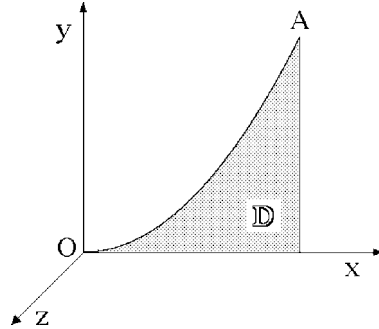


**Esercizio 1**

Nel piano  $Oxy$  della terna cartesiana  $Oxyz$  si considera la lamina omogenea  $\mathbb{D}$ , di densità  $\mu/L^2$ , individuata da:

$$\mathbb{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq x^2/L, \quad z = 0\}$$

con  $L$  costante positiva fissata.

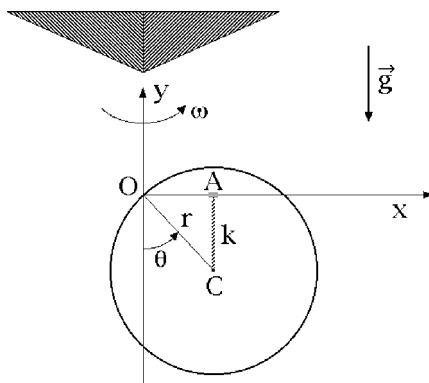


Determinare:

- (a) la massa della lamina;
- (b) la posizione del baricentro della lamina, rispetto alla terna assegnata;
- (c) la matrice d'inerzia della lamina rispetto alla terna  $Oxyz$ ;
- (d) il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse passante per l'origine e per il punto  $A(L, L, 0)$ ;
- (e) la velocità angolare istantanea da imprimere alla lamina, mantenendo fisso il punto  $O$ , in modo che il momento angolare in  $O$  valga  $(0, 0, -2\mu L^2\omega)$ .

## Esercizio 2

Nel piano verticale  $Oxy$  di una terna cartesiana  $Oxyz$  si considera un disco omogeneo di centro  $C$ , raggio  $r$  e massa  $m$ , il cui bordo passa per l'origine  $O$ . Il disco è pesante e vincolato a ruotare attorno all'asse  $Oz$ , con una molla di costante elastica  $k$  che congiunge  $C$  alla sua proiezione ortogonale  $A$  sull'asse  $Ox$ . La terna  $Oxyz$  ruota inoltre attorno all'asse verticale  $Oy$  con velocità angolare costante  $\omega$ .



I vincoli sono ideali e la configurazione del sistema viene descritta per mezzo dell'angolo  $\theta$  illustrato in figura. Un ostacolo impone la limitazione  $-2\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3$ . Determinare, rispetto alla terna  $Oxyz$ :

- le configurazioni di equilibrio ordinarie e di confine, se definite;
- le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- l'energia cinetica del sistema;
- le equazioni di Lagrange;
- un integrale primo del sistema.

### Soluzione dell'esercizio 1

#### (a) Massa della lamina

La massa  $m$  della lamina si ottiene integrando sul dominio  $\mathbb{D}$  la densità costante  $\mu/L^2$ . Posto per brevità  $f(x) = x^2/L$ , si può scrivere pertanto:

$$m = \int_0^L dx \int_0^{f(x)} dy \frac{\mu}{L^2} = \frac{\mu}{L^2} \int_0^L f(x) dx = \frac{\mu}{L^2} \int_0^L \frac{x^2}{L} dx = \frac{\mu}{L^2} \left[ \frac{L^3}{3L} \right] = \frac{\mu}{3}.$$

#### (b) Baricentro della lamina

Si indichi con:

$$G - O = x_G \hat{e}_1 + y_G \hat{e}_2 + z_G \hat{e}_3$$

il vettore posizione del baricentro  $G$  rispetto alla terna  $Oxyz$ . Poiché la lamina giace nel piano coordinato  $Oxy$ , si ha che  $G$  deve appartenere allo stesso piano di simmetria, per cui:

$$z_G = 0.$$

Quanto all'ascissa  $x_G$ , questa per definizione deve soddisfare l'equazione:

$$m x_G = \int_0^L dx \int_0^{f(x)} dy \frac{\mu}{L^2} x = \int_0^L dx f(x) \frac{\mu}{L^2} x = \frac{\mu}{L^2} \int_0^L x f(x) dx = \frac{\mu}{L^2} \int_0^L \frac{x^3}{L} dx = \frac{\mu L}{4}$$

in modo che risulta:

$$x_G = \frac{1}{m} \frac{\mu L}{4} = \frac{3}{\mu} \frac{\mu L}{4} = \frac{3}{4} L.$$

Una espressione analoga vale per l'ordinata  $y_G$ :

$$m y_G = \int_0^L dx \int_0^{f(x)} dy \frac{\mu}{L^2} y = \frac{\mu}{L^2} \int_0^L \frac{1}{2} f(x)^2 dx = \frac{\mu}{2L^2} \int_0^L \frac{x^4}{L^2} dx = \frac{\mu L}{10}$$

che risulta perciò:

$$y_G = \frac{1}{m} \frac{\mu L}{10} = \frac{3}{\mu} \frac{\mu L}{10} = \frac{3}{10} L.$$

La posizione del baricentro rispetto alla terna  $Oxyz$  è quindi individuata da:

$$G - O = \frac{3}{4} L \hat{e}_1 + \frac{3}{10} L \hat{e}_2.$$

#### (c) Matrice d'inerzia

La lamina  $\mathbb{D}$  è collocata nel piano coordinato  $Oxy$ , che quindi costituisce un ovvio piano di simmetria e si identifica con un piano principale d'inerzia per l'operatore d'inerzia del sistema rispetto ad ogni suo punto. Si ha in effetti:

$$L_{xz} = L_{yz} = 0$$

ed inoltre:

$$L_{zz} = L_{xx} + L_{yy}$$

per cui la matrice d'inerzia è univocamente determinata una volta che siano stati calcolati i momenti  $L_{xx}$ ,  $L_{yy}$  e il prodotto d'inerzia  $L_{xy}$ . Il momento d'inerzia rispetto all'asse  $Ox$  si ricava applicando la definizione:

$$L_{xx} = \int_0^L dx \int_0^{f(x)} dy \frac{\mu}{L^2} y^2 = \frac{\mu}{L^2} \int_0^L dx \frac{1}{3} f(x)^3 = \frac{\mu}{3L^2} \int_0^L f(x)^3 dx = \frac{\mu}{3L^2} \int_0^L \frac{x^6}{L^3} dx = \frac{\mu L^2}{21},$$

in modo analogo al momento d'inerzia rispetto ad  $Oy$ :

$$L_{yy} = \int_0^L dx \int_0^{f(x)} dy \frac{\mu}{L^2} x^2 = \frac{\mu}{L^2} \int_0^L x^2 f(x) dx = \frac{\mu}{L^2} \int_0^L \frac{x^4}{L} dx = \frac{\mu L^2}{5}$$

mentre per il prodotto d'inerzia  $L_{xy}$  si ha:

$$L_{xy} = - \int_0^L dx \int_0^{f(x)} dy \frac{\mu}{L^2} xy = - \frac{\mu}{2L^2} \int_0^L f(x)^2 x dx = - \frac{\mu}{2L^2} \int_0^L \frac{x^5}{L^2} dx = - \frac{\mu L^2}{12}.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse  $Oz$  risulta pertanto:

$$L_{zz} = L_{xx} + L_{yy} = \left( \frac{1}{21} + \frac{1}{5} \right) \mu L^2 = \frac{26}{105} \mu L^2$$

e la matrice d'inerzia relativa alla terna  $Oxyz$  si scrive:

$$[L] = \mu L^2 \begin{pmatrix} 1/21 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 26/105 \end{pmatrix}.$$

**(d) Momento d'inerzia rispetto all'asse  $OA$**

La retta  $OA$  passa per l'origine della terna di riferimento  $Oxyz$ . Il momento d'inerzia relativo a tale asse può allora esprimersi per mezzo della relazione matriciale:

$$I_{OA} = (n_1 \ n_2 \ n_3) [L] \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

in termini della matrice d'inerzia  $[L]$  e delle componenti  $n_1, n_2, n_3$  del versore  $\hat{n}$  associato alla retta. Nella fattispecie:

$$\hat{n} = \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2}{|\hat{e}_1 + \hat{e}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2$$

e conseguentemente:

$$\begin{aligned}
 I_{OA} &= (1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2} \ 0) \mu L^2 \begin{pmatrix} 1/21 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 26/105 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \mu L^2 \frac{1}{2} (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1/21 - 1/12 \\ -1/12 + 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu L^2}{2} \left( \frac{1}{21} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5} \right) = \frac{17}{420} \mu L^2.
 \end{aligned}$$

**(e) Velocità angolare istantanea**

Se  $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$  è la velocità angolare istantanea della lamina, il momento angolare in  $O$  ha componenti:

$$[L] \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \mu L^2 \begin{pmatrix} 1/21 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 26/105 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

e quindi il vettore velocità angolare istantanea per il quale il momento angolare in  $O$  vale  $-2\mu L^2 \omega \hat{e}_3$  è individuato dall'equazione:

$$\mu L^2 \begin{pmatrix} 1/21 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 26/105 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\mu L^2 \omega \end{pmatrix}$$

la quale fornisce  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  e:

$$\frac{26}{105} \mu L^2 \omega_3 = -2\mu L^2 \omega$$

ossia:

$$\omega_3 = \frac{105}{26\mu L^2} (-2\mu L^2 \omega) = -\frac{105}{13} \omega.$$

La velocità angolare richiesta è pertanto:

$$\vec{\omega} = -\frac{105}{13} \omega \hat{e}_3.$$

**Soluzione dell'esercizio 2**

**(a) Equilibri ordinari e di confine**

Il sistema è scleronomo e soggetto esclusivamente a sollecitazioni posizionali e conservative; le sue configurazioni sono individuate dai valori  $\theta \in [-2\pi/3, 2\pi/3]$  dell'angolo di rotazione, per cui il sistema deve intendersi a vincoli unilaterali. Gli equilibri ordinari si identificano tutti e soltanto con i punti critici del potenziale totale  $U$ , mentre i soli candidati al ruolo di equilibri di confine sono le due configurazioni corrispondenti a  $\theta = -2\pi/3$  e  $\theta = 2\pi/3$ . Causa il moto di rotazione attorno all'asse verticale  $Oy$ , la terna  $Oxyz$  è non inerziale e sede

di sollecitazioni d'inerzia. Le forze di Coriolis dipendono dalla velocità, ma sono dirette ortogonalmente al piano vincolare  $Oxy$ , sicché la loro componente lagrangiana si mantiene costantemente nulla ed è del tutto ininfluenza sul moto. Alle sollecitazioni centrifughe agenti sul disco si accompagna il potenziale:

$$U_{cf} = \frac{\omega^2}{2}mr^2\sin^2\theta.$$

Il potenziale delle forze peso è invece dato da:

$$U_g = -mg(C - O) \cdot \hat{e}_2 = -mg(-r \cos \theta) = mgr \cos \theta,$$

mentre per il potenziale dell'interazione elastica fra i punti  $C$  ed  $A$  si ha l'espressione:

$$U_{el} = -\frac{k}{2}|C - A|^2 = -\frac{k}{2}r^2\cos^2\theta = \frac{kr^2}{2}\sin^2\theta + \text{costante}.$$

Il potenziale del sistema si scrive pertanto, omesse le costanti additive:

$$\begin{aligned} U(\theta) &= \frac{\omega^2}{2}mr^2\sin^2\theta + mgr \cos \theta + \frac{kr^2}{2}\sin^2\theta = \\ &= \frac{m\omega^2 + k}{2}r^2\sin^2\theta + mgr \cos \theta \quad \forall \theta \in [-2\pi/3, 2\pi/3]. \end{aligned}$$

La componente lagrangiana delle sollecitazioni attive è la derivata del potenziale:

$$Q_\theta = (m\omega^2 + k)r^2 \sin \theta \cos \theta - mgr \sin \theta \quad \forall \theta \in [-2\pi/3, 2\pi/3].$$

Gli equilibri ordinari del sistema sono i punti critici del potenziale, ovvero gli zeri della componente  $Q_\theta$ :

$$(m\omega^2 + k)r^2 \sin \theta \cos \theta - mgr \sin \theta = 0$$

e quindi le soluzioni dell'equazione trigonometrica:

$$[(m\omega^2 + k)r^2 \cos \theta - mgr] \sin \theta = 0$$

che possono ottenersi per:

$$\sin \theta = 0$$

oppure per:

$$(m\omega^2 + k)r^2 \cos \theta - mgr = 0.$$

Dalla prima equazione si hanno, sempre definite, le configurazioni di equilibrio:

$$\theta = 0, \quad \pi,$$

mentre la seconda porge gli ulteriori equilibri:

$$\theta = \pm\theta^*, \quad \text{con} \quad \theta^* = \theta^* = \arccos \left[ \frac{mg}{(m\omega^2 + k)r} \right] \in (0, \pi/2),$$

definiti e distinti dagli equilibri precedenti se e soltanto se

$$\frac{mg}{(m\omega^2 + k)r} < 1.$$

La presenza di equilibri in corrispondenza delle configurazioni di confine deve essere accertata mediante il teorema dei lavori virtuali.

**Configurazione  $\theta = -2\pi/3$**

La condizione di equilibrio è data dal teorema dei lavori virtuali:

$$Q_\theta(-2\pi/3) \delta\theta \leq 0 \quad \forall \delta\theta \geq 0$$

e si riduce alla disequazione:

$$Q_\theta(-2\pi/3) \leq 0$$

che si scrive esplicitamente come:

$$(m\omega^2 + k)r^2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) - mgr \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leq 0$$

ossia:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(m\omega^2 + k)r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}mgr \leq 0,$$

condizione ovviamente non verificata. La configurazione non è un equilibrio di confine.

**Configurazione  $\theta = 2\pi/3$**

Il teorema dei lavori virtuali assume in questo caso la forma:

$$Q_\theta(2\pi/3) \delta\theta \leq 0 \quad \forall \delta\theta \leq 0$$

e conduce alla disequazione caratteristica:

$$Q_\theta(2\pi/3) \geq 0$$

vale a dire:

$$(m\omega^2 + k)r^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) - mgr \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq 0.$$

La condizione non è mai verificata:

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}(m\omega^2 + k)r^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}mgr \geq 0$$

per cui nemmeno questa configurazione di confine costituisce un equilibrio.

**(b) Stabilità degli equilibri ordinari**

Si calcola preliminarmente la derivata seconda del potenziale:

$$U''(\theta) = (m\omega^2 + k)r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - mgr \cos\theta$$

per procedere all'analisi di stabilità delle singole configurazioni di equilibrio ordinarie.

### Configurazione $\theta = 0$

Per questa configurazione la derivata seconda del potenziale è data dall'espressione:

$$U''(0) = (m\omega^2 + k)r^2 - mgr$$

e si devono quindi esaminare tre casi distinti:

se  $mg/(m\omega^2 + k)r > 1$  si ha che  $U''(0) < 0$  per cui la configurazione è un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet;

per  $mg/(m\omega^2 + k)r < 1$  la derivata seconda del potenziale è positiva e dal teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet segue l'instabilità della configurazione;

se  $mg/(m\omega^2 + k)r = 1$ , risulta  $U''(0) = 0$  e ricorre un caso critico. Si rende necessaria una ulteriore analisi del potenziale del sistema:

$$\begin{aligned} U(\theta) &= (m\omega^2 + k)r^2 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \cos \theta \right] = \\ &= (m\omega^2 + k)r^2 \left[ 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] = \\ &= (m\omega^2 + k)r^2 \left[ 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - 2 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right) + 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] = \\ &= (m\omega^2 + k)r^2 \left[ 1 - 2 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

per il quale il punto  $\theta = 0$  rappresenta chiaramente un massimo relativo proprio, stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

### Configurazione $\theta = \pi$

La configurazione è caratterizzata dal segno positivo della derivata seconda del potenziale:

$$U''(\pi) = (m\omega^2 + k)r^2 + mgr > 0$$

ed è quindi instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

### Configurazioni $\theta = \pm\theta^*$

Le configurazioni hanno le stesse proprietà di stabilità in quanto condividono la stessa espressione della derivata seconda:

$$\begin{aligned} U''(\pm\theta^*) &= (m\omega^2 + k)r^2 (\cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^*) - mgr \cos \theta^* = \\ &= (m\omega^2 + k)r^2 \left[ \cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^* - \frac{mg}{(m\omega^2 + k)r} \cos \theta^* \right] = -(m\omega^2 + k)r^2 \sin^2 \theta^* \end{aligned}$$

che risulta di segno negativo. Le configurazioni  $\theta = \pm\theta^*$ , quando definite, rappresentano dei massimi relativi propri del potenziale e sono perciò stabili per Lagrange-Dirichlet.

(c) **Energia cinetica**

Il disco ruota attorno all'asse fisso  $Oz$  con velocità angolare  $\dot{\theta} \hat{e}_3$  e momento d'inerzia:

$$I_{Ox} = mr^2 + I_{Cx} = mr^2 + \frac{mr^2}{2} = \frac{3}{2}mr^2.$$

L'energia cinetica relativa alla terna  $Oxyz$  si trova essere perciò:

$$T = \frac{1}{2} I_{Ox} |\dot{\theta} \hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} mr^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} mr^2 \dot{\theta}^2.$$

(d) **Equazioni di Lagrange**

La lagrangiana del sistema si scrive:

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{3}{4} mr^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m\omega^2 + k}{2} r^2 \sin^2 \theta + mgr \cos \theta$$

per cui:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{3}{2} mr^2 \dot{\theta} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{3}{2} mr^2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= (m\omega^2 + k) r^2 \sin \theta \cos \theta - mgr \sin \theta \end{aligned}$$

e le equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

diventano:

$$\frac{3}{2} mr^2 \ddot{\theta} - (m\omega^2 + k) r^2 \sin \theta \cos \theta + mgr \sin \theta = 0.$$

Nell'ipotesi di vincoli ideali questa è l'equazione pura del moto del sistema.

(e) **Integrale primo**

Il sistema è posizionale e conservativo, a vincoli indipendenti dal tempo, e quindi un integrale primo è quello dell'energia meccanica:

$$H = T - U = \frac{3}{4} mr^2 \dot{\theta}^2 - \frac{m\omega^2 + k}{2} r^2 \sin^2 \theta - mgr \cos \theta.$$