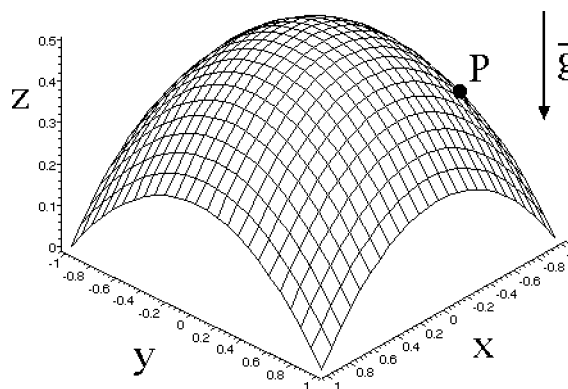


**Esercizio 1**

In una terna inerziale  $Oxyz$  un punto materiale di massa  $m$  è vincolato a restare sulla superficie fissa e liscia di parametrizzazione regolare:

$$\varphi(u, v) = (2u - 1) \hat{e}_1 + (2v - 1) \hat{e}_2 + (-u^2 - v^2 + u + v) \hat{e}_3 \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

e soggetto alla forza peso  $-mg \hat{e}_3$ .

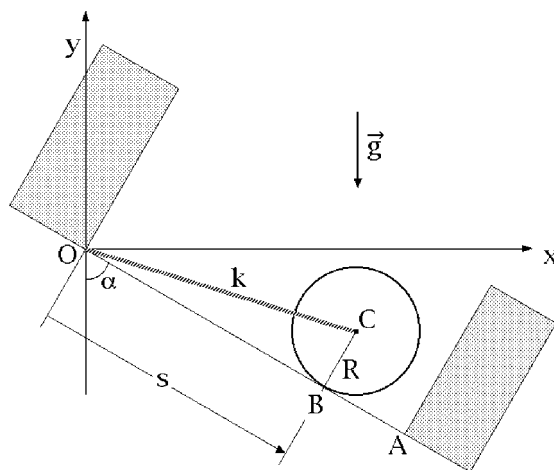


Determinare:

- (a) l'espressione dell'energia cinetica del sistema;
- (b) le equazioni pure del moto del sistema;
- (c) il momento angolare rispetto all'origine  $O$ ;
- (d) le configurazioni di equilibrio ordinarie;
- (e) se la posizione individuata da  $(u, v) = (1, 1/2)$  è un equilibrio di confine.

## Esercizio 2

Nel piano verticale  $Oxy$  di una terna cartesiana ortogonale destra un disco circolare omogeneo di centro  $C$ , massa  $m$  e raggio  $R$  è vincolato a rotolare senza strisciare su una retta  $OA$  passante per l'origine  $O$  e inclinata di un angolo  $\alpha \in (0, \pi/2)$  rispetto alla verticale discendente (vedi figura). Una molla ideale di costante elastica  $k$  congiunge il centro  $C$  del disco con l'origine  $O$ . Infine, due pareti rigide ed impenetrabili sono fissate ortogonalmente alla retta  $OA$ , rispettivamente in  $O$  e nel punto  $A$ , con  $|A - O| = 6R$ .



Nell'ipotesi che il sistema sia a vincoli ideali, ed assunta la distanza  $s \in [R, 5R]$  illustrata in figura come parametro lagrangiano, determinare:

- l'energia cinetica del sistema;
- la condizione affinché esista almeno una configurazione di equilibrio ordinaria;
- il carattere stabile o instabile delle configurazioni di equilibrio ordinarie, quando definite;
- le equazioni pure del moto del sistema;
- il periodo dei moti oscillatori, nel caso sia verificata la condizione (b);
- la condizione perché la configurazione di confine  $s = 5R$  sia un equilibrio per il sistema.

### Soluzione dell'esercizio 1

Conviene verificare in primo luogo che la parametrizzazione della superficie è effettivamente regolare. A questo scopo, osservato preliminarmente che l'applicazione  $\varphi$  è di classe  $C^\infty$ , è sufficiente riconoscere che le derivate parziali prime di tale applicazione:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \varphi_u(u, v) = 2\hat{e}_1 + (-2u + 1)\hat{e}_3 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \varphi_v(u, v) = 2\hat{e}_2 + (-2v + 1)\hat{e}_3$$

risultano linearmente indipendenti  $\forall (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , in quanto:

$$\begin{aligned} \varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 2 & 0 & 1 - 2u \\ 0 & 2 & 1 - 2v \end{vmatrix} = 2(2u - 1)\hat{e}_1 + 2(2v - 1)\hat{e}_2 + 4\hat{e}_3 = \\ &= (4u - 2)\hat{e}_1 + (4v - 2)\hat{e}_2 + 4\hat{e}_3 \neq 0 \quad \forall (u, v) \in [0, 1]^2. \end{aligned}$$

Il prodotto vettoriale  $\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)$  individua un vettore normale alla superficie nel punto  $\varphi(u, v)$  e, se normalizzato, fissa un orientamento per l'intera superficie regolare considerata.

#### (a) Energia cinetica

La posizione del punto  $P$  sulla superficie viene specificata completamente assegnando i valori delle coordinate generalizzate  $(u, v) \in [0, 1]^2$ . Il vettore posizione di  $P$  si scrive perciò nella forma:

$$P - O = \varphi(u, v) = (2u - 1)\hat{e}_1 + (2v - 1)\hat{e}_2 + (-u^2 - v^2 + u + v)\hat{e}_3$$

ed alla relativa velocità istantanea si perviene derivando rispetto al tempo  $t$  la stessa espressione, in cui  $u$  e  $v$  si intendano come funzioni  $C^2$  di  $t$  — moti regolari del sistema:

$$\dot{P} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)\dot{u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)\dot{v} = 2\dot{u}\hat{e}_1 + 2\dot{v}\hat{e}_2 + (-2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v})\hat{e}_3.$$

L'energia cinetica diventa così:

$$T = \frac{m}{2}|\dot{P}|^2 = \frac{m}{2}\left[4\dot{u}^2 + 4\dot{v}^2 + (-2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v})^2\right].$$

#### (b) Equazioni pure del moto

Tenuto conto dell'espressione generale dell'accelerazione per il punto vincolato:

$$\ddot{P} = 2\ddot{u}\hat{e}_1 + 2\ddot{v}\hat{e}_2 + (-2u\ddot{u} - 2\dot{u}^2 - 2v\ddot{v} - 2\dot{v}^2 + \ddot{u} + \ddot{v})\hat{e}_3$$

e applicando il postulato delle reazioni vincolari, la seconda legge della dinamica per il punto  $P$  si scrive:

$$m\ddot{P} = -mg\hat{e}_3 + \vec{\Phi} \quad (1)$$

in cui la reazione vincolare  $\vec{\Phi}$  deve essere diretta secondo la normale alla superficie nel punto  $\varphi(u, v)$  considerato — la componente di  $\vec{\Phi}$  tangenziale alla superficie deve comunque risultare nulla a causa dell'ipotesi di assenza di attrito. Poiché le derivate parziali  $\varphi_u(u, v)$  e  $\varphi_v(u, v)$  costituiscono una base dello spazio vettoriale tangente alla superficie nel punto  $\varphi(u, v)$ , la reazione vincolare deve soddisfare le relazioni:

$$\vec{\Phi} \cdot \varphi_u = 0 \quad \vec{\Phi} \cdot \varphi_v = 0$$

e le equazioni pure del moto si identificheranno con il sistema delle due equazioni scalari ottenute per proiezione della (1) lungo i vettori  $\varphi_u(u, v)$  e  $\varphi_v(u, v)$  rispettivamente:

$$\begin{cases} (m\ddot{P} + mg\hat{e}_3) \cdot \varphi_u = 0 \\ (m\ddot{P} + mg\hat{e}_3) \cdot \varphi_v = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (\ddot{P} + g\hat{e}_3) \cdot \varphi_u = 0 \\ (\ddot{P} + g\hat{e}_3) \cdot \varphi_v = 0. \end{cases}$$

Dalle espressioni di  $\ddot{P}$ ,  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  si deduce allora il sistema:

$$\begin{cases} 4\ddot{u} + (1 - 2u)(-2u\ddot{u} - 2\dot{u}^2 - 2v\ddot{v} - 2\dot{v}^2 + \ddot{u} + \ddot{v} + g) = 0 \\ 4\ddot{v} + (1 - 2v)(-2u\ddot{u} - 2\dot{u}^2 - 2v\ddot{v} - 2\dot{v}^2 + \ddot{u} + \ddot{v} + g) = 0 \end{cases}$$

equivalente a:

$$\begin{cases} [4 + (1 - 2u)^2]\ddot{u} + (1 - 2u)(1 - 2v)\ddot{v} + (1 - 2u)(-2\dot{u}^2 - 2\dot{v}^2 + g) = 0 \\ (1 - 2u)(1 - 2v)\ddot{u} + [4 + (1 - 2v)^2]\ddot{v} + (1 - 2v)(-2\dot{u}^2 - 2\dot{v}^2 + g) = 0 \end{cases}$$

che costituisce il sistema delle equazioni pure del moto cercate.

### **Osservazione. Riducibilità alla forma normale**

Il sistema di equazioni pure così ottenuto è riconducibile alla forma normale, in quanto la matrice dei coefficienti delle derivate seconde  $\ddot{u}$ ,  $\ddot{v}$ :

$$A(u, v) = \begin{pmatrix} 4 + (1 - 2u)^2 & (1 - 2u)(1 - 2v) \\ (1 - 2u)(1 - 2v) & 4 + (1 - 2v)^2 \end{pmatrix}$$

risulta invertibile  $\forall (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ :

$$\det A(u, v) = 16 + 4(1 - 2u)^2 + 4(1 - 2v)^2 \geq 16 > 0 \quad \forall (u, v) \in [0, 1]^2.$$

Allo stesso risultato si può pervenire, in tutta generalità, osservando che per un punto vincolato ad una superficie regolare  $C^2$  l'accelerazione di  $P$  è data dall'espressione:

$$\ddot{P} = \varphi_u \ddot{u} + \varphi_v \ddot{v} + \varphi_{uu} \dot{u}^2 + \varphi_{vv} \dot{v}^2 + 2\varphi_{uv} \dot{u} \dot{v}$$

e che se  $\vec{F}(P, \dot{P}, t) = \vec{\mathfrak{F}}(u, v, \dot{u}, \dot{v}, t)$  è il risultante delle sollecitazioni attive agenti su  $P$ , le equazioni pure del moto si riducono a:

$$\begin{cases} m\{\varphi_u \cdot \varphi_u \ddot{u} + \varphi_u \cdot \varphi_v \ddot{v} + \varphi_u \cdot [\varphi_{uu} \dot{u}^2 + \varphi_{vv} \dot{v}^2 + 2\varphi_{uv} \dot{u}\dot{v}]\} = \varphi_u \cdot \vec{\mathfrak{F}}(u, v, \dot{u}, \dot{v}, t) \\ m\{\varphi_v \cdot \varphi_u \ddot{u} + \varphi_v \cdot \varphi_v \ddot{v} + \varphi_v \cdot [\varphi_{uu} \dot{u}^2 + \varphi_{vv} \dot{v}^2 + 2\varphi_{uv} \dot{u}\dot{v}]\} = \varphi_v \cdot \vec{\mathfrak{F}}(u, v, \dot{u}, \dot{v}, t) \end{cases}$$

in modo che la matrice dei coefficienti delle derivate di ordine massimo si identifica con:

$$A(u, v) = \begin{pmatrix} \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix}$$

il cui determinante:

$$\det A(u, v) = \varphi_u \cdot \varphi_u \varphi_v \cdot \varphi_v - (\varphi_u \cdot \varphi_v)^2 = |\varphi_u|^2 |\varphi_v|^2 - |\varphi_u \cdot \varphi_v|^2$$

risulta strettamente positivo in forza della diseuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$|\varphi_u \cdot \varphi_v| \leq |\varphi_u| |\varphi_v|$$

nella quale l'uguaglianza sussiste se e soltanto se i vettori  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  risultano nulli o paralleli:

$$|\varphi_u \cdot \varphi_v| = |\varphi_u| |\varphi_v| \iff \varphi_u \parallel \varphi_v$$

circostanza che è espressamente esclusa dalla condizione di regolarità della superficie:

$$\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

### Osservazione. Equazioni di Lagrange

Le equazioni ottenute coincidono con quelle di Lagrange, applicabili in quanto l'assenza di attrito radente su  $P$  equivale ad assumere che il sistema sia a vincoli ideali. Si ha in effetti la seguente espressione per il potenziale gravitazionale e totale del sistema:

$$U_g = -mg(P - O) \cdot \hat{e}_3 = -mg(-u^2 - v^2 + u + v) = mg(u^2 + v^2 - u - v)$$

mentre per l'energia cinetica vale l'espressione:

$$T = \frac{m}{2} [4\dot{u}^2 + 4\dot{v}^2 + (-2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v})^2]$$

che sommata alla precedente porge la lagrangiana del sistema:

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{m}{2} [4\dot{u}^2 + 4\dot{v}^2 + (-2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v})^2] + mg(u^2 + v^2 - u - v).$$

Di qui si deducono le relazioni:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} &= m[4\dot{u} + (-2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v})(1 - 2u)] \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}\right) &= m[4\ddot{u} + (-2u\ddot{u} - 2\dot{u}^2 - 2v\ddot{v} - 2\dot{v}^2 + \ddot{u} + \ddot{v})(1 - 2u) \\ &\quad - 2\dot{u}(-2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v})] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} &= m[(-2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v})(-2\dot{u})] + mg(2u - 1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} &= m[4\dot{v} + (-2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v})(1 - 2v)] \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}}\right) &= m[4\ddot{v} + (-2u\ddot{u} - 2\dot{u}^2 - 2v\ddot{v} - 2\dot{v}^2 + \ddot{u} + \ddot{v})(1 - 2v) \\ &\quad - 2\dot{v}(-2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v})] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} &= m[(-2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v})(-2\dot{v})] + mg(2v - 1)\end{aligned}$$

ed infine le equazioni lagrangiane richieste:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 0$$

ovvero:

$$m[[4 + (1 - 2u)^2]\ddot{u} + (1 - 2u)(1 - 2v)\ddot{v} + (1 - 2u)(-2\dot{u}^2 - 2\dot{v}^2 + g)] = 0$$

$$m[(1 - 2u)(1 - 2v)\ddot{u} + [4 + (1 - 2u)^2]\ddot{v} + (1 - 2v)(-2\dot{u}^2 - 2\dot{v}^2 + g)] = 0$$

che coincidono con quelle già ricavate in precedenza. Il risultato ottenuto è a priori evidente, in quanto l'espressione delle velocità virtuali relative ad una configurazione  $P - O = \varphi(u, v)$ ,  $(u, v) \in (0, 1)^2$ , si scrive:

$$\vec{v} = \alpha\varphi_u(u, v) + \beta\varphi_v(u, v) \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

e l'equazione simbolica della dinamica diventa:

$$(m\ddot{P} - m\vec{g}) \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \text{ velocità virtuale } \vec{v} \text{ relativa a } \varphi(u, v)$$

ossia:

$$(m\ddot{P} - m\vec{g}) \cdot \varphi_u(u, v)\alpha + (m\ddot{P} - m\vec{g}) \cdot \varphi_v(u, v)\beta = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

riducendosi quindi, come affermato, al sistema delle equazioni di Lagrange:

$$\begin{cases} (m\ddot{P} - m\vec{g}) \cdot \varphi_u = 0 \\ (m\ddot{P} - m\vec{g}) \cdot \varphi_v = 0. \end{cases}$$

(c) **Momento angolare in  $O$**

Il momento angolare del punto materiale  $P$  rispetto all'origine  $O$  si determina applicando la definizione:

$$\begin{aligned}\vec{K}_O &= (P - O) \wedge m\dot{P} = \\ &= [(2u-1)\hat{e}_1 + (2v-1)\hat{e}_2 + (-u^2 - v^2 + u + v)\hat{e}_3] \wedge m[2\dot{u}\hat{e}_1 + 2\dot{v}\hat{e}_2 + (-2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v})\hat{e}_3] = \\ &= m \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 2u-1 & 2v-1 & -u^2 - v^2 + u + v \\ 2\dot{u} & 2\dot{v} & -2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v} \end{vmatrix} = \\ &= m[(2v-1)(-2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v}) - 2\dot{v}(-u^2 - v^2 + u + v)]\hat{e}_1 + \\ &+ m[2\dot{u}(-u^2 - v^2 + u + v) - (2u-1)(-2u\dot{u} - 2v\dot{v} + \dot{u} + \dot{v})]\hat{e}_2 + \\ &+ m[(2u-1)2\dot{v} - (2v-1)2\dot{u}]\hat{e}_3.\end{aligned}$$

(d) **Configurazioni di equilibrio ordinarie**

Il sistema è scleronomo, posizionale e conservativo. Gli equilibri ordinari sono i punti critici del potenziale:

$$U(u, v) = U_g = -mg(P - O) \cdot \hat{e}_3 = mg(u^2 + v^2 - u - v)$$

nel dominio aperto  $\{(u, v) \in (0, 1) \times (0, 1)\}$ . Si ha:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial u} = 2u - 1 = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial v} = 2v - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{1}{2} \end{cases}$$

per cui  $(u, v) = (1/2, 1/2) \in (0, 1)^2$  è l'unica configurazione di equilibrio ordinaria del sistema.

(e) **Verifica che  $P(1, 1/2)$  è una configurazione di equilibrio di confine**

La coppia ordinata  $(u, v) = (1, 1/2)$  appartiene alla frontiera del dominio di definizione della parametrizzazione del sistema olonomo — i lati del quadrato  $[0, 1]^2$ :

$$(1, 1/2) \in \partial[0, 1]^2$$

e quindi la configurazione considerata è certamente di confine per il sistema. Per il teorema dei lavori virtuali, si tratta di un equilibrio se e soltanto se il lavoro virtuale delle sollecitazioni attive — il peso — risulta non positivo per ogni spostamento virtuale  $(\delta u, \delta v)$  relativo alla configurazione considerata, ossia:

$$Q_u(1, 1/2)\delta u + Q_v(1, 1/2)\delta v \leq 0 \quad \forall \delta u \leq 0 \quad \forall \delta v \in \mathbb{R}$$

il che equivale a richiedere:

$$Q_u(1, 1/2) \geq 0 \quad \text{e} \quad Q_v(1, 1/2) = 0.$$

Nella fattispecie vale:

$$Q_u(1, 1/2) = \frac{\partial U}{\partial u}(1, 1/2) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 > 0$$

$$Q_v(1, 1/2) = \frac{\partial U}{\partial v}(1, 1/2) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

in modo che entrambe le condizioni per l'equilibrio sono verificate.

## Soluzione dell'esercizio 2

### (a) Energia cinetica del sistema

La velocità angolare istantanea del disco si ricava imponendo la condizione di rotolamento senza strisciamento sul segmento  $OA$ . Poiché il moto è piano, detta velocità angolare deve assumere la forma:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3 \quad \omega \in \mathbb{R}$$

e indicato con  $B$  il punto di contatto fra segmento  $OA$  e disco, dall'espressione generale dell'atto di moto rigido segue che:

$$0 = \dot{B} = \dot{C} + \omega \hat{e}_3 \wedge (B - C).$$

Le ovvie relazioni geometriche:

$$\begin{aligned} B - C &= -R \cos \alpha \hat{e}_1 - R \sin \alpha \hat{e}_2 \\ C - O &= C - B + B - O = R \cos \alpha \hat{e}_1 + R \sin \alpha \hat{e}_2 + s \sin \alpha \hat{e}_1 - s \cos \alpha \hat{e}_2 \end{aligned}$$

implicano la seguente espressione per la velocità assoluta del centro  $C$ :

$$\dot{C} = \dot{s} \sin \alpha \hat{e}_1 - \dot{s} \cos \alpha \hat{e}_2$$

in modo che la condizione di puro rotolamento diventa:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{s} \sin \alpha \hat{e}_1 - \dot{s} \cos \alpha \hat{e}_2 + \omega \hat{e}_3 \wedge (-R \cos \alpha \hat{e}_1 - R \sin \alpha \hat{e}_2) = \\ &= \dot{s}(\sin \alpha \hat{e}_1 - \cos \alpha \hat{e}_2) + \omega R(-\cos \alpha \hat{e}_2 + \sin \alpha \hat{e}_1) = \\ &= (\dot{s} + \omega R)(\sin \alpha \hat{e}_1 - \cos \alpha \hat{e}_2). \end{aligned}$$

Essendo certamente  $\sin \alpha \hat{e}_1 - \cos \alpha \hat{e}_2 \neq 0$ , si conclude che:

$$\dot{s} + \omega R = 0 \quad \iff \quad \omega = -\frac{\dot{s}}{R}$$

per cui il vettore velocità angolare istantanea del disco si riduce a:

$$\vec{\omega} = -\frac{\dot{s}}{R} \hat{e}_3.$$

L'energia cinetica del disco viene quindi calcolata per mezzo del teorema di König, in termini del momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse  $Cz$ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}|\dot{C}|^2 + \frac{1}{2}I_{Cz}|\vec{\omega}|^2 = \frac{m}{2}|\dot{C}|^2 + \frac{1}{2}I_{Cz}\left|-\frac{\dot{s}}{R}\hat{e}_3\right|^2 = \\ &= \frac{m}{2}\left|\dot{s}\sin\alpha\hat{e}_1 - \dot{s}\cos\alpha\hat{e}_2\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{\dot{s}^2}{R^2} = \frac{m\dot{s}^2}{2} + \frac{m\dot{s}^2}{4} = \frac{3}{4}m\dot{s}^2. \end{aligned}$$

**(b) Condizione per l'esistenza degli equilibri ordinari**

Il sistema è soggetto esclusivamente a sollecitazioni posizionali e conservative, vale a dire il peso e l'interazione elastica fra i punti  $O$  e  $C$ . Gli eventuali equilibri ordinari devono perciò identificarsi con i punti critici del potenziale totale, definito dalla somma di un contributo gravitazionale e di uno elastico. Il potenziale gravitazionale del disco è dato da:

$$U_g = -mg\hat{e}_2 \cdot (C - O) = -mg(R\sin\alpha - s\cos\alpha) = mg(s\cos\alpha - R\sin\alpha)$$

mentre quello elastico dovuto all'interazione fra l'origine  $O$  ed il centro  $C$  del disco risulta:

$$U_{el} = -\frac{k}{2}|C - O|^2 = -\frac{k}{2}(s^2 + R^2).$$

Omesse le costanti additive inessenziali, il potenziale del sistema si scrive pertanto:

$$U(s) = U_g + U_{el} = mg\cos\alpha s - \frac{k}{2}s^2 \quad s \in [R, 5R].$$

Le configurazioni ordinarie di equilibrio sono i punti critici di tale potenziale compresi nell'intervallo  $R < s < 5R$ : deve esistere  $s^* \in (R, 5R)$  tale che  $U'(s^*) = 0$ . Si ha così:

$$U'(s^*) = mg\cos\alpha - ks^* = 0 \quad \iff \quad s^* = \frac{mg}{k}\cos\alpha$$

ma deve risultare nel contempo:

$$R < \frac{mg}{k}\cos\alpha < 5R$$

ossia:

$$1 < \frac{mg}{kR}\cos\alpha < 5$$

che è la condizione di esistenza cercata.

**(c) Stabilità degli equilibri ordinari, quando definiti**

Laddove ricorra la condizione stabilita al precedente punto (b), esiste una ed una sola configurazione di equilibrio ordinaria del sistema:

$$s = s^* = \frac{mg}{k}\cos\alpha$$

e siccome:

$$U''(s) = -k < 0 \quad \forall s \in (R, 5R)$$

si conclude che quando definita una tale configurazione di equilibrio ordinaria costituisce un massimo relativo proprio del potenziale ed è quindi stabile in forza del teorema di Lagrange-Dirichlet.

#### (d) Equazioni pure del moto

Dal momento che il sistema è olonomo, ad un solo grado di libertà e a vincoli ideali, le equazioni pure del moto si riducono all'unica equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0$$

con lagrangiana:

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{3}{4}m\dot{s}^2 + mg \cos \alpha s - \frac{k}{2}s^2.$$

Le relazioni immediate:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{3}{2}m\ddot{s} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = mg \cos \alpha - ks$$

consentono di scrivere l'equazione di Lagrange in forma esplicita:

$$\frac{3}{2}m\ddot{s} - mg \cos \alpha + ks = 0.$$

#### (e) Periodo dei moti oscillatori

L'equazione del moto può risciversi come:

$$\frac{3}{2}m\ddot{s} + k \left( s - \frac{mg}{k} \cos \alpha \right) = 0$$

ossia, richiamando la definizione di  $s^*$ :

$$\frac{d^2}{dt^2}(s - s^*) + \frac{2k}{3m}(s - s^*) = 0$$

e si identifica con l'equazione di un oscillatore armonico semplice unidimensione di centro  $s^*$  e pulsazione:

$$\Omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}.$$

Per valori sufficientemente piccoli dell'energia meccanica totale — si ricordi che deve aversi  $R \leq s \leq 5R$  — i moti del sistema sono armonici con periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{2k}}.$$

**(f) Condizione affinché  $s = 5R$  sia un equilibrio di confine**

Per il teorema dei lavori virtuali, applicabile in quanto il sistema è per ipotesi a vincoli ideali, la configurazione individuata da  $s = 5R$  corrisponde ad un equilibrio — di confine — se e soltanto se il lavoro virtuale delle sollecitazioni attive risulta non positivo per ogni spostamento virtuale del sistema nella configurazione considerata:

$$Q_s(5R) \delta s \leq 0 \quad \delta s \leq 0$$

ossia:

$$Q_s(5R) \geq 0$$

condizione che equivale alla seguente:

$$U'(5R) \geq 0$$

e si esprime esplicitamente come:

$$mg \cos \alpha - 5Rk \geq 0.$$

La condizione perché la configurazione considerata sia di equilibrio diventa pertanto:

$$\frac{mg \cos \alpha}{5kR} \geq 1.$$