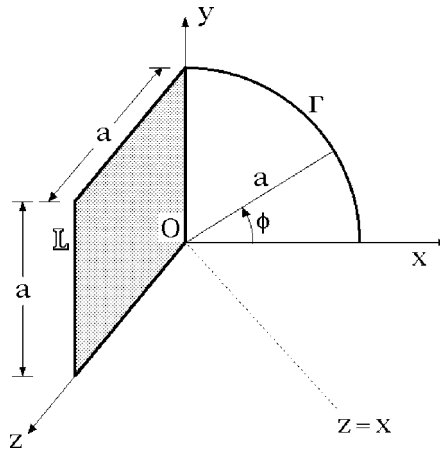


Esercizio 1

Nella terna cartesiana ortogonale $Oxyz$ si considera un sistema rigido composto da una lamina quadrata \mathbb{L} collocata nel piano Oyz e da un arco omogeneo Γ ubicato in Oxy . La lamina \mathbb{L} ha lato a e la sua densità in un generico punto $P(0, y, z)$ è data dall'espressione:

$$\sigma(P) = \frac{m}{a^4}yz, \quad y, z \in [0, a].$$

Γ è un quarto di circonferenza di centro O , raggio a e massa m , descritto dall'angolo al centro $\phi \in [0, \pi/2]$ — vedi figura.

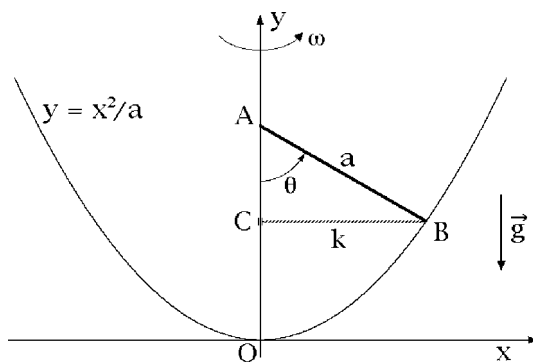


Determinare:

- (a) la massa del sistema;
- (b) la posizione del baricentro del sistema, rispetto alla terna assegnata;
- (c) la matrice d'inerzia della lamina \mathbb{L} rispetto alla terna $Oxyz$;
- (d) il momento d'inerzia di Γ rispetto alla bisettrice del primo quadrante del piano Oxy — $z = x, y = 0$;
- (e) l'energia cinetica della lamina \mathbb{L} nell'ipotesi che O sia punto fisso e che $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_2 - \omega \hat{e}_3$, $\omega \in \mathbb{R}$, sia la velocità angolare.

Esercizio 2

Nel piano verticale Oxy di una terna cartesiana $Oxyz$ un'asta omogenea AB di lunghezza a e massa m mantiene l'estremo A sull'asse verticale Oy e l'estremo B sulla curva di equazione $y = x^2/a$, in modo che l'ordinata di A sia maggiore o uguale di quella di B — vedi figura. L'asta è pesante e una molla di costante elastica $k = m\omega^2/6$ congiunge B con la sua proiezione ortogonale C sull'asse Oy . La terna $Oxyz$ ruota infine attorno all'asse verticale Oy con velocità angolare costante ω , rispetto ad un riferimento inerziale.



Assunti i vincoli ideali e l'angolo $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ mostrato in figura come coordinata lagrangiana, si determinino rispetto alla terna $Oxyz$:

- l'energia cinetica del sistema;
- gli equilibri ordinari e di confine;
- le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- le equazioni di Lagrange;
- un integrale primo del sistema.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Massa del sistema

Per additività, la massa μ del sistema è data dalla somma delle masse delle parti costituenti, Γ ed \mathbb{L} :

$$\mu = m_{\Gamma} + m_{\mathbb{L}}.$$

La massa dell'arco di circonferenza è per ipotesi:

$$m_{\Gamma} = m$$

mentre per la lamina \mathbb{L} la massa si ottiene integrando la densità sull'intera superficie:

$$m_{\mathbb{L}} = \int_0^a dy \int_0^a dz \frac{m}{a^4} yz = \frac{m}{a^4} \frac{a^2}{2} \frac{a^2}{2} = \frac{m}{4}$$

per cui la massa del sistema risulta:

$$\mu = m + \frac{m}{4} = \frac{5}{4}m.$$

(b) Baricentro del sistema

Convien calcolare separatamente i baricentri dell'arco Γ e della lamina \mathbb{L} per poi applicare la proprietà distributiva e ricavare il baricentro del sistema.

Baricentro dell'arco

Il baricentro G_{Γ} di Γ si individua per mezzo del vettore posizione relativo alla terna $Oxyz$:

$$G_{\Gamma} - O = x_{\Gamma} \hat{e}_1 + y_{\Gamma} \hat{e}_2 + z_{\Gamma} \hat{e}_3$$

applicando la definizione di centro di massa e ricordando che la densità della curva omogenea si ottiene come rapporto fra la massa m e la lunghezza $\pi a/2$:

$$\lambda = \frac{2m}{\pi a}.$$

Si ha così che:

(i) l'ascissa x_{Γ} vale:

$$x_{\Gamma} = \frac{1}{m} \int_0^{\pi/2} \frac{2m}{\pi a} a \cos \phi a d\phi = \frac{2}{\pi} a \int_0^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{2a}{\pi} [\sin \phi]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} a;$$

(ii) l'ordinata y_{Γ} coincide con x_{Γ} per simmetria. La bisettrice del primo quadrante nel piano coordinato Oxy è infatti un evidente asse di simmetria dell'arco;

(iii) la quota z_{Γ} si annulla, per il fatto che l'arco giace nel piano Oxy .

Il vettore posizione del baricentro si scrive perciò:

$$G_{\Gamma} - O = \frac{2}{\pi} a \hat{e}_1 + \frac{2}{\pi} a \hat{e}_2.$$

Baricentro della lamina

Analogamente, il baricentro della lamina viene individuato per mezzo del vettore posizione:

$$G_{\mathbb{L}} - O = x_{\mathbb{L}} \hat{e}_1 + y_{\mathbb{L}} \hat{e}_2 + z_{\mathbb{L}} \hat{e}_3$$

in cui l'ascissa $x_{\mathbb{L}}$ è ovviamente nulla per l'evidente simmetria — il piano coordinato Oyz è piano di giacitura e dunque di simmetria della lamina. L'ordinata del baricentro viene calcolata come da definizione:

$$y_{\mathbb{L}} = \frac{4}{m} \int_0^a dy \int_0^a dz \frac{m}{a^4} yz y = \frac{4}{a^4} \int_0^a y^2 dy \int_0^a z dz = \frac{2}{3}a$$

e la stessa espressione vale per la quota:

$$z_{\mathbb{L}} = \frac{4}{m} \int_0^a dy \int_0^a dz \frac{m}{a^4} yz^2 = \frac{2}{3}a,$$

in modo che il vettore posizione del baricentro diventa:

$$G_{\mathbb{L}} - O = \frac{2}{3}a \hat{e}_2 + \frac{2}{3}a \hat{e}_3.$$

Baricentro del sistema

Il baricentro G del sistema viene ora calcolato per mezzo della proprietà distributiva, immaginando le masse di lamina e arco concentrate nei rispettivi baricentri e determinando il baricentro del sistema di due punti materiali così ottenuto. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_{\Gamma}(G_{\Gamma} - O) + m_{\mathbb{L}}(G_{\mathbb{L}} - O)}{m_{\Gamma} + m_{\mathbb{L}}} = \\ &= \frac{4}{5m} \left[m \left(\frac{2}{\pi}a \hat{e}_1 + \frac{2}{\pi}a \hat{e}_2 \right) + \frac{m}{4} \left(\frac{2}{3}a \hat{e}_2 + \frac{2}{3}a \hat{e}_3 \right) \right] = \\ &= \frac{4}{5} \left[\frac{2}{\pi}a \hat{e}_1 + \left(\frac{2}{\pi}a + \frac{a}{6} \right) \hat{e}_2 + \frac{a}{6} \hat{e}_3 \right] = \\ &= \frac{8}{5\pi}a \hat{e}_1 + \frac{4}{5} \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{6} \right) a \hat{e}_2 + \frac{2}{15}a \hat{e}_3 \end{aligned}$$

che è il risultato richiesto.

(c) Matrice d'inerzia della lamina \mathbb{L}

Siccome la lamina giace interamente nel piano coordinato Oyz , fra i momenti d'inerzia relativi agli assi coordinati sussiste la relazione generale:

$$L_{zz} = L_{xx} + L_{yy}$$

mentre i prodotti d'inerzia dipendenti dall'ascissa $x = 0$ sono per definizione identicamente nulli:

$$L_{xy} = L_{yx} = L_{xz} = L_{zx} = 0.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse Oy si scrive:

$$L_{yy} = \int_0^a dy \int_0^a dz \frac{myz}{a^4} z^2 = \frac{m}{a^4} \int_0^a y dy \int_0^a z^3 dz = \frac{m}{a^4} \frac{a^2}{2} \frac{a^4}{4} = \frac{ma^2}{8},$$

e analogamente si calcola quello relativo all'asse Oz :

$$L_{zz} = \int_0^a dy \int_0^a dz \frac{myz}{a^4} y^2 = \frac{ma^2}{8} = L_{yy}$$

per cui il momento d'inerzia rispetto al terzo asse risulta:

$$L_{xx} = 2L_{yy} = \frac{ma^2}{4}.$$

L'unico prodotto d'inerzia non banalmente nullo vale invece:

$$L_{yz} = - \int_0^a dy \int_0^a dz \frac{myz}{a^4} yz = - \frac{m}{a^4} \int_0^a dy y^2 \int_0^a dz z^2 = - \frac{m}{a^4} \frac{a^3}{3} \frac{a^3}{3} = - \frac{ma^2}{9}.$$

Se ne conclude che la matrice d'inerzia richiesta assume la forma:

$$[L_{\mathbb{L}}] = \begin{pmatrix} ma^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & ma^2/8 & -ma^2/9 \\ 0 & -ma^2/9 & ma^2/8 \end{pmatrix} = ma^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & -1/9 \\ 0 & -1/9 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

(d) Momento d'inerzia dell'arco Γ rispetto alla bisettrice $z = x, y = 0$

È evidente che la retta di equazione $z = x, y = 0$, passa per l'origine. Il momento d'inerzia dell'arco Γ rispetto a tale retta può quindi essere determinato partendo dalla matrice d'inerzia di Γ in $Oxyz$ e dal versore associato alla stessa retta:

$$\hat{n} = n_1 \hat{e}_1 + n_2 \hat{e}_2 + n_3 \hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_3.$$

L'appartenenza dell'arco Γ al piano coordinato Oxy autorizza a scrivere la relativa matrice d'inerzia nella forma:

$$[L_{\Gamma}] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix}$$

sicché il momento d'inerzia rispetto alla bisettrice è dato dall'espressione:

$$\begin{aligned} I_{\Gamma}^{\text{bisettrice}} &= \hat{n} \cdot L_{\Gamma}(\hat{n}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} (L_{xx} \ L_{xy} \ L_{xx} + L_{yy}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = L_{xx} + \frac{1}{2} L_{yy}. \end{aligned}$$

Si constata che alla determinazione del risultato richiesto non concorre il prodotto d'inerzia L_{xy} , che non è pertanto necessario calcolare. Il momento d'inerzia rispetto all'asse Ox si ricava per mezzo della definizione, calcolando un integrale curvilineo:

$$\begin{aligned} L_{xx} &= \int_0^{\pi/2} \frac{2m}{\pi a} (y^2 + z^2) a \, d\phi = \frac{2m}{\pi} \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 \phi \, d\phi = \\ &= \frac{2ma^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} \, d\phi = \frac{ma^2}{\pi} \left[\phi - \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{ma^2}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{ma^2}{2} \end{aligned}$$

e in modo analogo si perviene all'espressione del momento d'inerzia relativo all'asse coordinato Oy :

$$L_{yy} = \int_0^{\pi/2} \frac{2m}{\pi a} (x^2 + z^2) a \, d\phi = \frac{2m}{\pi} \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 \phi \, d\phi = \frac{ma^2}{2} = L_{xx}.$$

Il momento d'inerzia dell'arco rispetto alla bisettrice diventa così:

$$I_{\Gamma}^{\text{bisettrice}} = \frac{3}{2} L_{xx} = \frac{3}{2} \frac{ma^2}{2} = \frac{3}{4} ma^2.$$

(e) Energia cinetica della lamina \mathbb{L}

Nell'ipotesi che il punto O della lamina sia fisso, e che la velocità angolare istantanea del sistema sia data dal vettore

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_2 - \omega \hat{e}_3,$$

con ω costante reale assegnata, l'energia cinetica è quella di un sistema rigido con punto fisso O e si esprime perciò nella forma:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot L_{\mathbb{L}}(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} (0 \quad \omega \quad -\omega) ma^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & -1/9 \\ 0 & -1/9 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ -\omega \end{pmatrix} = \\ &= \frac{ma^2 \omega^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 17 & -17 \\ 17 & 72 & -17 \\ -17 & -17 & 72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{17}{72} ma^2 \omega^2. \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Energia cinetica

L'asta omogenea AB è priva di punti fissi, perciò la sua energia cinetica deve essere valutata facendo uso del teorema di König:

$$T = \frac{m}{2} \dot{G}^2 + \frac{1}{2} I_{Gz} |\vec{\omega}|^2$$

in termini della velocità \dot{G} del baricentro G , del momento d'inerzia I_{Gz} dell'asta rispetto all'asse baricentrale Gz e della velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$. Le coordinate degli estremi A e B si esprimono facilmente in termini della coordinata lagrangiana θ :

$$A - O = A - C + C - O = (a \cos \theta + a \sin^2 \theta) \hat{e}_2$$

$$B - O = a \sin \theta \hat{e}_1 + a \sin^2 \theta \hat{e}_2$$

in modo che il baricentro dell'asta omogenea è individuato da:

$$G - O = \frac{A - O + B - O}{2} = \frac{a}{2} \sin \theta \hat{e}_1 + \left(a \sin^2 \theta + \frac{a}{2} \cos \theta \right) \hat{e}_2$$

e la sua velocità assoluta risulta:

$$\dot{G} = \left[\frac{a}{2} \cos \theta \hat{e}_1 + \left(2a \sin \theta \cos \theta - \frac{a}{2} \sin \theta \right) \hat{e}_2 \right] \dot{\theta}.$$

Il momento d'inerzia dell'asta omogenea, di lunghezza a e massa m , rispetto all'asse baricentrale Gz è ben noto:

$$I_{Gz} = \frac{ma^2}{12}$$

mentre la velocità angolare istantanea dell'asta si ottiene banalmente in termini dell'angolo di rotazione θ :

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3.$$

Sostituendo nella formula di König si perviene al risultato richiesto:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \left[\frac{a}{2} \cos \theta \hat{e}_1 + \left(2a \sin \theta \cos \theta - \frac{a}{2} \sin \theta \right) \hat{e}_2 \right]^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{ma^2}{12} |\dot{\theta} \hat{e}_3|^2 = \\ &= \frac{ma^2}{2} \left(\frac{1}{4} \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta \right) \dot{\theta}^2 + \frac{ma^2}{24} \dot{\theta}^2 = \\ &= \frac{ma^2}{2} \left(\frac{1}{3} + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta \right) \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

(b) Equilibri ordinari e di confine

Le sollecitazioni attive agenti sul sistema sono costituite dalle forze centrifughe, dalle forze di Coriolis, dal peso e dalla interazione elastica fra il punto B e la sua proiezione ortogonale C sull'asse verticale Oy . Al solito, le forze di Coriolis risultano ortogonali al piano vincolare Oxy e la loro componente lagrangiana si mantiene costantemente nulla, non avendo alcun effetto sul moto — le forze di Coriolis vengono bilanciate costantemente da reazioni vincolari ortogonali al piano Oxy . Ne segue che tutte le sollecitazioni attive hanno natura posizionale e conservativa, e possono essere descritte in termini dei rispettivi potenziali. Il potenziale delle forze centrifughe applicate all'asta vale:

$$U_{cf} = \frac{\omega^2}{2} I_{Oy} = \frac{\omega^2}{2} [I_{Gy} + m |(G-O) \cdot \hat{e}_1|^2] = \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{ma^2}{12} \sin^2 \theta + m \frac{a^2}{4} \sin^2 \theta \right) = \frac{ma^2 \omega^2}{6} \sin^2 \theta$$

in cui il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrale è calcolato per mezzo della definizione:

$$I_{Gy} = \int_0^a \left(\xi - \frac{a}{2} \right)^2 \sin^2 \theta \frac{m}{a} d\xi = \frac{m}{a} \sin^2 \theta \left[\frac{1}{3} \left(\xi - \frac{a}{2} \right)^3 \right]_0^a = \frac{ma^2}{12} \sin^2 \theta.$$

Il potenziale dell'interazione elastica fra i punti B e C è dato dalla relazione:

$$U_{el} = -\frac{k}{2}|C - B|^2 = -\frac{k}{2}a^2\sin^2\theta = -\frac{ma^2\omega^2}{12}\sin^2\theta$$

mentre quello della forza peso si calcola come:

$$U_g = -mg(G - O) \cdot \hat{e}_2 = -mga\left(\sin^2\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right) = -mga\sin^2\theta - \frac{mga}{2}\cos\theta.$$

Il potenziale del sistema è quindi la somma dei singoli potenziali parziali appena calcolati:

$$U(\theta) = \left(-mga + \frac{ma^2\omega^2}{12}\right)\sin^2\theta - \frac{1}{2}mga\cos\theta, \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2],$$

con derivata prima:

$$Q_\theta(\theta) = U'(\theta) = 2\left(-mga + \frac{ma^2\omega^2}{12}\right)\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}mga\sin\theta.$$

Le configurazioni di equilibrio ordinarie si identificano con i punti critici del potenziale, ossia con le soluzioni in $[-\pi/2, \pi/2]$ dell'equazione trigonometrica:

$$\sin\theta \left[\frac{1}{4} - \left(1 - \frac{a\omega^2}{12g}\right)\cos\theta \right] = 0.$$

Le soluzioni $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ sono sempre definite, ma di essere solo la prima è accettabile in quanto appartenente all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Le ulteriori soluzioni:

$$\theta = \pm \arccos \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{a\omega^2}{12g}\right)^{-1} \right] = \pm\theta^*$$

sono simultaneamente definite nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ a condizione che si abbia:

$$0 \leq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a\omega^2}{12g}\right)^{-1} \leq 1.$$

In caso contrario, o l'arco coseno non è definito oppure il suo valore non è ricompreso nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ della variabile angolare. Le sole configurazioni di confine del sistema sono si hanno per $\theta = \pi/2$ e $\theta = -\pi/2$ e sono riconoscibili come equilibri tramite il teorema dei lavori virtuali.

Configurazione $\theta = \pi/2$

La configurazione $\theta = \pi/2$ costituisce un equilibrio di confine se e soltanto se è soddisfatta la diseuguaglianza:

$$Q_\theta(\pi/2)\delta\theta \leq 0 \quad \forall \delta\theta \leq 0$$

ossia:

$$Q_\theta(\pi/2) = \frac{1}{2}mga \geq 0.$$

Poiché la condizione è certamente verificata, si conclude che la configurazione è sempre un equilibrio di confine per il sistema.

Configurazione $\theta = -\pi/2$

Si individua in $\theta = -\pi/2$ un equilibrio di confine nel caso sia verificata la diseuguaglianza:

$$Q_\theta(-\pi/2) \delta\theta \leq 0 \quad \forall \delta\theta \geq 0$$

ovvero:

$$Q_\theta(-\pi/2) = -\frac{1}{2}mga \leq 0.$$

Anche in questo caso, dal teorema dei lavori virtuali si deduce che la configurazione costituisce sempre un equilibrio di confine del sistema.

(c) **Stabilità degli equilibri ordinari**

L'analisi di stabilità secondo Liapunov degli equilibri ordinari viene condotta per mezzo dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale, entrambi applicabili data la natura posizionale e conservativa di tutte le sollecitazioni attive agenti sul sistema scleronomo. Anche della discussione di Weierstrass è possibile giovare, visto il carattere unidimensionale del sistema. È opportuno, al solito, procedere al calcolo preliminare della derivata seconda del potenziale:

$$U''(\theta) = -2mga \left(1 - \frac{a\omega^2}{12g}\right) (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \frac{1}{2}mga \cos\theta$$

per poi esaminare le proprietà di stabilità delle singole configurazioni.

Configurazione $\theta = 0$

La derivata seconda del potenziale diventa per $\theta = 0$:

$$U''(0) = -2mga \left(1 - \frac{a\omega^2}{12g}\right) + \frac{1}{2}mga = mga \left(-\frac{3}{2} + \frac{a\omega^2}{6g}\right) = \frac{3}{2}mga \left(-1 + \frac{a\omega^2}{9g}\right)$$

e richiede perciò che si distinguano tre casi:

- (i) se $a\omega^2/9g < 1$ si ha $U''(0) < 0$ e si riconosce nella configurazione un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet;
- (ii) per $a\omega^2/9g > 1$ vale viceversa $U''(0) > 0$ e l'instabilità della configurazione segue dal teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- (iii) se infine $a\omega^2/9g = 1$ risulta $U''(0) = 0$ e ricorre un caso critico. In effetti, il potenziale del sistema diventa:

$$U(\theta) = mga \left(-1 + \frac{a\omega^2}{12g}\right) \sin^2\theta - \frac{1}{2}mga \cos\theta = mga \left(-\frac{1}{4}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right) =$$

$$= mga \left[-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] = mga \left[-\frac{1}{2} + \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

per cui $\theta = 0$ si riconosce essere un minimo relativo proprio del potenziale. Si noti che non è possibile applicare il teorema di Lagrange-Dirichlet, dal momento che la configurazione non costituisce massimo relativo proprio del potenziale, né è d'altra parte consentito di fare ricorso al teorema di inversione parziale, la derivata seconda del potenziale non avendo segno positivo. L'instabilità della configurazione può comunque essere dimostrata direttamente, facendo uso dell'analisi di Weierstrass. È sufficiente considerare l'andamento delle soluzioni con θ iniziale prossimo a zero e di energia meccanica lievemente superiore a $-U(0) = mga/2$.

Configurazioni $\theta = \pm\theta^*$

Le due configurazioni simmetriche $\theta = +\theta^*$ e $\theta = -\theta^*$ presentano le stesse proprietà di stabilità, causa l'evidente simmetria del potenziale:

$$U(-\theta) = U(\theta) \quad \forall \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

ed è perciò sufficiente esaminare una sola di esse, ad esempio la prima. La derivata seconda del potenziale risulta così:

$$\begin{aligned} U''(\theta^*) &= -2mga \left(1 - \frac{a\omega^2}{12g}\right) (2\cos^2\theta^* - 1) + \frac{1}{2}mga \cos\theta^* = \\ &= 2mga \left(1 - \frac{a\omega^2}{12g}\right) \left[-2\cos^2\theta^* + 1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a\omega^2}{12g}\right)^{-1} \cos\theta^*\right] = \\ &= 2mga \left(1 - \frac{a\omega^2}{12g}\right) [-2\cos^2\theta^* + 1 + \cos^2\theta^*] = 2mga \left(1 - \frac{a\omega^2}{12g}\right) \sin^2\theta^* > 0 \end{aligned}$$

in quanto $1 - \frac{a\omega^2}{12g} > 0$ per via della condizione di esistenza di $\theta^* \in [-\pi/2, \pi/2]$. Il segno positivo consente di fare ricorso al teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet e di concludere, pertanto, che entrambe le configurazioni sono instabili.

(d) Equazioni di Lagrange

Il sistema è olonomo, a vincoli ideali e ad un solo grado di libertà, con coordinata generalizzata θ . Le equazioni pure del moto sono quindi quelle di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

con la lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$:

$$\mathcal{L} = \frac{ma^2}{2} \left(\frac{1}{3} + 4\sin^2\theta \cos^2\theta - 2\sin^2\theta \cos\theta \right) \dot{\theta}^2 + \left(-mga + \frac{ma^2\omega^2}{12} \right) \sin^2\theta - \frac{1}{2}mga \cos\theta.$$

È immediato calcolare le espressioni:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ma^2 \left(\frac{1}{3} + 4\sin^2\theta \cos^2\theta - 2\sin^2\theta \cos\theta \right) \dot{\theta}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) &= ma^2\left(\frac{1}{3} + 4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\right)\ddot{\theta} + \\ &+ ma^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{3} + 4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \frac{ma^2}{2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{3} + 4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \\ &+ 2\left(-mga + \frac{ma^2\omega^2}{12}\right)\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}mga\sin\theta\end{aligned}$$

per cui le equazioni del moto si scrivono esplicitamente come:

$$\begin{aligned}ma^2\left(\frac{1}{3} + 4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\right)\ddot{\theta} + \frac{ma^2}{2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{3} + 4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \\ + 2\left(mga - \frac{ma^2\omega^2}{12}\right)\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}mga\sin\theta = 0\end{aligned}$$

ovvero, semplificando e raccogliendo alcune costanti:

$$\begin{aligned}ma^2\left(\frac{1}{3} + 4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\right)\ddot{\theta} + ma^2\frac{d}{d\theta}\left(2\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \\ + 2mga\left(1 - \frac{a\omega^2}{12g}\right)\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}mga\sin\theta = 0.\end{aligned}$$

(e) **Integrale primo**

Il sistema è scleronomo e soggetto esclusivamente a sollecitazioni posizionali e conservative. Un ovvio integrale primo è quindi costituito dall'energia meccanica $H = T - U$, che assume la forma:

$$H = \frac{ma^2}{2}\left(\frac{1}{3} + 4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \left(mga - \frac{ma^2\omega^2}{12}\right)\sin^2\theta + \frac{1}{2}mga\cos\theta.$$