1. Esercizio sui vettori applicati

In una terna cartesiana ortogonale destra $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ si considera il sistema $\mathbb{S}$ di vettori applicati:

$$(P_1, \vec{v}_1) \qquad (P_2, \vec{v}_2) \qquad (P_3, \vec{v}_3) \qquad (P_4, \vec{v}_4)$$

con:

$$\begin{array}{ll} P_1(0,-1,-1) & \vec{v}_1 = -\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3 \\ P_2(-2,1,3) & \vec{v}_2 = 2\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3 \\ P_3(-2,-2,2) & \vec{v}_3 = -3\,\hat{e}_1 + 6\,\hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3 \\ P_4(3,-5,2) & \vec{v}_4 = \hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 + \hat{e}_3\,. \end{array}$$

Determinare del sistema $\mathbb{S}$:

(a) l'asse centrale, se definito, verificando il risultato;

(b) il centro, se definito;

(c) il momento rispetto all'asse r di equazione parametrica

$$x = 12\xi + 1\,, \quad y = 3\xi\,, \quad z = -4\xi + 3\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,,$$

orientato secondo le ξ decrescenti.

Soluzione

(a) **Asse centrale**

Risultante

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{4} \vec{v}_i = (-\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3) + (2\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3) + \\ + (-3\,\hat{e}_1 + 6\,\hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3) + (\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 + \hat{e}_3) = -\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + \mathbf{2}\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{2} - \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$$

Poichè $\vec{R} \neq 0$, è definito l'asse centrale a del sistema di vettori applicati.

Momento risultante in O

$$\vec{\mathbf{M}}_\mathbf{O} = \sum_{i=1}^{4} (P_i - O) \wedge \vec{v}_i =$$

$$\begin{aligned} &= (-\hat{e}_2 - \hat{e}_3) \wedge (-\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3) + \\ &+ (-2\,\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3) \wedge (2\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3) + \\ &+ (-2\,\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3) \wedge (-3\,\hat{e}_1 + 6\,\hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3) + \\ &+ (3\,\hat{e}_1 - 5\,\hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3) \wedge (\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 + \hat{e}_3) = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (3\,\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3) + (14\,\hat{e}_1 + 10\,\hat{e}_2 + 6\,\hat{e}_3) + \\ &+ (-6\,\hat{e}_1 - 12\,\hat{e}_2 - 18\,\hat{e}_3) + (-\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - \hat{e}_3) = \mathbf{10}\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{1} - \mathbf{2}\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{2} - \mathbf{14}\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{3}\,. \end{aligned}$$

Prodotto vettoriale $\vec{R} \wedge \vec{M}_O / |\vec{R}|^2$
Si ha:

$$\begin{aligned} \vec{R} \wedge \vec{M}_O &= (-\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3) \wedge (10\,\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 - 14\,\hat{e}_3) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & -14 \end{vmatrix} = \mathbf{-30\,\hat{e}_1 - 24\,\hat{e}_2 - 18\,\hat{e}_3}\,, \end{aligned}$$

per cui:

$$\frac{\vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{\mathbf{M}}_\mathbf{O}}{|\vec{\mathbf{R}}|^\mathbf{2}} = \frac{-30\,\hat{e}_1 - 24\,\hat{e}_2 - 18\,\hat{e}_3}{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{-30\,\hat{e}_1 - 24\,\hat{e}_2 - 18\,\hat{e}_3}{6} = \mathbf{-5\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3}$$

Asse centrale
L'asse centrale è il luogo dei punti A individuati dai vettori posizione:

$$A - O = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \alpha\vec{R} \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Sostituendo le espressioni precedentemente ricavate si ottiene allora:

$$\begin{aligned} A - O &= -5\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3 + \alpha(-\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3) = \\ &= (\mathbf{-5} - \alpha)\mathbf{\hat{e}_1} + (\mathbf{-4} + \mathbf{2}\alpha)\mathbf{\hat{e}_2} + (\mathbf{-3} - \alpha)\mathbf{\hat{e}_3} \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e l'equazione parametrica dell'asse centrale a assume la forma:

$$\begin{cases} x = -5 - \alpha \\ y = -4 + 2\alpha \\ z = -3 - \alpha \end{cases} \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Verifica che la retta ottenuta è effettivamente l'asse centrale
Basta verificare, come da definizione, che rispetto ad un punto qualsiasi di a il momento risultante di $\mathbb{S}$ risulta parallelo a $\vec{R}$.

Un punto C dell'asse centrale si ottiene ponendo α nella relativa parametrizzazione:

$$C - O = -5\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3$$

per cui il momento risultante in C del sistema di vettori applicati diventa:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}_\mathbf{C} &= \sum_{i=1}^{4} (P_i - C) \wedge \vec{v}_i = \\ &= (5\,\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3) \wedge (-\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3) + \\ &+ (3\,\hat{e}_1 + 5\,\hat{e}_2 + 6\,\hat{e}_3) \wedge (2\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3) + \\ &+ (3\,\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 + 5\,\hat{e}_3) \wedge (-3\,\hat{e}_1 + 6\,\hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3) + \\ &+ (8\,\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 5\,\hat{e}_3) \wedge (\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 + \hat{e}_3) = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -3 & 6 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 8 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (-7\,\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2 + 13\,\hat{e}_3) + (34\,\hat{e}_1 + 6\,\hat{e}_2 - 22\,\hat{e}_3) + \\ &+ (-36\,\hat{e}_1 - 6\,\hat{e}_2 + 24\,\hat{e}_3) + (9\,\hat{e}_1 - 3\,\hat{e}_2 - 15\,\hat{e}_3) \;=\; \mathbf{0} \end{aligned}$$

e, in quanto nullo, è certamente parallelo ad $\vec{R}$.

(b) **Centro**
I vettori applicati di cui si compone il sistema $\mathbb{S}$ sono tutti fra loro paralleli:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= -\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3 &&= \vec{v}_1 &&= f_1\vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 &= 2\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3 &&= -2\,\vec{v}_1 &&= f_2\vec{v}_1 \\ \vec{v}_3 &= -3\,\hat{e}_1 + 6\,\hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3 &&= 3\,\vec{v}_1 &&= f_3\,\vec{v}_1 \\ \vec{v}_4 &= \hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 + \hat{e}_3 &&= -\vec{v}_1 &&= f_4\vec{v}_1 \end{aligned}$$

con $\vec{R} \neq 0$ ed i coefficienti f_1, f_2, f_3, f_4 dati da:

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = -2 \qquad f_3 = 3 \qquad f_4 = -1\,.$$

Il centro C del sistema di vettori applicati paralleli di risultante non nullo è perciò individuato da:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} - \mathbf{O} &= \Big(\sum_{i=1}^{4} f_i\Big)^{-1} \sum_{i=1}^{4} f_i(P_i - O) = \\ &= 1(-\hat{e}_2 - \hat{e}_3) - 2(-2\,\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3) + \\ &+ 3(-2\,\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3) + (-1)(3\,\hat{e}_1 - 5\,\hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3) = \\ &= -\hat{e}_2 - \hat{e}_3 + 4\,\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 - 6\,\hat{e}_3 + \\ &\quad - 6\,\hat{e}_1 - 6\,\hat{e}_2 + 6\,\hat{e}_3 - 3\,\hat{e}_1 + 5\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3 = \mathbf{-5\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3} \end{aligned}$$

Si osservi che l'asse centrale è esprimibile nella forma

$$\begin{aligned} A - O &= C - O + \alpha\vec{R} = -5\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3 + \alpha(-\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3) = \\ &= (-5 - \alpha)\hat{e}_1 + (-4 + 2\alpha)\hat{e}_2 + (-3 - \alpha)\hat{e}_3 \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

(c) **Momento rispetto all'asse r**
La parametrizzazione dell'asse r è data da:

$$P(\xi) - O = (12\xi + 1)\hat{e}_1 + 3\xi\,\hat{e}_2 + (-4\xi + 3)\hat{e}_3 \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

con la derivata prima

$$P'(\xi) = 12\,\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2 - 4\,\hat{e}_3\,.$$

Ricordando che l'asse deve intendersi orientato nel senso delle ξ decrescenti, il versore direttore di r risulta allora

$$\hat{\tau} = -\frac{P'(\xi)}{|P'(\xi)|} = -\frac{12\,\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2 - 4\,\hat{e}_3}{|12\,\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2 - 4\,\hat{e}_3|} = -\frac{12\,\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2 - 4\,\hat{e}_3}{\sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}} = -\frac{12\,\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2 - 4\,\hat{e}_3}{13}$$

Un punto B della retta orientata si ricava dalla parametrizzazione ponendo per esempio $\xi = 0$ — la scelta più semplice —

$$B - O = P(0) - O = \hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_3$$

Il momento risultante rispetto a B è immediatamente deducibile da $\vec{M}_O$, già calcolato, per mezzo della formula del cambiamento del polo:

$$\begin{aligned}\vec{M}_B &= \vec{M}_O + (O - B) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge (B - O) = \\ &= 10\,\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 - 14\,\hat{e}_3 + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 10\,\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 - 14\,\hat{e}_3 + 6\,\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3 = 16\,\hat{e}_1 - 16\,\hat{e}_3\,.\end{aligned}$$

Il momento risultante rispetto all'asse r vale pertanto:

$$\begin{aligned}\mathbf{M_r} &= M_{B\hat{\tau}} = \vec{M}_B \cdot \hat{\tau} = (16\,\hat{e}_1 - 16\,\hat{e}_3) \cdot \frac{-12\,\hat{e}_1 - 3\,\hat{e}_2 + 4\,\hat{e}_3}{13} = \\ &= \frac{16(-12) + (-16)4}{13} = -\frac{\mathbf{256}}{\mathbf{13}}\end{aligned}$$

2. Esercizio sull'oscillatore armonico smorzato
Un punto materiale P di massa $m = 5$ è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse orizzontale $Ox = O\hat{e}_1$ di una terna inerziale $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$. Una molla ideale di costante elastica $k = 2$ congiunge P con l'origine O. Sul punto agisce inoltre una forza $\vec{F} = 2\beta\hat{e}_2 \wedge \dot{P} - \beta\dot{P}$, con β costante positiva. Determinare del sistema:

(a) le equazioni pure del moto;

(b) i valori della costante β per i quali i moti sono oscillatori smorzati;

(c) per $\beta = 2$, la posizione e la velocità di P all'istante $t = 15\pi/4$ qualora si abbia $P(0) - O = 3\,\hat{e}_1$ e $\dot{P}(0) = 0$ all'istante $t = 0$.

Soluzione
(a) **Equazioni pure del moto**
L'assenza di attrito assicura che l'equazione pura del moto si ottiene proiettando lungo la direzione tangente $\hat{e}_1$ l'equazione tratta dal postulato delle reazioni vincolari:

$$m\ddot{P} \,=\, -k(P-O) + 2\beta\hat{e}_2 \wedge \dot{P} - \beta\dot{P} + m\vec{g} + \vec{\Phi}$$

essendo $m\vec{g}$ il peso e $\vec{\Phi}$ la reazione vincolare. Moltiplicando scalarmente membro a membro l'equazione per il versore direttore $\hat{e}_1$ dell'asse orizzontale Ox si ottiene allora:

$$m\ddot{P}\cdot\hat{e}_1 \,=\, -k(P-O)\cdot\hat{e}_1 + 2\beta\hat{e}_2 \wedge \dot{P}\cdot\hat{e}_1 - \beta\dot{P}\cdot\hat{e}_1 + m\vec{g}\cdot\hat{e}_1 + \vec{\Phi}\cdot\hat{e}_1$$

e poichè

$$P - O \,=\, x\,\hat{e}_1 \qquad \dot{P} \,=\, \dot{x}\,\hat{e}_1 \qquad \ddot{P} \,=\, \ddot{x}\,\hat{e}_1 \qquad m\vec{g}\cdot\hat{e}_1 \,=\, 0 \qquad \vec{\Phi}\cdot\hat{e}_1 \,=\, 0$$

l'equazione pura del moto si riduce a

$$m\ddot{x} \,=\, -kx - \beta\dot{x}$$

ossia a

$$5\ddot{x} + \beta\dot{x} + 2x \,=\, 0\,, \tag{2.1}$$

che è l'equazione differenziale del moto di un oscillatore armonico smorzato unidimensionale con costante di frizione $\beta > 0$.

(b) **Valori di β corrispondenti ai moti oscillatori smorzati**
La condizione necessaria e sufficiente per i moti oscillatori smorzati è che il discriminante dell'equazione caratteristica associata alla (2.1)

$$5\lambda^2 + \beta\lambda + 2 \,=\, 0$$

sia negativo. Nella fattispecie, si ha

$$\Delta \,=\, \beta^2 - 4\cdot 5\cdot 2 \,=\, \beta^2 - 40 \,<\, 0$$

e quindi i valori richiesti della costante β sono:

$$0 \,<\, \beta \,<\, \sqrt{40}\,.$$

(c) **Posizione e velocità di P all'istante $t = 15\pi/4$ per assegnate condizioni iniziali**
Per $\beta = 2$ l'equazione pura del moto (2.1) diventa

$$5\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x \,=\, 0$$

con l'equazione caratteristica

$$5\lambda^2 + 2\lambda + 2 \,=\, 0$$

di radici complesse coniugate:

$$\lambda_1, \lambda_2 \,=\, \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 5\cdot 2}}{2\cdot 5} \,=\, \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{10} \,=\, \frac{-2 \pm 6i}{10} \,=\, -\frac{1}{5} \pm \frac{3}{5}i\,.$$

La soluzione generale dell'equazione del moto si scrive dunque:

$$x(t) \,=\, c_1 e^{-t/5}\cos\Big(\frac{3}{5}t\Big) + c_2 e^{-t/5}\sin\Big(\frac{3}{5}t\Big) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

con la derivata prima

$$\dot{x}(t) \,=\, c_1 e^{-t/5}\Big[-\frac{1}{5}\cos\Big(\frac{3}{5}t\Big) - \frac{3}{5}\sin\Big(\frac{3}{5}t\Big)\Big] + c_2 e^{-t/5}\Big[-\frac{1}{5}\sin\Big(\frac{3}{5}t\Big) + \frac{3}{5}\cos\Big(\frac{3}{5}t\Big)\Big] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

in termini delle costanti reali arbitrarie c_1 e c_2, che vanno determinate sulla base delle condizioni iniziali. In questo caso l'ipotesi

$$P(0) - O \,=\, 3\,\hat{e}_1 \qquad\qquad \dot{P}(0) \,=\, 0$$

implica che debba aversi

$$x(0) \,=\, 3 \qquad\qquad \dot{x}(0) \,=\, 0$$

per cui:

$$3 \,=\, x(0) \,=\, c_1 \qquad\qquad 0 \,=\, \dot{x}(0) \,=\, -\frac{1}{5}c_1 + \frac{3}{5}c_2$$

e quindi:

$$c_1 \,=\, 3 \qquad\qquad c_2 \,=\, 1\,.$$

La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$x(t) \,=\, 3e^{-t/5}\cos\Big(\frac{3}{5}t\Big) + e^{-t/5}\sin\Big(\frac{3}{5}t\Big) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

con la derivata prima

$$\dot{x}(t) \,=\, 3e^{-t/5}\Big[-\frac{1}{5}\cos\Big(\frac{3}{5}t\Big) - \frac{3}{5}\sin\Big(\frac{3}{5}t\Big)\Big] + e^{-t/5}\Big[-\frac{1}{5}\sin\Big(\frac{3}{5}t\Big) + \frac{3}{5}\cos\Big(\frac{3}{5}t\Big)\Big] \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

All'istante $t = 15\pi/4$ si ha infine:

$$\begin{aligned} x\Big(\frac{15\pi}{4}\Big) \,&=\, 3e^{-3\pi/4}\cos\Big(\frac{3}{5}\frac{15}{4}\pi\Big) + e^{-3\pi/4}\sin\Big(\frac{3}{5}\frac{15}{4}\pi\Big) \,=\\ &=\, 3e^{-3\pi/4}\cos\Big(\frac{9}{4}\pi\Big) + e^{-3\pi/4}\sin\Big(\frac{9}{4}\pi\Big) \,=\, 3e^{-3\pi/4}\frac{1}{\sqrt{2}} + e^{-3\pi/4}\frac{1}{\sqrt{2}} \,=\, \frac{4}{\sqrt{2}}\,e^{-3\pi/4} \end{aligned}$$

e

$$\dot{x}\Big(\frac{15\pi}{4}\Big) \,=\, 3e^{-3\pi/4}\Big[-\frac{1}{5}\cos\Big(\frac{9}{4}\pi\Big) - \frac{3}{5}\sin\Big(\frac{9}{4}\pi\Big)\Big] + e^{-3\pi/4}\Big[-\frac{1}{5}\sin\Big(\frac{9}{4}\pi\Big) + \frac{3}{5}\cos\Big(\frac{9}{4}\pi\Big)\Big] \,=$$

$$=\, e^{-3\pi/4}\Big[3\Big(-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\Big) + \Big(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\Big)\Big]\,\frac{1}{\sqrt{2}} \,=\, e^{-3\pi/4}\Big[-\frac{3}{5} - \frac{9}{5} - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\Big]\,\frac{1}{\sqrt{2}} \,=\, -\sqrt{2}\,e^{-3\pi/4}\,.$$

3. Esercizio sul punto vincolato ad una curva piana

Un punto materiale pesante P, di massa m, è vincolato a scorrere lungo la curva di equazione:

$$y = \frac{1}{x} + 4x \qquad \forall x \in (1/4, 1)\,,$$

posta nel piano coordinato Oxy il cui asse Oy è diretto verticalmente verso l'alto. Determinare:

(*a*) l'equazione pura del moto e le relative configurazioni di equilibrio nell'ipotesi di curva liscia;

(*b*) gli equilibri supponendo che la curva abbia un coefficiente di attrito radente statico $\mu_s = 0.3$.

Soluzione

(*a*) **Equazione del moto ed equilibri in assenza di attrito**

La parametrizzazione del punto P si esprime naturalmente in termini dell'ascissa x:

$$P(x) - O = x\,\hat{e}_1 + \Big(\frac{1}{x} + 4x\Big)\hat{e}_2 \qquad \forall x \in \Big(\frac{1}{4}, 1\Big)$$

con derivate prima e seconda:

$$P'(x) = \hat{e}_1 + \Big(-\frac{1}{x^2} + 4\Big)\hat{e}_2 \qquad\qquad P''(x) = \frac{2}{x^3}\,\hat{e}_2 \tag{3.1}$$

definite nello stesso intervallo di x. L'equazione pura del moto si ricava proiettando lungo la direzione tangente $P'(x)$ il postulato delle reazioni vincolari:

$$m\ddot{P} = -mg\,\hat{e}_2 + \vec{\Phi}$$

ossia

$$m\ddot{x}P'(x) + m\dot{x}^2 P''(x) = -mg\,\hat{e}_2 + \vec{\Phi}\,.$$

Si ha allora:

$$m\ddot{x}P'(x)\cdot P'(x) + m\dot{x}^2 P''(x)\cdot P'(x) = -mg\,\hat{e}_2\cdot P'(x) + \vec{\Phi}\cdot P'(x)$$

e quindi, per l'ipotesi di vincolo liscio,

$$m\ddot{x}|P'(x)|^2 + m\dot{x}^2 P''(x)\cdot P'(x) = -mg\,\hat{e}_2\cdot P'(x)$$

vale a dire, in virtù delle (3.1),

$$m\ddot{x}\bigg[1 + \Big(-\frac{1}{x^2} + 4\Big)^2\bigg] + m\dot{x}^2\frac{2}{x^3}\Big(-\frac{1}{x^2} + 4\Big) = -mg\Big(-\frac{1}{x^2} + 4\Big) \qquad \forall x \in \Big(\frac{1}{4}, 1\Big)\,.$$

Gli equilibri corrispondono alle soluzioni statiche, costanti, della precedente equazione pura:

$$0 = -mg\Big(-\frac{1}{x^2} + 4\Big) \qquad x \in \Big(\frac{1}{4}, 1\Big)$$

e si riducono alla sola posizione $x = 1/2$ — l'altra radice $x = -1/2$ è esterna all'intervallo di definizione dell'ascissa.

(*b*) **Equilibri in presenza di attrito**
Se la curva vincolare presenta un coefficiente di attrito radente statico μ_s, la condizione di equilibrio per il punto pesante vincolato al grafico di una funzione $y = f(x)$, essendo Oy l'asse verticale, assume la forma ben nota

$$|f'(x)| \leq \mu_s ;$$

la pendenza della retta tangente al grafico della curva vincolare nel punto di equilibrio non deve deve discostarsi da 0 per più di μ_s. Nella fattispecie si ha la condizione, da soddisfare in $x \in (1/4, 1)$,

$$\left| -\frac{1}{x^2} + 4 \right| \leq \mu_s$$

ossia la doppia diseguaglianza

$$-\mu_s \leq -\frac{1}{x^2} + 4 \leq \mu_s$$

che moltiplicata per la quantità positiva x^2 si riduce a

$$-\mu_s x^2 \leq 4x^2 - 1 \leq \mu_s x^2$$

ed equivale al sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} -\mu_s x^2 \leq 4x^2 - 1 \\ 4x^2 - 1 \leq \mu_s x^2 \end{cases}$$

ovvero a

$$\begin{cases} 1 \leq (4 + \mu_s)x^2 \\ (4 - \mu_s)x^2 \leq 1 \,. \end{cases} \tag{3.2}$$

Ricordando che nel caso considerato è $\mu_s < 1$ — come avviene tipicamente — il sistema (3.2) si può esprimere nella forma equivalente

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4 + \mu_s} \leq x^2 \\ x^2 \leq \dfrac{1}{4 - \mu_s} \end{cases}$$

dalla quale si deduce, escludendo i valori negativi di x,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4 + \mu_s}} \leq x \\ x \leq \dfrac{1}{\sqrt{4 - \mu_s}} \,. \end{cases}$$

Le ascisse dei punti di equlibrio sono perciò tutte e sole quelle che soddisfano la doppia diseguaglianza

$$\frac{1}{\sqrt{4+\mu_s}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{4-\mu_s}}$$

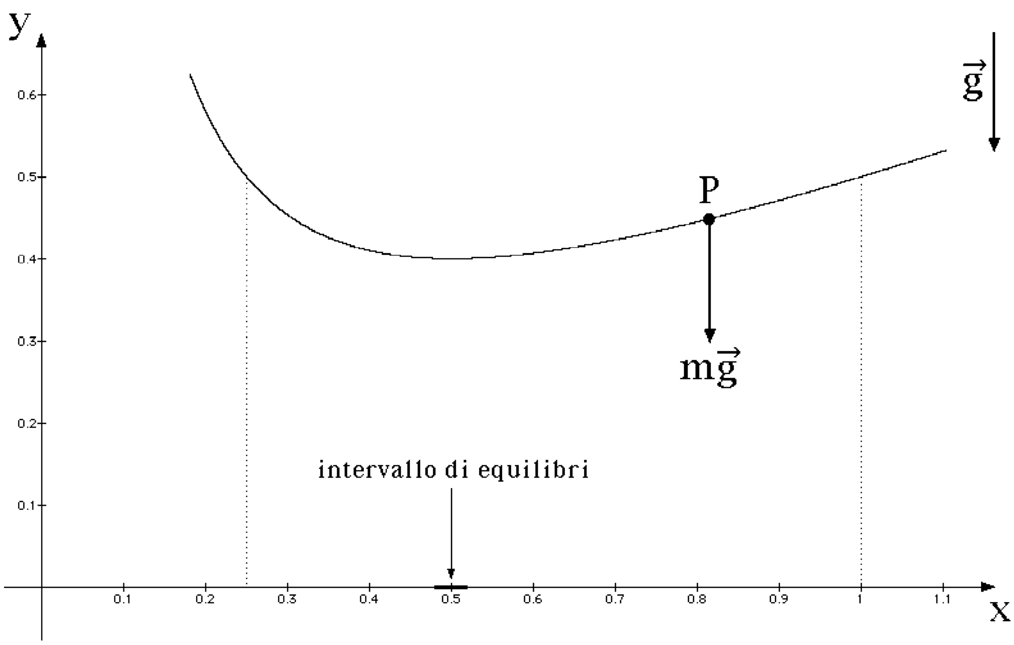
purchè ricomprese nell'intervallo $1/4 < x < 1$.
Per $\mu_s = 0.3$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{4.3}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{3.7}}$$

ossia, approssimativamente,

$$0.48224282 \le x \le 0.51987524 .$$

Si osservi che le soluzioni sono tutte accettabili, in quanto contenute nell'intervallo $(1/4, 1)$. Gli equilibri costituiscono un intorno dell'equilibrio $x = 0.5$ già calcolato in assenza di attrito, come evidenziato nella figura seguente

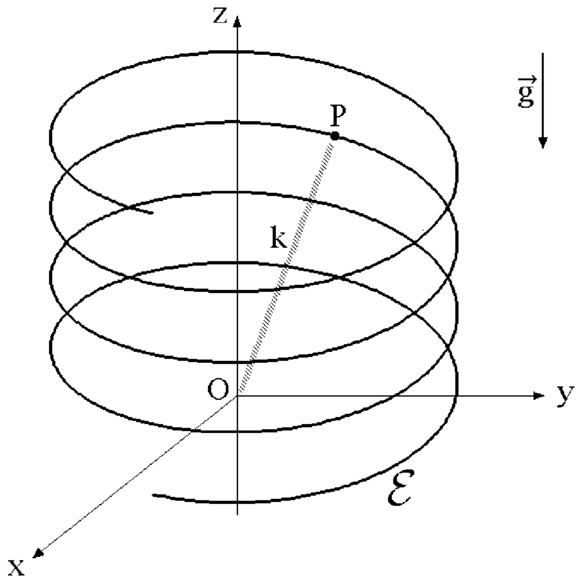


4. Esercizio sul punto materiale vincolato a una curva non piana

In una terna cartesiana ortogonale $Oxyz$, con l'asse Oz diretto verticalmente verso l'alto, un punto materiale pesante P di massa m è vincolato a scorrere lungo la curva $\mathcal{E}$ di equazione parametrica:

$$x = R\cos\xi \qquad y = R\sin\xi \qquad z = \frac{h}{2\pi}\xi \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{R}$$

dove R e h sono due lunghezze caratteristiche — è facile verificare che la curva in questione è un'elica cilindrica con asse di simmetria Oz, raggio R e passo h. Una molla ideale di costante elastica k congiunge P con l'origine O della terna di riferimento.



Si chiede di determinare:

(a) l'equazione pura del moto nell'ipotesi che la curva sia liscia;

(b) gli equilibri e la soluzione generale dell'equazione del moto sempre nell'ipotesi di curva liscia;

(c) gli equilibri in presenza di attrito, ipotizzando un coefficiente di attrito radente statico costante μ_s lungo l'intera curva;

(d) l'ascissa curvilinea della curva a partire dal punto $\xi = 0$ e il triedro di Frenet della curva vincolare.

Soluzione

(a) **Equazione pura del moto nel caso di vincolo liscio**

La curva vincolare $\mathcal{E}$ è descritta dalla parametrizzazione

$$P(\xi) - O = R\cos\xi\,\hat{e}_1 + R\,\sin\xi\,\hat{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\xi\,\hat{e}_3 \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{R}$$

con derivata prima

$$P'(\xi) \;=\; -R\sin\xi\,\hat{e}_1 + R\,\cos\xi\,\hat{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\,\hat{e}_3$$

e derivata seconda

$$P''(\xi) \;=\; -R\cos\xi\,\hat{e}_1 - R\,\sin\xi\,\hat{e}_2\,.$$

Il postulato delle reazioni vincolari permette di scrivere l'equazione

$$m\ddot{P} \;=\; -mg\,\hat{e}_3 - k[P(\xi)-O] + \vec{\Phi}$$

ovvero, essendo $\ddot{P} = \ddot{\xi}P'(\xi) + \dot{\xi}^2 P''(\xi)$,

$$m\ddot{\xi}P'(\xi) + m\dot{\xi}^2 P''(\xi) \;=\; -mg\,\hat{e}_3 - k[P(\xi)-O] + \vec{\Phi}\,.$$

L'equazione pura del moto si ottiene proiettando la relazione precedente lungo la direzione $P'(\xi)$ tangente al vincolo:

$$m\ddot{\xi}P'(\xi)^2 + m\dot{\xi}^2 P''(\xi)\cdot P'(\xi) \;=\; -mg\,\hat{e}_3\cdot P'(\xi) - k[P(\xi)-O]\cdot P'(\xi) \tag{4.1}$$

in virtù della condizione di vincolo liscio $\vec{\Phi}\cdot P'(\xi) = 0$. Osservato che

$$P'(\xi)^2 \;=\; R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}$$

e che

$$P''(\xi)\cdot P'(\xi) \;=\; -R\cos\xi(-R\sin\xi) + (-R\sin\xi)R\cos\xi \;=\; 0$$

mentre

$$-mg\,\hat{e}_3\cdot P'(\xi) \;=\; -mg\frac{h}{2\pi}$$

e

$$\begin{aligned}
&-k[P(\xi)-O]\cdot P'(\xi) \;=\\
&= -k\left[R\cos\xi\,\hat{e}_1 + R\sin\xi\,\hat{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\xi\,\hat{e}_3\right]\cdot\left[-R\sin\xi\,\hat{e}_1 + R\cos\xi\,\hat{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\,\hat{e}_3\right] =\\
&= -k\left[R\cos\xi(-R\sin\xi) + R\sin\xi\,R\cos\xi + \frac{h}{2\pi}\xi\,\frac{h}{2\pi}\right] \;=\; -k\frac{h^2}{4\pi^2}\xi\;,
\end{aligned}$$

l'equazione (4.1) si riduce a:

$$m\Big(R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\Big)\ddot{\xi} \;=\; -mg\frac{h}{2\pi} - k\frac{h^2}{4\pi^2}\xi$$

cioè

$$m\Big(R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\Big)\ddot{\xi} + k\frac{h^2}{4\pi^2}\xi \;=\; -mg\frac{h}{2\pi}\,. \tag{4.2}$$

(*b*) **Equilibri e soluzione generale nel caso di vincolo liscio**

Nell'ipotesi di vincolo liscio, le posizioni di equilibrio vengono ricavate come soluzioni statiche — costanti — dell'equazione del moto (4.2). Si ha allora

$$k\frac{h^2}{4\pi^2}\xi \,=\, -mg\frac{h}{2\pi}$$

e quindi l'unica posizione di equilibrio individuata da

$$\xi \,=\, -mg\frac{h}{2\pi}\,\frac{4\pi^2}{kh^2} \,=\, -2\pi\frac{mg}{kh}\,.$$

La soluzione generale dell'equazione (4.2) si può ricavare facilmente introducendo il cambiamento di variabile:

$$\xi \,=\, \zeta - 2\pi\frac{mg}{kh}$$

in virtù del quale l'equazione del moto diventa

$$m\Big(R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\Big)\ddot{\zeta} + k\frac{h^2}{4\pi^2}\zeta \,=\, 0$$

ed è riconoscibile come l'equazione di un oscillatore armonico semplice unidimensionale di pulsazione

$$\omega \,=\, \sqrt{\frac{k}{m}\frac{\dfrac{h^2}{4\pi^2}}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}}$$

in modo che la soluzione generale risulta della forma

$$\zeta(t) \,=\, c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

con c_1 e c_2 costanti reali arbitrarie. Nella variabile ξ la soluzione generale si scrive pertanto:

$$\xi(t) \,=\, c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) - 2\pi\frac{mg}{kh} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Essa descrive un moto armonico semplice di pulsazione ω e ampiezza e fase arbitrarie, centrato sulla posizione di equilibrio $\xi = -2\pi mg/kh$.

(c) **Equilibri in presenza di attrito (μ_s costante)**
Per lo stato di quiete in una posizione di equilibrio del sistema, il postulato delle reazioni vincolari prescrive la condizione:

$$0 \,=\, -mg\,\hat{e}_3 - k[P(\xi) - O] + \vec{\Phi}$$

dalla quale si ricava la reazione vincolare occorrente a realizzare lo stato di quiete in questione:

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} \,=\, mg\,\hat{e}_3 + k[P(\xi) - O] \,&=\, mg\,\hat{e}_3 + k\Big(R\cos\xi\,\hat{e}_1 + R\sin\xi\,\hat{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\xi\,\hat{e}_3\Big) \,=\\ &=\, kR\cos\xi\,\hat{e}_1 + kR\sin\xi\,\hat{e}_2 + \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)\hat{e}_3\,.\end{aligned}$$

Di questa reazione vincolare si devono determinare la componente tangente e ortogonale alla curva vincolare, per poi fare uso della legge di Coulomb-Morin dell'attrito radente statico. Il versore tangente alla curva in un punto generico di questa è dato da

$$\hat{\tau}(\xi) = \frac{P'(\xi)}{|P'(\xi)|} = \frac{-R\sin\xi\,\hat{e}_1 + R\cos\xi\,\hat{e}_2 + \dfrac{h}{2\pi}\,\hat{e}_3}{\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}}$$

per cui

$$\vec{\Phi}\cdot\hat{\tau} = \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)\frac{\dfrac{h}{2\pi}}{\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}}$$

e la componente tangente alla curva della reazione vincolare vale

$$\vec{\Phi}\cdot\hat{\tau}\,\hat{\tau} = \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)\frac{\dfrac{h}{2\pi}}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}\Big(-R\sin\xi\,\hat{e}_1 + R\cos\xi\,\hat{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\,\hat{e}_3\Big).$$

La componente ortogonale alla curva è quella residua

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} - \vec{\Phi}\cdot\hat{\tau}\,\hat{\tau} = {} & kR\cos\xi\,\hat{e}_1 + kR\sin\xi\,\hat{e}_2 + \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)\hat{e}_3 - \\ & - \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)\frac{\dfrac{h}{2\pi}}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}\Big(-R\sin\xi\,\hat{e}_1 + R\cos\xi\,\hat{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\,\hat{e}_3\Big)\end{aligned}$$

che separando i vettori componenti diventa:

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} - \vec{\Phi}\cdot\hat{\tau}\,\hat{\tau} = {} & \left[kR\cos\xi + \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)\frac{\dfrac{h}{2\pi}}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}R\sin\xi\right]\hat{e}_1 + \\ & + \left[kR\sin\xi - \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)\frac{\dfrac{h}{2\pi}}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}R\cos\xi\right]\hat{e}_2 + \\ & + \left[mg + \frac{kh}{2\pi}\xi - \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)\frac{\dfrac{h^2}{4\pi^2}}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}\right]\hat{e}_3\end{aligned}$$

e quindi:

$$
\begin{aligned}
\vec{\Phi} - \vec{\Phi}\cdot\hat{\tau}\,\hat{\tau} \;=\; & \left[kR\cos\xi + \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big) \frac{\dfrac{h}{2\pi}}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}} R\sin\xi \right] \hat{e}_1 + \\
& + \left[kR\sin\xi - \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big) \frac{\dfrac{h}{2\pi}}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}} R\cos\xi \right] \hat{e}_2 + \\
& + \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big) \frac{R^2}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}} \hat{e}_3 \;.
\end{aligned}
$$

Il modulo quadrato della componente ortogonale di $\vec{\Phi}$ diventa allora:

$$
\begin{aligned}
& |\vec{\Phi} - \vec{\Phi}\cdot\hat{\tau}\,\hat{\tau}|^2 \;= \\
& = k^2R^2\cos^2\xi + \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)^2 \frac{\dfrac{h^2}{4\pi^2}R^2\sin^2\xi}{\Big(R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}\Big)^2} + 2kR\cos\xi\Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big) \frac{\dfrac{h}{2\pi}R\sin\xi}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}} + \\
& = k^2R^2\sin^2\xi + \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)^2 \frac{\dfrac{h^2}{4\pi^2}R^2\cos^2\xi}{\Big(R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}\Big)^2} - 2kR\sin\xi\Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big) \frac{\dfrac{h}{2\pi}R\cos\xi}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}} + \\
& + \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)^2 \frac{R^4}{\Big(R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}\Big)^2}
\end{aligned}
$$

e si semplifica in

$$
\begin{aligned}
|\vec{\Phi} - \vec{\Phi}\cdot\hat{\tau}\,\hat{\tau}|^2 \;&=\; k^2R^2 + \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)^2 \frac{\dfrac{h^2}{4\pi^2}R^2}{\Big(R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}\Big)^2} + \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)^2 \frac{R^4}{\Big(R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}\Big)^2} \;= \\
&=\; k^2R^2 + \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)^2 \frac{R^2}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}} \;.
\end{aligned}
$$

In modo analogo viene calcolato il modulo quadrato della componente di $\vec{\Phi}$ tangente al vincolo:

$$
|\vec{\Phi}\cdot\hat{\tau}\,\hat{\tau}|^2 \;=\; |\vec{\Phi}\cdot\hat{\tau}|^2 \;=\; \Big(mg + \frac{kh}{2\pi}\xi\Big)^2 \frac{\dfrac{h^2}{4\pi^2}}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}} \;.
$$

La legge di Coulomb-Morin dell'attrito radente statico porge così la condizione di equilibrio:

$$|\vec{\Phi}\cdot\hat{\tau}\,\hat{\tau}| \;\le\; \mu_s|\vec{\Phi}-\vec{\Phi}\cdot\hat{\tau}\,\hat{\tau}|$$

che equivale a

$$|\vec{\Phi}\cdot\hat{\tau}\,\hat{\tau}|^2 \;\le\; \mu_s^2|\vec{\Phi}-\vec{\Phi}\cdot\hat{\tau}\,\hat{\tau}|^2$$

e quindi a

$$\Big(mg+\frac{kh}{2\pi}\xi\Big)^2\frac{\dfrac{h^2}{4\pi^2}}{R^2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}} \;\le\; \mu_s^2\left[k^2R^2+\Big(mg+\frac{kh}{2\pi}\xi\Big)^2\frac{R^2}{R^2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}}\right]. \tag{4.3}$$

Eliminando i denominatori, la diseguaglianza precedente si riduce a

$$\Big(mg+\frac{kh}{2\pi}\xi\Big)^2\frac{h^2}{4\pi^2} \;\le\; \mu_s^2R^2\left[k^2\Big(R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\Big)+\Big(mg+\frac{kh}{2\pi}\xi\Big)^2\right]$$

e riportati a primo membro i termini in ξ diventa

$$\Big(mg+\frac{kh}{2\pi}\xi\Big)^2\Big(\frac{h^2}{4\pi^2}-\mu_s^2R^2\Big) \;\le\; \mu_s^2R^2k^2\Big(R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\Big). \tag{4.4}$$

Si devono distinguere due casi:

(*i*) se $(h^2/4\pi^2) \le \mu_s^2R^2$, vale a dire $\mu_s \ge h/2\pi R$ la condizione (4.4) risulta sempre soddisfatta, essendo negativo o nullo il primo membro e positivo il secondo, per cui *tutte le configurazioni del sistema sono di equilibrio*. Da notare che la condizione ricorre per tutti i valori sufficientemente elevati del coefficiente di attrito radente statico;

(*ii*) se viceversa è $(h^2/4\pi^2) > \mu_s^2R^2$, ossia $\mu_s < h/2\pi R$, l'equilibrio ricorre per tutti i valori del parametro ξ tali che

$$\Big(mg+\frac{kh}{2\pi}\xi\Big)^2 \;\le\; \frac{\mu_s^2R^2k^2\Big(R^2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}\Big)}{\dfrac{h^2}{4\pi^2}-\mu_s^2R^2}$$

ovvero, equivalentemente,

$$\Big|mg+\frac{kh}{2\pi}\xi\Big| \;\le\; \frac{\mu_sRk\sqrt{R^2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}}}{\sqrt{\dfrac{h^2}{4\pi^2}-\mu_s^2R^2}}. \tag{4.5}$$

Come ci si aspetta, la disequazione (4.5) rappresenta un intorno della configurazione $\xi = -2\pi mg/kh$, l'unico equilibrio ammesso dal sistema nel caso di curva $\mathcal{E}$ liscia — per il quale il primo membro di (4.5) si annulla.

(d) **Ascissa curvilinea e triedro di Frenet**
Come esercizio puramente geometrico, calcoliamo l'ascissa curvilinea di $\mathcal{E}$ a partire dal punto $\xi = 0$, la curvatura e l'espressione del triedro di Frenet, cioè dei versori tangente, normale e binormale in funzione del parametro $\xi \in \mathbb{R}$.

Ascissa curvilinea a partire da $\xi = 0$
L'ascissa curvilinea lungo $\mathcal{E}$ a partire dal punto $\xi = 0$ è data, per definizione, dall'integrale

$$s(\xi) = \int_0^\xi |P'(\xi)|\, d\xi = \int_0^\xi \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, d\xi = \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, \xi\,.$$

Esiste quindi una relazione di semplice proporzionalità diretta fra l'ascissa curvilinea ed il parametro ξ.

Versore tangente a $\mathcal{E}$ in $P(\xi)$
Il versore tangente alla curva in un generico punto $P(\xi)$ di questa è già stato calcolato in precedenza. Si richiama qui di seguito il risultato:

$$\hat{\tau}(\xi) = \frac{P'(\xi)}{|P'(\xi)|} = \frac{-R\sin\xi\,\hat{e}_1 + R\cos\xi\,\hat{e}_2 + \dfrac{h}{2\pi}\,\hat{e}_3}{\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}}\,.$$

Versore normale a $\mathcal{E}$ in $P(\xi)$
La curvatura $1/\rho$ ed il versore normale $\hat{n}$ sono dafiniti dalla relazione

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\,\hat{n}\,.$$

Nella fattispecie si ha:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{1}{|P'(\xi)|}\frac{d\hat{\tau}}{d\xi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}}\,\frac{-R\cos\xi\,\hat{e}_1 - R\sin\xi\,\hat{e}_2}{\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}} = \\ &= \frac{R}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}(-\cos\xi\,\hat{e}_1 - \sin\xi\,\hat{e}_2)\end{aligned}$$

per cui:

$$\frac{1}{\rho(\xi)} = \frac{R}{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}} \qquad \text{e} \qquad \hat{n}(\xi) = -\cos\xi\,\hat{e}_1 - \sin\xi\,\hat{e}_2\,.$$

Si osservi che il versore normale punta verso l'asse del cilindro di giacitura dell'elica; più precisamente verso il centro della circonferenza ottenuta sezionando il cilindro con un piano passante per $P(\xi)$ ed ortogonale all'asse del cilindro stesso.

Versore binormale a $\mathcal{E}$ in $P(\xi)$
La definizione del versore binormale porge l'espressione:

$$\begin{aligned}
\hat{b}(\xi) \;=\; \hat{\tau}(\xi) \wedge \hat{n}(\xi) \;&=\; \frac{-R\sin\xi\,\hat{e}_1 + R\cos\xi\,\hat{e}_2 + \dfrac{h}{2\pi}\,\hat{e}_3}{\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}} \wedge (-\cos\xi\,\hat{e}_1 - \sin\xi\,\hat{e}_2) \;= \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -R\sin\xi & R\cos\xi & h/2\pi \\ -\cos\xi & -\sin\xi & 0 \end{vmatrix} = \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}} \Big(\frac{h}{2\pi}\sin\xi\,\hat{e}_1 - \frac{h}{2\pi}\cos\xi\,\hat{e}_2 + R\,\hat{e}_3 \Big) .
\end{aligned}$$