi immediato porre in forma normale:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = -\frac{180}{41}\frac{\alpha}{mL^2}\omega - \frac{45}{41}\frac{g}{L}\sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega. \end{cases}$$

Studiare la stabilità dell'equilibrio $\theta = \pi$ equivale per definizione ad analizzare la stabilità alla Liapunov della soluzione statica corrispondente $(\omega(t), \theta(t)) = (0, \pi) \forall t \in \mathbb{R}$. Il metodo di analisi lineare prevede che le equazioni del moto — autonome! — vengano linearizzate nell'intorno di tale soluzione statica e che si provveda quindi al calcolo degli autovalori della relativa matrice rappresentativa. Posto $(\omega, \theta) = (\Delta\omega, \pi + \Delta\theta)$, dall'approssimazione di Taylor al primo ordine:

$$\sin(\pi + \Delta\theta) = -\Delta\theta + O(\Delta\theta^3) \quad (\Delta\theta \rightarrow 0)$$

si ricava il sistema linearizzato di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Delta\omega = -\frac{180}{41} \frac{\alpha}{mL^2}\Delta\omega + \frac{45}{41} \frac{g}{L}\Delta\theta \\ \frac{d}{dt}\Delta\theta = \Delta\omega \end{cases}$$

che assume la forma matriciale equivalente:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta\omega \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{180}{41} \frac{\alpha}{mL^2} & \frac{45}{41} \frac{g}{L} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\omega \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Delta\omega \\ \Delta\theta \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice rappresentativa del sistema lineare, A , sono le soluzioni λ_1, λ_2 dell'equazione caratteristica:

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \left(\lambda + \frac{180}{41} \frac{\alpha}{mL^2}\right)\lambda - \frac{45}{41} \frac{g}{L} = 0$$

ossia:

$$\lambda^2 + \frac{180}{41} \frac{\alpha}{mL^2}\lambda - \frac{45}{41} \frac{g}{L} = 0.$$

Le radici sono entrambe reali, l'una positiva e l'altra negativa:

$$\lambda_1 = -\frac{90}{41} \frac{\alpha}{mL^2} + \sqrt{\left(\frac{90}{41} \frac{\alpha}{mL^2}\right)^2 + \frac{45}{41} \frac{g}{L}} > 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{90}{41} \frac{\alpha}{mL^2} - \sqrt{\left(\frac{90}{41} \frac{\alpha}{mL^2}\right)^2 + \frac{45}{41} \frac{g}{L}} < 0$$

e l'essere $\Re(\lambda_1) > 0$ implica l'instabilità della soluzione statica — la presenza di almeno un autovalore con parte reale positiva comporta l'instabilità della soluzione costante, per il teorema di analisi lineare della stabilità.

Per lo studio di $\theta = 0$ si procede in modo analogo, considerando l'approssimazione di Taylor:

$$\sin(\Delta\theta) = \Delta\theta + O(\Delta\theta^3) \quad (\Delta\theta \rightarrow 0)$$

e per $(\omega, \theta) = (\Delta\omega, \Delta\theta)$ il sistema linearizzato delle equazioni del moto in forma normale del primo ordine:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Delta\omega = -\frac{180}{41} \frac{\alpha}{mL^2}\Delta\omega - \frac{45}{41} \frac{g}{L}\Delta\theta \\ \frac{d}{dt}\Delta\theta = \Delta\omega \end{cases}$$

cui è associata l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + \frac{180}{41} \frac{\alpha}{mL^2}\lambda + \frac{45}{41} \frac{g}{L} = 0.$$

Per gli autovalori relativi, λ_1 e λ_2 , valgono le ovvie relazioni:

$$\lambda_1 = -\frac{90}{41} \frac{\alpha}{mL^2} + \sqrt{\left(\frac{90}{41} \frac{\alpha}{mL^2}\right)^2 - \frac{45}{41} \frac{g}{L}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{90}{41} \frac{\alpha}{mL^2} - \sqrt{\left(\frac{90}{41} \frac{\alpha}{mL^2}\right)^2 - \frac{45}{41} \frac{g}{L}}$$

dalle quali si deduce che:

- λ_1 e λ_2 sono entrambi reali e negativi (nel caso di discriminante non negativo),
- oppure λ_1, λ_2 sono complessi coniugati con parte reale negativa (nell'ipotesi di discriminante negativo).

In ambo i casi, siccome tutti gli autovalori del sistema hanno parte reale negativa, il teorema di analisi lineare implica la stabilità asintotica della soluzione statica in esame, e dunque anche della corrispondente configurazione di equilibrio.

Osservazione. Equazioni di Lagrange

Nel precedente punto (b) le equazioni del moto sono state ricavate direttamente applicando la teoria dei sistemi rigidi con asse fisso privo di attrito. È facile verificare tuttavia che alle stesse equazioni si può pervenire facendo uso del formalismo lagrangiano, considerato che il sistema è olonomo, ad un grado di libertà e a vincoli indipendenti dal tempo, e che l'ipotesi di asse fisso privo di attrito equivale alla condizione di idealità dei vincoli.

A questo scopo, l'unico problema di un qualche rilievo ed interesse è costituito dal calcolo della componente lagrangiana Q_θ del sistema di sollecitazioni responsabili del momento resistente $\vec{M}_O = -\alpha\vec{\omega}$, in quanto le sollecitazioni gravitazionali possono essere descritte immediatamente per mezzo dell'appropriato potenziale standard e l'energia cinetica del sistema è già stata determinata al punto (c).

Per ogni punto P della lamina $ABCD$ la velocità è data da:

$$\dot{P} = \frac{\partial P}{\partial \theta} \dot{\theta}$$

dove in luogo di θ si consideri una qualsiasi funzione $\theta(t)$ definita e C^2 su un intervallo reale — atta a descrivere un **moto regolare** del sistema. D'altra parte, per la formula generale dell'atto di moto rigido, considerato che O è un punto dell'asse e che la velocità angolare istantanea del sistema vale $\dot{\theta}\hat{e}_3$, deve anche aversi:

$$\dot{P} = \dot{\theta}\hat{e}_3 \wedge (P - O),$$

in modo che per l'arbitrarietà di $\dot{\theta}$ deve risultare:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \hat{e}_3 \wedge (P - O) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Per un qualsiasi sistema di forze applicate alla lamina rotante si ha allora:

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \sum_P \vec{F}_P \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} = \sum_P \vec{F}_P \cdot \hat{e}_3 \wedge (P - O) = \sum_P \hat{e}_3 \wedge (P - O) \cdot \vec{F}_P = \\ &= \hat{e}_3 \cdot \sum_P (P - O) \wedge \vec{F}_P = \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O. \end{aligned}$$

Nella fattispecie il sistema di sollecitazioni agenti sul sistema ha momento risultante in O :

$$\vec{M}_O = -\alpha \dot{\theta} \hat{e}_3$$

per cui la relativa componente lagrangiana diventa:

$$Q_\theta = \hat{e}_3 \cdot (-\alpha \dot{\theta} \hat{e}_3) = -\alpha \dot{\theta}.$$

Le forze peso sono descritte dal potenziale:

$$U_g = -\frac{m}{3}g(G - O) \cdot \hat{e}_2 = \frac{m}{3}g \frac{3}{4}L \cos \theta = \frac{mgL}{4} \cos \theta$$

e poiché l'energia cinetica vale:

$$T = \frac{1}{2}I_{Oz}|\dot{\theta}\hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2}I_{Oz}\dot{\theta}^2$$

la lagrangiana del sistema assume la forma:

$$\mathcal{L} = T + U_g = \frac{1}{2}I_{Oz}\dot{\theta}^2 + \frac{mgL}{4} \cos \theta.$$

L'equazione di Lagrange è data da:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_\theta$$

e determinata esplicitamente si riduce a:

$$I_{Oz}\ddot{\theta} + \frac{mgL}{4} \sin \theta = -\alpha \dot{\theta}$$

a conferma del risultato già ottenuto.

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica del sistema risulta dalla somma delle energie cinetiche delle singole parti costituenti, il punto materiale P e l'asta PA . Per il punto materiale P , di massa m , il calcolo è immediato:

$$T_P = \frac{m}{2}\dot{P}^2 = \frac{m}{2}|L\dot{s}\hat{e}_1|^2 = \frac{mL^2}{2}\dot{s}^2.$$

Quanto all'asta omogenea, che è priva di punti fissi, occorre fare uso del teorema di König e ricavare preventivamente il vettore posizione del baricentro G :

$$G - O = P - O + G - P = Ls \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \sin \phi \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \cos \phi \hat{e}_2 = L \left(s + \frac{1}{2} \sin \phi \right) \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \cos \phi \hat{e}_2$$

in modo che la velocità di G risulta:

$$\dot{G} = L \left(\dot{s} + \frac{1}{2} \cos \phi \dot{\phi} \right) \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \sin \phi \dot{\phi} \hat{e}_2.$$

L'energia cinetica dell'asta si scrive perciò:

$$\begin{aligned} T_{\text{asta}} &= \frac{M}{2} |\dot{G}|^2 + \frac{1}{2} I_{Gz}^{\text{asta}} |\dot{\phi} \hat{e}_3|^2 = \frac{M}{2} L^2 \left[\left(\dot{s} + \frac{1}{2} \cos \phi \dot{\phi} \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \phi \dot{\phi}^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{ML^2}{12} \dot{\phi}^2 = \\ &= \frac{ML^2}{2} \left(\dot{s}^2 + \cos \phi \dot{s} \dot{\phi} + \frac{1}{4} \dot{\phi}^2 \right) + \frac{ML^2}{24} \dot{\phi}^2 = \frac{ML^2}{2} \left(\dot{s}^2 + \cos \phi \dot{s} \dot{\phi} + \frac{1}{3} \dot{\phi}^2 \right). \end{aligned}$$

I risultati ottenuti conducono all'espressione finale dell'energia cinetica totale del sistema:

$$T = T_P + T_{\text{asta}} = \frac{mL^2}{2} \dot{s}^2 + \frac{ML^2}{2} \left(\dot{s}^2 + \cos \phi \dot{s} \dot{\phi} + \frac{1}{3} \dot{\phi}^2 \right).$$

(b) Configurazioni di equilibrio

Tutte le sollecitazioni attive applicate al sistema hanno natura posizionale e conservativa, in quanto si riducono alle interazioni elastiche fra i punti $P-O$ e $A-O$ e alla forza peso agente sull'asta omogenea PA . Le configurazioni di equilibrio del sistema sono pertanto tutti e soli i punti critici del potenziale, che risulterà dalla somma di tre contributi, due di tipo elastico e uno gravitazionale.

Il potenziale gravitazionale dell'asta è dato dalla relazione:

$$U_g = -Mg \hat{e}_2 \cdot (G - O) = -Mg \left(-\frac{L}{2} \cos \phi \right) = \frac{MgL}{2} \cos \phi,$$

mentre quello del punto P può ignorarsi in quanto costante. L'interazione elastica fra l'origine O e il punto materiale P fornisce il termine di potenziale:

$$U_{\text{el}}^{OP} = -\frac{k}{2} |P - O|^2 = -\frac{kL^2}{2} s^2$$

e quella fra O e l'estremità A dell'asta è descritta dall'ulteriore contributo:

$$U_{\text{el}}^{OA} = -\frac{k}{2} |A - O|^2 = -\frac{k}{2} L^2 (s^2 + 2s \sin \phi + \sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = -\frac{kL^2}{2} (s^2 + 2s \sin \phi + 1)$$

dove si è fatto uso delle ovvie relazioni geometriche:

$$\begin{aligned} P - O &= Ls \hat{e}_1 \\ A - P &= L \sin \phi \hat{e}_1 - L \cos \phi \hat{e}_2 \\ A - O &= L(s + \sin \phi) \hat{e}_1 - L \cos \phi \hat{e}_2. \end{aligned}$$

Omesse le costanti additive inessenziali, il potenziale del sistema assume perciò la forma:

$$U(s, \phi) = \frac{MgL}{2} \cos \phi - \frac{kL^2}{2} s^2 - \frac{kL^2}{2} s^2 - kL^2 s \sin \phi = -kL^2 s^2 - kL^2 s \sin \phi + \frac{MgL}{2} \cos \phi$$

ed è definito $\forall (s, \phi) \in \mathbb{R}^2$. Le derivate parziali prime del potenziale sono date da:

$$\begin{cases} U_s = -2kL^2 s - kL^2 \sin \phi \\ U_\phi = -kL^2 s \cos \phi - \frac{MgL}{2} \sin \phi \end{cases}$$

per cui le configurazioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema trigonometrico:

$$\begin{cases} -2kL^2 s - kL^2 \sin \phi = 0 \\ -kL^2 s \cos \phi - \frac{MgL}{2} \sin \phi = 0 \end{cases}$$

equivalente a:

$$\begin{cases} 2s + \sin \phi = 0 \\ s \cos \phi + \frac{Mg}{2kL} \sin \phi = 0. \end{cases}$$

La prima equazione porge la relazione:

$$s = -\frac{1}{2} \sin \phi$$

che sostituita nella seconda conduce ad una equazione trigonometrica nella sola ϕ :

$$-\frac{1}{2} \sin \phi \cos \phi + \frac{Mg}{2kL} \sin \phi = 0$$

ossia:

$$\sin \phi \left(-\cos \phi + \frac{Mg}{kL} \right) = 0.$$

Di questa, le soluzioni:

$$\phi = 0, \quad \pi,$$

sono sempre definite, ma ad esse vanno aggiunte le ulteriori radici:

$$\phi = \pm \arccos \left(\frac{Mg}{kL} \right) = \pm \phi^*$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia:

$$\frac{Mg}{kL} < 1.$$

In conclusione, gli equilibri del sistema sono dati da:

$$(s, \phi) = (0, 0), \quad (0, \pi),$$

definiti per ogni scelta delle costanti caratteristiche del sistema, e da:

$$(s, \phi) = \left(-\frac{1}{2} \sin \phi^*, \phi^*\right), \quad \left(\frac{1}{2} \sin \phi^*, -\phi^*\right)$$

che invece sussistono distinti dai precedenti se e soltanto se $Mg/kL < 1$.

(c) Equazioni di Lagrange

La lagrangiana del sistema è la somma dell'energia cinetica T e del potenziale totale U :

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{mL^2}{2} \dot{s}^2 + \frac{ML^2}{2} \left(\dot{s}^2 + \cos \phi \dot{s} \dot{\phi} + \frac{1}{3} \dot{\phi}^2 \right) - kL^2 s^2 - kL^2 s \sin \phi + \frac{MgL}{2} \cos \phi$$

e poiché tutte le sollecitazioni attive agenti sul sistema sono posizionali e conservative, le equazioni di Lagrange sono date da:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0.$$

Dalle espressioni parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} &= mL^2 \dot{s} + ML^2 \dot{s} + \frac{ML^2}{2} \cos \phi \dot{\phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) &= mL^2 \ddot{s} + ML^2 \ddot{s} + \frac{ML^2}{2} \cos \phi \ddot{\phi} - \frac{ML^2}{2} \sin \phi \dot{\phi}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= -2kL^2 s - kL^2 \sin \phi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{ML^2}{2} \cos \phi \dot{s} + \frac{ML^2}{3} \dot{\phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{ML^2}{2} \cos \phi \ddot{s} + \frac{ML^2}{3} \ddot{\phi} - \frac{ML^2}{2} \sin \phi \dot{\phi} \dot{s} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -\frac{ML^2}{2} \sin \phi \dot{s} \dot{\phi} - kL^2 s \cos \phi - \frac{MgL}{2} \sin \phi \end{aligned}$$

si ricava perciò:

$$mL^2 \ddot{s} + ML^2 \ddot{s} + \frac{ML^2}{2} \cos \phi \ddot{\phi} - \frac{ML^2}{2} \sin \phi \dot{\phi}^2 + 2kL^2 s + kL^2 \sin \phi = 0$$

$$\frac{ML^2}{2} \cos \phi \ddot{s} + \frac{ML^2}{3} \ddot{\phi} + kL^2 s \cos \phi + \frac{MgL}{2} \sin \phi = 0$$

che sono le equazioni del moto richieste.

(d) Un integrale primo del sistema

Il sistema è scleronomo e soggetto esclusivamente a sollecitazioni posizionali e conservative. Un integrale primo è allora costituito dall'energia meccanica H , esprimibile come somma dell'energia cinetica T e dell'energia potenziale $-U$:

$$H = T - U = \frac{mL^2}{2}\dot{s}^2 + \frac{ML^2}{2}\left(\dot{s}^2 + \cos\phi\dot{\phi} + \frac{1}{3}\dot{\phi}^2\right) + kL^2s^2 + kL^2s\sin\phi - \frac{MgL}{2}\cos\phi.$$

Osservazione. Stabilità degli equilibri

Il sistema è scleronomo e soggetto soltanto a sollecitazioni posizionali e conservative, per cui le proprietà di stabilità degli equilibri possono essere analizzate mediante i teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. Dalle derivate parziali seconde del potenziale:

$$\begin{aligned}U_{ss}(s, \phi) &= -2kL^2 \\U_{s\phi}(s, \phi) &= U_{\phi s}(s, \phi) = -kL^2\cos\phi \\U_{\phi\phi}(s, \phi) &= kL^2s\sin\phi - \frac{MgL}{2}\cos\phi\end{aligned}$$

si ricava la matrice hessiana di U in un generico punto $(s, \phi) \in \mathbb{R}^2$

$$H_U(s, \phi) = \begin{pmatrix} -2kL^2 & -kL^2\cos\phi \\ -kL^2\cos\phi & kL^2s\sin\phi - \frac{MgL}{2}\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Le configurazioni di equilibrio devono essere esaminate separatamente una ad una.

Configurazione $(s, \phi) = (0, 0)$

Per questa configurazione la matrice hessiana del potenziale diventa:

$$H_U(0, 0) = \begin{pmatrix} -2kL^2 & -kL^2 \\ -kL^2 & -MgL/2 \end{pmatrix}$$

con determinante:

$$\det H_U(0, 0) = MgkL^3 - k^2L^4 = k^2L^4\left(\frac{Mg}{kL} - 1\right)$$

e traccia sempre negativa:

$$\text{tr}H_U(0, 0) = -2kL^2 - \frac{MgL}{2} < 0.$$

Occorre distinguere tre casi:

- (i) se $Mg/kL > 1$ il determinante $\det H_U(0, 0)$ risulta positivo, in modo che i due autovalori di $H_U(0, 0)$ devono presentare segno negativo. Ciò consente di riconoscere in

$(s, \phi) = (0, 0)$ un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet;

(ii) per $Mg/kL < 1$ si ha $\det H_U(0, 0) < 0$ per cui gli autovalori della matrice hessiana di U sono di segno opposto. La presenza di un autovalore di segno positivo assicura l'instabilità della configurazione, in forza del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;

(iii) qualora si abbia infine $Mg/kL = 1$, risulta $\det H_U(0, 0) = 0$ e gli autovalori della hessiana sono uno nullo ed uno negativo. L'assenza di autovalori positivi, unitamente al fatto che la configurazione non è immediatamente riconoscibile come massimo relativo proprio del potenziale, non consente di applicare né il teorema di Lagrange-Dirichlet, né il teorema di inversione parziale. Il caso considerato deve perciò riguardarsi come critico e necessiterebbe di una analisi più sofisticata — diretta possibilmente ad accertare che la configurazione costituisca un massimo relativo proprio di U , in modo da poter fare ricorso al teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(s, \phi) = (0, \pi)$

La matrice hessiana del potenziale è in questo caso:

$$H_U(0, \pi) = \begin{pmatrix} -2kL^2 & kL^2 \\ kL^2 & MgL/2 \end{pmatrix}$$

e presentando determinante negativo:

$$\det H_U(0, \pi) = -MgkL^3 - k^2L^4 < 0$$

i suoi autovalori sono dunque reali e di segno opposto. Il ricorrere di un autovalore positivo conduce alla instabilità della configurazione, in forza del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Configurazioni $(s, \phi) = \left(-\frac{1}{2} \sin \phi^*, \phi^*\right), \left(\frac{1}{2} \sin \phi^*, -\phi^*\right)$

Si osserva in primo luogo che queste due configurazioni di equilibrio devono presentare le stesse proprietà di stabilità, in quanto il potenziale U del sistema è una funzione pari di \mathbb{R}^2 :

$$U(-s, -\phi) = U(s, \phi) \quad \forall (s, \phi) \in \mathbb{R}^2.$$

È dunque sufficiente analizzare una sola delle due configurazioni, ad esempio la prima. Si ha così:

$$H_U\left(-\frac{1}{2} \sin \phi^*, \phi^*\right) = \begin{pmatrix} -2kL^2 & -kL^2 \cos \phi^* \\ -kL^2 \cos \phi^* & -\frac{kL^2}{2} \sin^2 \phi^* - \frac{MgL}{2} \cos \phi^* \end{pmatrix}.$$

Ricordando la definizione di $\phi^* \in (0, \pi/2)$, la traccia della matrice hessiana risulta sempre negativa:

$$\text{tr} H_U\left(-\frac{1}{2} \sin \phi^*, \phi^*\right) = -2kL^2 - \frac{kL^2}{2} \sin^2 \phi^* - \frac{MgL}{2} \cos \phi^* < 0$$

mentre un semplice calcolo dimostra che il determinante ha comunque segno positivo:

$$\begin{aligned}
 \det H_U \left(-\frac{1}{2} \sin \phi^*, \phi^* \right) &= k^2 L^4 \sin^2 \phi^* + M g k L^3 \cos \phi^* - k^2 L^4 \cos^2 \phi^* = \\
 &= k^2 L^4 (1 - 2 \cos^2 \phi^*) + M g k L^3 \cos \phi^* = \\
 &= k^2 L^4 \left[1 - 2 \cos^2 \phi^* + \frac{M g}{k L} \cos \phi^* \right] = \\
 &= k^2 L^4 (1 - 2 \cos^2 \phi^* + \cos^2 \phi^*) = k^2 L^4 \sin^2 \phi^* > 0.
 \end{aligned}$$

Entrambi gli autovalori della matrice sono pertanto reali e negativi, e la configurazione risulta un massimo relativo proprio del potenziale U . La stabilità dell'equilibrio segue allora dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Osservazione. Analisi di stabilità nel caso critico

Si vogliono analizzare le proprietà di stabilità della configurazione $(s, \phi) = (0, 0)$ nel caso critico $Mg/kL = 1$. In tale ipotesi il potenziale del sistema assume la forma:

$$U(s, \phi) = kL^2 \left[-s^2 - s \sin \phi + \frac{1}{2} \cos \phi \right]$$

dalla quale si deduce che:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{kL^2} U(s, \phi) &= -s^2 - s \sin \phi - \frac{1}{4} \sin^2 \phi + \frac{1}{4} \sin^2 \phi + \frac{1}{2} \cos \phi = \\
 &= -\left(s + \frac{1}{2} \sin \phi \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \phi + \frac{1}{2} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \right) = \\
 &= -\left(s + \frac{1}{2} \sin \phi \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \phi - \sin^2 \frac{\phi}{2} + \frac{1}{2} = \\
 &= \frac{1}{2} - \left(s + \frac{1}{2} \sin \phi \right)^2 - \sin^2 \frac{\phi}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{\phi}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} - \left(s + \frac{1}{2} \sin \phi \right)^2 - \sin^4 \frac{\phi}{2}
 \end{aligned}$$

in modo che $\forall (s, \phi) \in [-\epsilon, \epsilon]^2$, con $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo, risulta

$$\frac{1}{kL^2} U(s, \phi) = \frac{1}{2} - \left(s + \frac{1}{2} \sin \phi \right)^2 - \sin^4 \frac{\phi}{2} < \frac{1}{2} = \frac{1}{kL^2} U(0, 0)$$

e quindi $(s, \phi) = (0, 0)$ si riconosce essere un massimo relativo proprio del potenziale. Si conclude che nel caso critico in effetti si ha stabilità dell'equilibrio.