

Esercizio 1

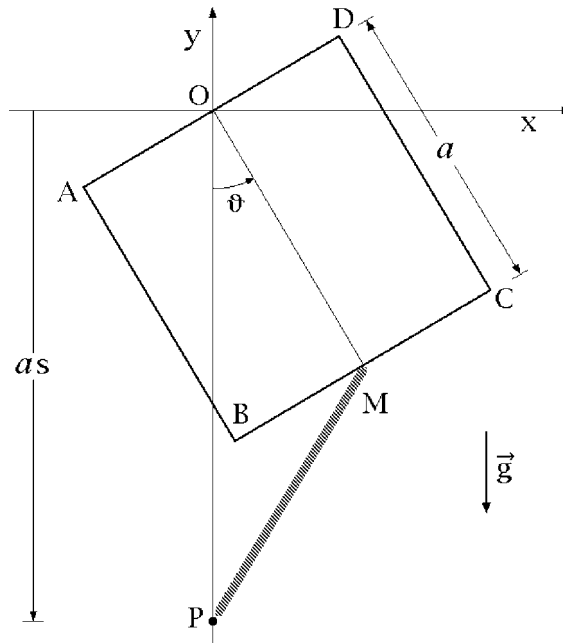
Vedi Esercizio 2 della prova in itinere di Meccanica razionale 2 in pari data.

Esercizio 2

Vedi Esercizio 3 della prova in itinere di Meccanica razionale 2 in pari data.

Esercizio 3

Nel piano Oxy di una terna inerziale $Oxyz$ una piastra quadrata omogenea $ABCD$, di lato a e massa m , è vincolata a ruotare attorno al punto medio O del suo lato AD . Il punto medio M del lato BC è connesso mediante una molla ideale di costante k ad un punto materiale P , pure di massa m , liberamente scorrevole lungo l'asse verticale Oy . Su P agisce una resistenza viscosa con costante di frizione β . La piastra è invece soggetta ad un sistema di forze con risultante $\vec{R} = -\beta a(\cos \vartheta \hat{e}_1 + \sin \vartheta \hat{e}_2)\dot{\vartheta}$ e momento risultante in M $\vec{M}_M = \beta a^2 \sin \vartheta \dot{s} \hat{e}_3$.



Sapendo che il sistema è pesante e a vincoli ideali, si usino le coordinate $(s, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$ in figura per determinare:

- (a) le componenti generalizzate delle sollecitazioni attive, specificandone la natura dal punto di vista energetico;
- (b) gli equilibri del sistema;
- (c) le proprietà di stabilità dei predetti equilibri.

Esercizio 4

Un sistema scleronomo posizionale conservativo è governato dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} \left(\dot{s}^2 + \cos \varphi \dot{\varphi} + \frac{1}{3} \dot{\varphi}^2 \right) + mgR \left(\cos \varphi - \frac{s^2}{2} \right),$$

dove $(s, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ sono le coordinate generalizzate e m, R, g delle costanti positive — una massa, una lunghezza e l'accelerazione di gravità. Determinare, nell'intorno dell'equilibrio stabile $(s, \varphi) = (0, 0)$:

- (a) le equazioni delle piccole oscillazioni;
- (b) le frequenze normali delle piccole oscillazioni;
- (c) l'espressione dei modi normali di oscillazione, distinguendo il modo “basso” e quello “alto”.

Soluzione dell'esercizio 1

Vedi soluzione dell'Esercizio 2 della prova in itinere di Meccanica razionale 2 in pari data.

Soluzione dell'esercizio 2

Vedi soluzione dell'Esercizio 3 della prova in itinere di Meccanica razionale 2 in pari data.

Soluzione dell'esercizio 3

(a) Componenti generalizzate delle forze attive

Le sollecitazioni attive che agiscono sul sistema sono le seguenti:

- il peso;
- l'interazione elastica fra i punti M e P ;
- la resistenza viscosa su P ;
- il sistema di forze agente sulla piastra, con risultante \vec{R} e momento risultante in M , \vec{M}_M , noti. Tale sistema verrà indicato con \mathcal{S} .

Tutte le sollecitazioni danno il loro contributo alle forze generalizzate Q_s e Q_ϑ del sistema.

Forze peso

Il sistema delle forze peso è posizionale e conservativo ed ammette quindi l'appropriato potenziale. Il baricentro della piastra omogenea coincide con il centro geometrico (e di simmetria) di questa, per cui viene identificato dal vettore posizione $(M - O)/2$. Il potenziale gravitazionale del sistema risulta pertanto

$$U_g = -mg \hat{e}_2 \cdot \frac{M - O}{2} - mg \hat{e}_2 \cdot (P - O)$$

essendo

$$M - O = a \sin \vartheta \hat{e}_1 - a \cos \vartheta \hat{e}_2 \quad \text{e} \quad P - O = -as \hat{e}_2 \quad (1)$$

per cui

$$U_g = \frac{1}{2} m g a \cos \vartheta + m g a s. \quad (2)$$

Forze elastiche

All'interazione elastica fra i punti M e P è associato il potenziale

$$U_{el} = -\frac{k}{2} |M - P|^2$$

dove

$$M - P = a \sin \vartheta \hat{e}_1 + a(s - \cos \vartheta) \hat{e}_2 \quad (3)$$

e quindi

$$U_{el} = -\frac{ka^2}{2} (\sin^2 \vartheta + s^2 - 2s \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta) = -\frac{ka^2}{2} (s^2 - 2s \cos \vartheta + 1). \quad (4)$$

Resistenza viscosa in P

Dal vettore posizione $P - O = -as \hat{e}_2$ si deduce l'espressione della velocità istantanea

$$\dot{P} = -a\dot{s} \hat{e}_2$$

in modo che la resistenza viscosa su P assume la forma

$$\vec{F}_P = -\beta \dot{P} = -\beta(-a\dot{s} \hat{e}_2) = \beta a \dot{s} \hat{e}_2.$$

Dalle derivate parziali di $P - O$:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -a \hat{e}_2 \quad \frac{\partial P}{\partial \vartheta} = 0$$

si deducono allora le componenti generalizzate di \vec{F}_P :

$$Q_s^v = -\beta \dot{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial s} = \beta a \dot{s} \hat{e}_2 \cdot (-a \hat{e}_2) = -\beta a^2 \dot{s}$$

$$Q_\vartheta^v = -\beta \dot{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial \vartheta} = 0.$$

Sistema di forze agente sulla piastra

Del sistema di forze \mathbb{S} sono noti il risultante ed il momento risultante rispetto al punto M della piastra. Quest'ultima si muove di moto piano e le sue rotazioni possono essere descritte per mezzo dell'angolo ϑ , che è infatti compreso fra una direzione fissa rispetto al riferimento assoluto — la verticale per O condotta verso il basso — e una direzione solidale alla piastra — quella del vettore $M - O$. Le componenti generalizzate di \mathbb{S} sono date perciò dalle formule

$$Q_s^{\mathbb{S}} = \frac{\partial M}{\partial s} \cdot \vec{R} + \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_M = \frac{\partial M}{\partial s} \cdot \vec{R}$$

$$Q_\vartheta^{\mathbb{S}} = \frac{\partial M}{\partial \vartheta} \cdot \vec{R} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta} \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_M = \frac{\partial M}{\partial \vartheta} \cdot \vec{R} + \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_M$$

che sostituendo le espressioni esplicite di $M - O$, \vec{R} e \vec{M}_M diventano:

$$Q_s^{\mathbb{S}} = 0 \cdot \vec{R} = 0$$

$$Q_\vartheta^{\mathbb{S}} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} (a \sin \vartheta \hat{e}_1 - a \cos \vartheta \hat{e}_2) \cdot [-\beta a (\cos \vartheta \hat{e}_1 + \sin \vartheta \hat{e}_2) \dot{\vartheta}] + \hat{e}_3 \cdot \beta a^2 \sin \vartheta \dot{s} \hat{e}_3 =$$

$$= (a \cos \vartheta \hat{e}_1 + a \sin \vartheta \hat{e}_2) \cdot [-\beta a (\cos \vartheta \hat{e}_1 + \sin \vartheta \hat{e}_2) \dot{\vartheta}] + \beta a^2 \sin \vartheta \dot{s} =$$

$$= -\beta a^2 \dot{\vartheta} + \beta a^2 \sin \vartheta \dot{s}.$$

Componenti generalizzate delle sollecitazioni attive

Le componenti generalizzate delle sollecitazioni si ricavano sommando i contributi corrispondenti di tutte le forze e risultano pertanto:

$$Q_s = \frac{\partial}{\partial s} (U_g + U_{el}) + Q_s^v + Q_s^{\mathbb{S}} = \frac{\partial U}{\partial s} + D_s$$

$$Q_{\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta}(U_g + U_{el}) + Q_{\vartheta}^v + Q_{\vartheta}^S = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} + D_{\vartheta}$$

dove si sono introdotti il *potenziale del sistema*:

$$U = U_g + U_{el} = \frac{1}{2}mga \cos \vartheta + mgas - \frac{ka^2}{2}(s^2 - 2s \cos \vartheta) \quad (5)$$

e le componenti generalizzate delle sollecitazioni non posizionali:

$$\begin{aligned} D_s &= Q_s^v + Q_s^S = -\beta a^2 \dot{s} + 0 = -\beta a^2 \dot{s} \\ D_{\vartheta} &= Q_{\vartheta}^v + Q_{\vartheta}^S = 0 - \beta a^2 \dot{\vartheta} + \beta a^2 \sin \vartheta \dot{s} = -\beta a^2 \dot{\vartheta} + \beta a^2 \sin \vartheta \dot{s}. \end{aligned} \quad (6)$$

Queste ultime sono in effetti sollecitazioni completamente dissipative. La loro potenza si scrive infatti come una forma quadratica delle velocità generalizzate:

$$\begin{aligned} \pi_D &= D_s \dot{s} + D_{\vartheta} \dot{\vartheta} = -\beta a^2 \dot{s}^2 + (-\beta a^2 \dot{\vartheta} + \beta a^2 \sin \vartheta \dot{s}) \dot{\vartheta} = \\ &= -\beta a^2 (\dot{s}^2 + \dot{\vartheta}^2 - \sin \vartheta \dot{s} \dot{\vartheta}) = (\dot{s} \ \dot{\vartheta}) \Gamma(\vartheta) \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la cui matrice di rappresentazione vale

$$\Gamma(\vartheta) = -\beta a^2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \sin \vartheta \\ -\frac{1}{2} \sin \vartheta & 1 \end{pmatrix}$$

e presenta traccia negativa

$$\text{tr} \Gamma(\vartheta) = -2\beta a^2 < 0$$

e determinante positivo

$$\det \Gamma(\vartheta) = \beta^2 a^4 \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \sin \vartheta \right)^2 \right] = \beta^2 a^4 \left[1 - \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \right] \geq \frac{3}{4} \beta^2 a^4 > 0$$

per qualsiasi valore di ϑ , risultando così definita negativa. Ne deriva che

$$\pi_D \leq 0 \quad \forall (s, \vartheta, \dot{s}, \dot{\vartheta}) \in \mathbb{R}^4$$

e che

$$\pi_D = 0 \quad \iff \quad (\dot{s}, \dot{\vartheta}) = (0, 0).$$

(b) **Equilibri**

Le sollecitazioni dissipative non hanno effetto alcuno sugli equilibri e possono essere ignorate nella determinazione di questi. Le configurazioni di equilibrio si identificano perciò con tutti e soli i punti critici del potenziale (5), dove si annullano simultaneamente le componenti del gradiente

$$\frac{\partial U}{\partial s}(s, \vartheta) = mga - ka^2 s + ka^2 \cos \vartheta$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta}(s, \vartheta) = -\frac{1}{2}mga \sin \vartheta - ka^2 s \sin \vartheta.$$

Le equazioni di equilibrio sono così

$$\begin{cases} \frac{mg}{ka} - s + \cos \vartheta = 0 \\ \sin \vartheta \left(\frac{1}{2} \frac{mg}{ka} + s \right) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

la seconda delle quali è soddisfatta per $\sin \vartheta = 0$ oppure per $(mg/2ka) + s = 0$. Può aversi dunque $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$, $s = -mg/2ka$. Esaminiamo le tre possibilità.

- Se $\vartheta = 0$ la prima equazione di equilibrio (7) diventa

$$\frac{mg}{ka} - s + 1 = 0$$

e conduce a

$$s = \frac{mg}{ka} + 1$$

ovvero alla configurazione di equilibrio

$$(s, \vartheta) = \left(\frac{mg}{ka} + 1, 0 \right).$$

- Per $\vartheta = \pi$ dalla prima equazione (7) risulta

$$\frac{mg}{ka} - s - 1 = 0$$

e quindi

$$s = \frac{mg}{ka} - 1$$

in modo che la corrispondente configurazione di equilibrio assume la forma

$$(s, \vartheta) = \left(\frac{mg}{ka} - 1, \pi \right).$$

- Se $s = -mg/2ka$ si ottiene infine

$$\frac{mg}{ka} + \frac{1}{2} \frac{mg}{ka} + \cos \vartheta = 0$$

ossia

$$\cos \vartheta = -\frac{3}{2} \frac{mg}{ka},$$

equazione che porge le due radici

$$\vartheta = \arccos\left(-\frac{3}{2} \frac{mg}{ka}\right) := \vartheta^* \in (\pi/2, \pi)$$

$$\vartheta = -\arccos\left(-\frac{3}{2} \frac{mg}{ka}\right) = -\vartheta^* \in (-\pi, -\pi/2)$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia $3mg/2ka < 1$. Gli equilibri associati sono pertanto:

$$(s, \vartheta) = \left(-\frac{1}{2} \frac{mg}{ka}, \vartheta^*\right) \quad \text{e} \quad (s, \vartheta) = \left(-\frac{1}{2} \frac{mg}{ka}, -\vartheta^*\right)$$

definiti per $3mg/2ka < 1$.

(c) Stabilità degli equilibri

Le sollecitazioni applicate al sistema sono in parte posizionali conservative e in parte completamente dissipative. Gli equilibri sono inoltre tutti isolati, dal momento che il loro numero risulta finito. È quindi possibile caratterizzare completamente le proprietà di stabilità degli equilibri facendo uso della forma forte del teorema di Lagrange-Dirichlet, basata sui criteri di Barbasin-Krasovskii. I massimi relativi propri del potenziale sono equilibri asintoticamente stabili, mentre si ha instabilità in ogni altro caso. Il primo passo, al solito, è il calcolo delle derivate parziali seconde del potenziale

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}(s, \vartheta) &= -ka^2 & \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial s}(s, \vartheta) &= -ka^2 \sin \vartheta \\ \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \vartheta}(s, \vartheta) &= -ka^2 \sin \vartheta & \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}(s, \vartheta) &= -\frac{1}{2}mga \cos \vartheta - ka^2 s \cos \vartheta \end{aligned}$$

dalle quali si deduce la matrice hessiana di U in ciascuna configurazione di equilibrio del sistema.

Configurazione $(s, \vartheta) = \left(\frac{mg}{ka} + 1, 0\right)$

La matrice hessiana del potenziale in questa configurazione assume la forma diagonale

$$H_U\left(\frac{mg}{ka} + 1, 0\right) = \begin{pmatrix} -ka^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}mga - ka^2\left(1 + \frac{mg}{ka}\right) \end{pmatrix}$$

dalla quale è evidente che entrambi gli autovalori sono di segno negativo, per cui la matrice risulta definita negativa. Ne segue che l'equilibrio costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, la cui *stabilità asintotica* è assicurata dai criteri di Barbasin-Krasovskii.

Configurazione $(s, \vartheta) = \left(\frac{mg}{ka} - 1, \pi\right)$

In questo caso la derivata seconda del potenziale rispetto a ϑ si riduce a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}\left(\frac{mg}{ka} - 1, \pi\right) = \frac{1}{2}mga + ka^2\left(\frac{mg}{ka} - 1\right) = ka^2\left(\frac{1}{2}\frac{mg}{ka} + \frac{mg}{ka} - 1\right) = ka^2\left(\frac{3}{2}\frac{mg}{ka} - 1\right)$$

e la matrice hessiana del potenziale diventa perciò

$$H_U\left(\frac{mg}{ka} - 1, \pi\right) = \begin{pmatrix} -ka^2 & 0 \\ 0 & ka^2\left(\frac{3}{2}\frac{mg}{ka} - 1\right) \end{pmatrix}.$$

Il primo autovalore — $-ka^2$ — ha sempre segno negativo. La natura dell'equilibrio dipende quindi esclusivamente dal segno della derivata seconda in ϑ , che rappresenta il secondo autovalore della matrice. Si devono discutere tre casi:

- se $3mg/2ka < 1$ la derivata $\partial^2 U/\partial\vartheta^2$ assume segno negativo e la matrice hessiana risulta definita negativa. L'equilibrio è quindi asintoticamente stabile quale massimo relativo proprio del potenziale;
- per $3mg/2ka > 1$ la derivata seconda $\partial^2 U/\partial\vartheta^2$ è positiva, escludendo così che la configurazione di equilibrio possa costituire un massimo relativo proprio del potenziale. Ciò basta ad assicurare l'instabilità dell'equilibrio per i criteri di Barbasin-Krasovskii;
- se infine $3mg/2ka = 1$, la derivata seconda si annulla e la matrice hessiana risulta semidefinita non definita negativa. Questa circostanza non è sufficiente ad affermare che l'equilibrio sia un massimo relativo proprio, ma neppure lo esclude. In effetti il punto non è né un massimo né un minimo. Per verificarlo si considera la forma adimensionalizzata del potenziale

$$\frac{1}{ka^2}U(s, \vartheta) = \frac{1}{2} \frac{mg}{ka} \cos \vartheta + \frac{mg}{ka} s - \frac{s^2}{2} + s \cos \vartheta$$

e si impone la condizione $mg/ka = 2/3$:

$$\frac{1}{ka^2}U(s, \vartheta) = \frac{1}{3} \cos \vartheta + \frac{2}{3} s - \frac{s^2}{2} + s \cos \vartheta.$$

Per evidenziare le variazioni dei parametri lagrangiani rispetto ai valori di equilibrio si introduce il cambiamento di variabili $(s, \vartheta) \rightarrow (\delta s, \delta\vartheta)$ definito da

$$s = \frac{mg}{ka} - 1 + \delta s = \frac{2}{3} - 1 + \delta s = -\frac{1}{3} + \delta s \quad \vartheta = \pi + \delta\vartheta$$

che consente di riscrivere l'espressione nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{ka^2}U\left(-\frac{1}{3} + \delta s, \pi + \delta\vartheta\right) &= \\ &= \frac{1}{3} \cos(\pi + \delta\vartheta) + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3} + \delta s\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} + \delta s\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} + \delta s\right) \cos(\pi + \delta\vartheta) = \\ &= -\frac{1}{3} \cos \delta\vartheta - \frac{2}{9} + \frac{2}{3}\delta s - \frac{1}{18} - \frac{1}{2}\delta s^2 + \frac{1}{3}\delta s + \frac{1}{3} \cos \delta\vartheta - \delta s \cos \delta\vartheta = \\ &= -\frac{5}{18} - \frac{1}{2}\delta s^2 + \delta s - \delta s \cos \delta\vartheta = -\frac{5}{18} - \frac{1}{2}\delta s^2 + 2\delta s \sin^2\left(\frac{\delta\vartheta}{2}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Conviene ricorrere ad una rappresentazione matriciale del risultato ottenuto

$$\frac{1}{ka^2}U\left(-\frac{1}{3} + \delta s, \pi + \delta\vartheta\right) = -\frac{5}{18} + \left(\delta s \quad \sin^2\left(\frac{\delta\vartheta}{2}\right)\right) \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s \\ \sin^2\left(\frac{\delta\vartheta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

in quanto la matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante negativo ed è quindi indefinita, con un autovalore positivo ed uno negativo. Ne segue che se $(\delta s, \sin^2(\delta\vartheta/2))$ è un autovettore associato all'autovalore positivo dovrà aversi

$$\frac{1}{ka^2}U\left(-\frac{1}{3} + \delta s, \pi + \delta\vartheta\right) > -\frac{5}{18} = \frac{1}{ka^2}U\left(-\frac{1}{3}, \pi\right)$$

mentre qualora si tratti di un autovettore relativo all'autovalore negativo risulterà

$$\frac{1}{ka^2}U\left(-\frac{1}{3} + \delta s, \pi + \delta\vartheta\right) < -\frac{5}{18} = \frac{1}{ka^2}U\left(-\frac{1}{3}, \pi\right).$$

Più precisamente, gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\det \begin{pmatrix} -1/2 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

ossia dell'equazione di secondo grado

$$\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - 1 = 0$$

che porge le radici

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Gli autovettori associati a $\lambda_+ = (-1 + \sqrt{17})/4$ sono determinati dal sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} -1/2 - \lambda_+ & 1 \\ 1 & -\lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \neq 0$$

vale a dire

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}\right)a_1 + b_1 = 0 \\ a_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}\right)b_1 = 0 \end{cases}$$

da cui segue l'insieme di soluzioni non banali

$$a_1 = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} b_1, \quad \forall b_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione (8) cresce quindi rispetto al valore di equilibrio $-5/18$ se

$$\delta s = \frac{\sqrt{17}-1}{4} \sin^2\left(\frac{\delta\vartheta}{2}\right)$$

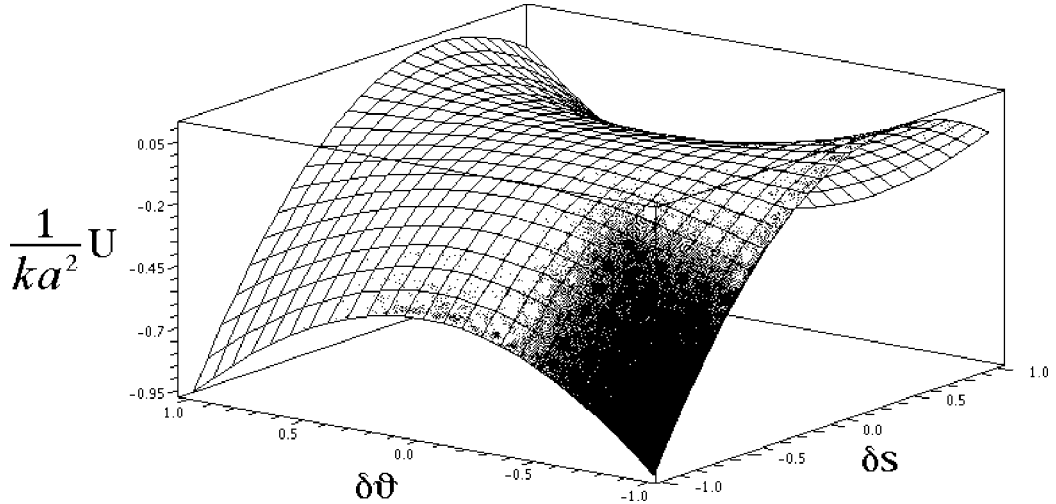
per ogni $\delta\vartheta \neq 0$ abbastanza piccolo in valore assoluto. In modo analogo si verifica che all'autovalore negativo $\lambda_- = (-1 - \sqrt{17})/4$ corrispondono autovettori del tipo (a_2, b_2) , con

$$a_2 = \frac{-\sqrt{17}-1}{4} b_2, \quad \forall b_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

in modo che la (8) assume valori minori di $-5/18$ per

$$\delta s = -\frac{\sqrt{17}+1}{4} \sin^2\left(\frac{\delta\vartheta}{2}\right)$$

con qualsiasi $\delta\vartheta \neq 0$ sufficientemente vicino a 0. A riprova del risultato, la figura seguente mostra il grafico di U/ka^2 nell'intorno di $(\delta s, \delta\vartheta) = (0, 0)$:



che ha infatti un andamento “a sella”. Dal momento che la configurazione non è un massimo relativo proprio del potenziale, essa risulta instabile per i criteri di Barbasin-Krasovskii.

Configurazione $(s, \vartheta) = (-mg/2ka, \vartheta^*)$

Per questa configurazione la matrice hessiana del potenziale vale

$$\begin{aligned} H_U\left(-\frac{mg}{2ka}, \vartheta^*\right) &= \begin{pmatrix} -ka^2 & -ka^2 \sin \vartheta^* \\ -ka^2 \sin \vartheta^* & -\frac{1}{2}mga \cos \vartheta^* - ka^2\left(-\frac{mg}{2ka}\right) \cos \vartheta^* \end{pmatrix} = \\ &= ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -\sin \vartheta^* \\ -\sin \vartheta^* & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ed ha determinante negativo

$$\det H_U \left(-\frac{mg}{2ka}, \vartheta^* \right) = -k^2 a^4 \sin^2 \vartheta^* < 0$$

risultando perciò indefinita. Questa condizione esclude che la configurazione sia un massimo relativo proprio del potenziale. L'equilibrio è instabile per i criteri di Barbasin-Krasovskii.

Configurazione $(s, \vartheta) = (-mg/2ka, -\vartheta^*)$

Nella fattispecie l'hessiana del potenziale diventa

$$H_U \left(-\frac{mg}{2ka}, -\vartheta^* \right) = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & \sin \vartheta^* \\ \sin \vartheta^* & 0 \end{pmatrix}$$

ed è ancora indefinita, come nel caso precedente. Ciò basta ad escludere che l'equilibrio sia un massimo relativo proprio del potenziale e a concludere, per Barbasin-Krasovskii, che si tratti di un equilibrio instabile.

Osservazione. Condizione dei vincoli ideali

Per questo sistema è possibile offrire una interpretazione molto semplice della condizione dei vincoli ideali. Il generico atto di moto virtuale del sistema in una configurazione assegnata (s, ϑ) si ottiene specificando la velocità istantanea del punto P e di qualsiasi punto Q della piastra $ABCD$. Per il punto P si ha

$$\vec{v}_P = -a\alpha_s \hat{e}_2 \quad \forall \alpha_s \in \mathbb{R}$$

mentre per un qualsiasi $Q \in ABCD$ vale

$$\vec{v}_Q = \alpha_\vartheta \hat{e}_3 \wedge (Q - O) \quad \forall \alpha_\vartheta \in \mathbb{R}$$

in modo che la potenza virtuale delle reazioni vincolari agenti sul sistema diventa

$$\begin{aligned} \sum_{P_i} \vec{v}_i \cdot \vec{\Phi}_i &= -a\alpha_s \hat{e}_2 \cdot \vec{\Phi}_P + \alpha_\vartheta \sum_{Q \in ABCD} \hat{e}_3 \wedge (Q - O) \cdot \vec{\Phi}_Q = \\ &= -\alpha_s a \hat{e}_2 \cdot \vec{\Phi}_P + \alpha_\vartheta \hat{e}_3 \cdot \sum_{Q \in ABCD} (Q - O) \wedge \vec{\Phi}_Q = -\alpha_s a \hat{e}_2 \cdot \vec{\Phi}_P + \alpha_\vartheta \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\phi \end{aligned}$$

ed il suo annullarsi per qualsiasi $\alpha_s, \alpha_\vartheta \in \mathbb{R}$ impone che si abbia

$$\hat{e}_2 \cdot \vec{\Phi}_P = 0 \quad \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\phi = 0$$

Il sistema risulta quindi a vincoli ideali se e soltanto se:

- (i) P si muove *senza attrito* lungo l'asse Oy , e
- (ii) la piastra $ABCD$ presenta un asse fisso Ox *privo di attrito*.

Osservazione. Equilibri con le equazioni cardinali della statica

Sfruttando la caratterizzazione dei vincoli ideali, proviamo a rideterminare le equazioni di equilibrio (7) mediante le equazioni cardinali della statica. Le reazioni vincolari compatibili con la condizione dei vincoli ideali sono tutte e sole quelle che soddisfano le equazioni

$$\hat{e}_2 \cdot \vec{\Phi}_P = 0 \quad \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\phi = 0.$$

Al fine di ottenere equazioni *pure* di equilibrio si dovranno perciò scrivere la prima equazione cardinale della statica per il punto P e la seconda equazione cardinale rispetto al momento O per la piastra. In condizioni statiche le forze dissipative D_s e D_ϑ si annullano e sono perciò del tutto irrilevanti per la realizzazione degli equilibri.

Prima equazione cardinale della statica per il punto P

Si proietta lungo \hat{e}_2 la somma delle forze agenti sul punto P

$$[-mg\hat{e}_2 + k(M - P) + \vec{\Phi}_P] \cdot \hat{e}_2 = 0$$

e usando la relazione (3) si ottiene

$$-mg + ka(s - \cos \vartheta) + 0 = 0$$

che coincide con la prima delle (7).

Seconda equazione cardinale statica in O per la piastra

Considerando la componente lungo \hat{e}_3 della seconda equazione cardinale della piastra rispetto all'asse Oy , si ha

$$[(G - O) \wedge (-mg\hat{e}_2) + (M - O) \wedge [k(P - M)] + \vec{M}_O^\phi] \cdot \hat{e}_3 = 0$$

ossia

$$\left[\frac{M - O}{2} \wedge (-mg\hat{e}_2) + (M - O) \wedge [k(P - O)] + \vec{M}_O^\phi \right] \cdot \hat{e}_3 = 0$$

e ancora

$$\frac{a}{2}(\sin \vartheta \hat{e}_1 - \cos \vartheta \hat{e}_2) \wedge (-mg\hat{e}_2) \cdot \hat{e}_3 + a(\sin \vartheta \hat{e}_1 - \cos \vartheta \hat{e}_2) \wedge (-kas)\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 + \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\phi = 0$$

per cui

$$-\frac{1}{2}mga \sin \vartheta - ka^2s \sin \vartheta = 0.$$

Quest'ultima relazione equivale alla seconda delle equazioni di equilibrio (7).

Soluzione dell'esercizio 4

La lagrangiana del sistema è

$$\mathfrak{L} = \frac{mR^2}{2} \left(\dot{s}^2 + \cos \varphi \dot{s}\dot{\varphi} + \frac{1}{3}\dot{\varphi}^2 \right) + mgR \left(\cos \varphi - \frac{s^2}{2} \right)$$

e poichè essa descrive un sistema scleronomo l'energia cinetica deve identificarsi con la funzione quadratica delle velocità generalizzate:

$$T = \frac{mR^2}{2} \left(\dot{s}^2 + \cos \varphi \dot{s}\dot{\varphi} + \frac{1}{3}\dot{\varphi}^2 \right)$$

mentre il termine residuo rappresenta il potenziale:

$$U(s, \varphi) = mgR \left(\cos \varphi - \frac{s^2}{2} \right).$$

La matrice A di rappresentazione dell'energia cinetica è definita da

$$T = \frac{1}{2} (\dot{s} \ \dot{\varphi}) A \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

e si scrive perciò

$$A = mR^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \cos \varphi \\ \frac{1}{2} \cos \varphi & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A(\varphi).$$

Per le derivate parziali prime del potenziale U si hanno le espressioni:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -mgRs \qquad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mgR \sin \varphi$$

e le derivate seconde risultano:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = -mgR \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial s} = \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -mgR \cos \varphi$$

in modo che la matrice hessiana di U assume la forma

$$H_U(s, \varphi) = \begin{pmatrix} -mgR & 0 \\ 0 & -mgR \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Appare evidente che gli equilibri del sistema ricorrono per $(s, \varphi) = (0, 0)$ e per $(s, \varphi) = (0, \pi)$, e che soltanto il primo è stabile, dal momento che $H_U(0, 0)$ risulta definita negativa.

(a) Equazioni delle piccole oscillazioni

Le matrici $A(\varphi)$ e $H_U(s, \varphi)$ devono essere calcolate in $(s, \varphi) = (0, 0)$:

$$A(0) = mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad H_U(0, 0) = \begin{pmatrix} -mgR & 0 \\ 0 & -mgR \end{pmatrix}.$$

Le equazioni delle piccole oscillazioni nell'intorno di $(s, \varphi) = (0, 0)$ diventano allora

$$A(0) \begin{pmatrix} \delta \ddot{s} \\ \delta \ddot{\varphi} \end{pmatrix} - H_U(0, 0) \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = 0$$

ossia

$$mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\delta s} \\ \ddot{\delta \varphi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -mgR & 0 \\ 0 & -mgR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = 0$$

e quindi, eseguiti i prodotti e separate le componenti,

$$\begin{cases} mR^2 \left(\ddot{\delta s} + \frac{1}{2} \ddot{\delta \varphi} \right) + mgR \delta s = 0 \\ mR^2 \left(\frac{1}{2} \ddot{\delta s} + \frac{1}{3} \ddot{\delta \varphi} \right) + mgR \delta \varphi = 0 \end{cases}$$

valide per $(s, \varphi) = (\delta s, \delta \varphi)$ sufficientemente prossimi a $(0, 0)$.

(b) Frequenze normali

Le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni sono determinate dalle soluzioni positive in ω dell'equazione caratteristica:

$$\det[\omega^2 A(0) + H_U(0, 0)] = 0$$

vale a dire di

$$\det \begin{pmatrix} mR^2 \omega^2 - mgR & \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \\ \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 & \frac{1}{3} mR^2 \omega^2 - mgR \end{pmatrix} = 0$$

che raccogliendo il fattore mR^2 da tutti gli elementi di matrice diventa

$$\det \begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{g}{R} & \frac{1}{2} \omega^2 \\ \frac{1}{2} \omega^2 & \frac{1}{3} \omega^2 - \frac{g}{R} \end{pmatrix} = 0$$

e dunque

$$\left(\omega^2 - \frac{g}{R} \right) \left(\frac{1}{3} \omega^2 - \frac{g}{R} \right) - \frac{1}{4} \omega^4 = 0$$

ossia

$$\omega^4 - 16 \frac{g}{R} \omega^2 + 12 \frac{g^2}{R^2} = 0.$$

Le radici in ω^2 dell'equazione sono

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[16 \frac{g}{R} \pm \sqrt{256 \frac{g^2}{R^2} - 4 \cdot 12 \frac{g^2}{R^2}} \right] = (8 \pm 2\sqrt{13}) \frac{g}{R}$$

e porgono le pulsazioni normali

$$\omega_1 = \sqrt{8 - 2\sqrt{13}} \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \omega_2 = \sqrt{8 + 2\sqrt{13}} \sqrt{\frac{g}{R}}$$

con $\omega_1 < \omega_2$. Le frequenze dei modi normali di oscillazione sono pertanto:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{8 - 2\sqrt{13}} \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{8 + 2\sqrt{13}} \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

(c) Modi normali

I modi normali delle piccole oscillazioni sono della forma

$$\begin{pmatrix} \delta s \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \cos(\omega_i t + \alpha_i)$$

con le fasi $\alpha_i \in \mathbb{R}$ arbitrarie e i vettori delle ampiezze determinati dal problema agli autovalori generalizzato

$$[\omega^2 A(0) + H_U(0,0)] \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

I modi normali si distinguono in “basso” e “alto”, secondo il valore della relativa pulsazione normale — il modo basso corrisponde alla pulsazione minore, mentre il modo alto è associato alla pulsazione maggiore.

Modo basso

Per $\omega = \omega_1$ il problema agli autovalori (9) si riduce a

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2 - \frac{g}{R} & \frac{1}{2}\omega_1^2 \\ \frac{1}{2}\omega_1^2 & \frac{1}{3}\omega_1^2 - \frac{g}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$. Si ha perciò il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} (7 - 2\sqrt{13})\frac{g}{R} a_1 + (4 - \sqrt{13})\frac{g}{R} b_1 = 0 \\ (4 - \sqrt{13})\frac{g}{R} a_1 + \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2} - 1\right)\frac{g}{R} b_1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} (7 - 2\sqrt{13}) a_1 + (4 - \sqrt{13}) b_1 = 0 \\ (4 - \sqrt{13}) a_1 + \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}\right) b_1 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Dalla prima delle equazioni (10) si ricava

$$\frac{b_1}{a_1} = -\frac{7 - 2\sqrt{13}}{4 - \sqrt{13}} = -\frac{(7 - 2\sqrt{13})(4 + \sqrt{13})}{16 - 13} = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3},$$

lo stesso risultato che si trae dalla seconda

$$\frac{b_1}{a_1} = -3 \frac{4 - \sqrt{13}}{5 - 2\sqrt{13}} = -3 \frac{(4 - \sqrt{13})(5 + 2\sqrt{13})}{25 - 52} = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}.$$

Pertanto $b_1 = a_1(\sqrt{13} - 2)/3$, e posto $a_1 = 3A_1$ il modo normale di oscillazione può scriversi:

$$\begin{pmatrix} \delta s \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{13} - 2 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{8 - 2\sqrt{13}} \sqrt{\frac{g}{R}} t + \alpha_1\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

con $A_1 > 0$ e $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ costanti assegnate a piacere.

Modo alto

Il vettore delle ampiezze per il secondo modo normale di oscillazione — $\omega = \omega_2$ — viene determinato risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} \omega_2^2 - \frac{g}{R} & \frac{1}{2}\omega_2^2 \\ \frac{1}{2}\omega_2^2 & \frac{1}{3}\omega_2^2 - \frac{g}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

rispetto a $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$. Sostituendo l'espressione di ω_2 si ottiene il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} (8 + 2\sqrt{13} - 1)\frac{g}{R} a_2 + \frac{1}{2}(8 + 2\sqrt{13})\frac{g}{R} b_2 = 0 \\ \frac{1}{2}(8 + 2\sqrt{13})\frac{g}{R} a_2 + \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{13} - 1\right)\frac{g}{R} b_2 = 0 \end{cases}$$

od anche

$$\begin{cases} (7 + 2\sqrt{13}) a_2 + (4 + \sqrt{13}) b_2 = 0 \\ (4 + \sqrt{13}) a_2 + \frac{5 + 2\sqrt{13}}{3} b_2 = 0. \end{cases}$$

Le equazioni ottenute coincidono con le (10) salvo che per la sostituzione $\sqrt{13} \longrightarrow -\sqrt{13}$. La soluzione deve quindi essere ottenibile dalla precedente tramite la stessa sostituzione:

$$b_2 = \frac{-\sqrt{13} - 2}{3} a_2 = -\frac{\sqrt{13} + 2}{3} a_2.$$

Conviene porre $a_2 = 3A_2$ per ricavare l'espressione del modo normale di oscillazione nella forma

$$\begin{pmatrix} \delta s \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -(\sqrt{13} + 2) \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{8 + 2\sqrt{13}} \sqrt{\frac{g}{R}} t + \alpha_2\right) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

con $A_2 > 0$ e $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie assegnate.