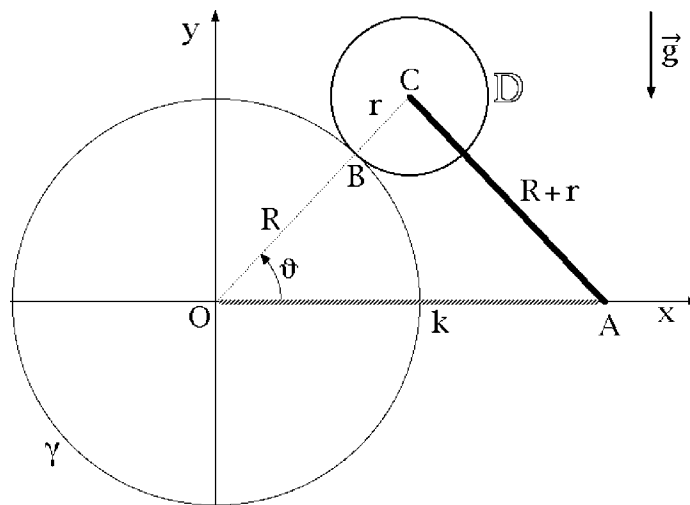


Prova in itinere di meccanica razionale 2 del 17.04.2009

Esercizio 1

Nel piano coordinato Oxy di una terna galileiana $Oxyz$ un disco circolare omogeneo \mathbb{D} , di centro C , raggio r e massa m , rotola senza strisciare lungo l'esterno di una circonferenza fissa γ di centro O e raggio R . Al centro C è incernierata un'asta rettilinea omogenea AC , di lunghezza $R+r$ e massa m , il cui secondo estremo può scorrere senza attrito lungo l'asse orizzontale Ox . Il sistema è pesante e una molla ideale di costante elastica k collega A con O . Reazioni vincolari agiscono in A , in C e nel punto di contatto B fra \mathbb{D} e γ .



Si usi la coordinata $\vartheta \in \mathbb{R}$ in figura per determinare:

- le equazioni cardinali statiche che esprimono la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del sistema;
- gli equilibri del sistema usando le equazioni ricavate in (a);
- le reazioni vincolari esterne $\vec{\Phi}_A$, $\vec{\Phi}_B$, $\vec{\Phi}_C$ in ciascuno stato di quiete del sistema.

Esercizio 2

Un corpo rigido \mathbb{S} è appoggiato ad un piano orizzontale liscio e debolmente cedevole, che coincide con il piano Oxy di una terna inerziale $Oxyz$. Il corpo presenta i seguenti punti di appoggio:

$$P_1(0, 0) \quad P_2(8, 0) \quad P_3(6, 2) \quad P_4(8, 4) \quad P_5(0, 4) \quad P_6(2, 2).$$

Si chiede di determinare del sistema:

- (a) il poligono d'appoggio;
- (b) il poligono di completo appoggio;
- (c) le reazioni vincolari esterne qualora il baricentro di \mathbb{S} sia $G(3, 3/2, 2)$, una volta verificato l'equilibrio.

Esercizio 3

Un punto materiale di massa unitaria è vincolato a scorrere lungo l'asse Ox e sottoposto ad una forza posizionale di potenziale

$$U(x) = e^{-x^2}(-x^4 + 3x^2 - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Determinare le condizioni iniziali corrispondenti ai moti periodici.
- (b) Individuare per quali condizioni iniziali i moti del sistema sono a meta asintotica.
- (c) Disegnare il ritratto di fase del sistema, specificando i livelli di energia relativi alle varie orbite.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Equazioni cardinali della statica

Le equazioni cardinali statiche che caratterizzano completamente gli equilibri del sistema sono quelle scritte per tutte le parti rigide che compongono il sistema, vale a dire il disco \mathbb{D} e l'asta AC . Per ipotesi le reazioni vincolari esterne agenti sulle parti rigide sono applicate nei punti A , B e C . Poichè tutte le forze attive che si esercitano sul sistema giacciono nel piano Oxy , si può assumere che le componenti lungo z delle reazioni vincolari in A , B e C siano nulle.

Forze esterne agenti sul disco \mathbb{D}

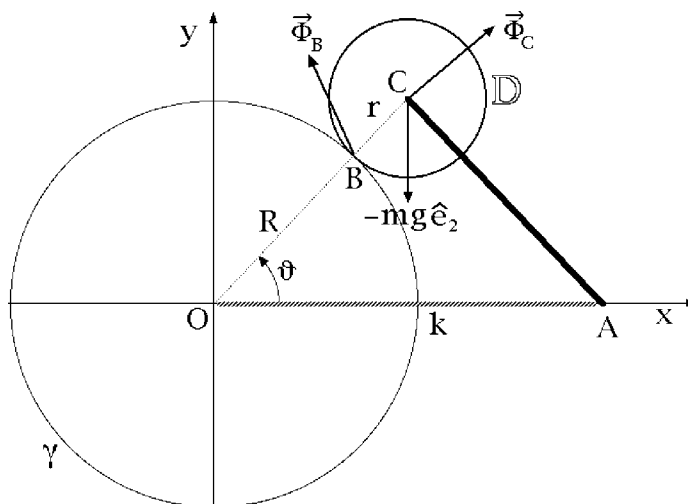
L'unica forza attiva agente sul disco omogeneo è costituita dal sistema delle forze peso, che è equivalente al peso totale $-mg \hat{e}_2$ applicato nel baricentro C del corpo rigido. Una reazione vincolare

$$\vec{\Phi}_B = \Phi_{Bx} \hat{e}_1 + \Phi_{By} \hat{e}_2$$

viene esercitata dalla guida γ nel punto di contatto B con il disco. A questa si aggiunge una ulteriore reazione

$$\vec{\Phi}_C = \Phi_{Cx} \hat{e}_1 + \Phi_{Cy} \hat{e}_2$$

esercitata sul disco nel centro C dal corrispondente estremo dell'asta AC .



Prima equazione cardinale della statica per il disco \mathbb{D}

In condizioni di quiete la somma delle forze esterne agenti sul disco, attive e di reazione vincolare, deve essere uguale a zero — si ricorda che le reazioni vincolari interne possono consistere in qualsiasi sistema di forze applicate ai punti del disco con risultante e momento risultante nulli (corpo rigido perfetto):

$$\Phi_{Bx} \hat{e}_1 + \Phi_{By} \hat{e}_2 + \Phi_{Cx} \hat{e}_1 + \Phi_{Cy} \hat{e}_2 - mg \hat{e}_2 = 0.$$

Se ne traggono le due equazioni scalari indipendenti:

$$\Phi_{Bx} + \Phi_{Cx} = 0 \qquad \Phi_{By} + \Phi_{Cy} - mg = 0.$$

Seconda equazione cardinale della statica per il disco \mathbb{D}

In condizioni statiche il momento risultante delle forze esterne applicate al disco, rispetto ad un qualunque polo, deve annullarsi. In questo caso conviene adottare il centro C come polo, dal momento che ciò consente di eliminare i contributi della forza peso e della reazione $\vec{\Phi}_C$. Si ha pertanto l'equazione:

$$(B - C) \wedge \vec{\Phi}_B + (C - C) \wedge (\vec{\Phi}_C - mg \hat{e}_2) = 0$$

che si riduce a

$$(B - C) \wedge \vec{\Phi}_B = 0$$

e sostituendo l'espressione esplicita del vettore $B - C$ diventa

$$r(-\cos \vartheta \hat{e}_1 - \sin \vartheta \hat{e}_2) \wedge (\Phi_{Bx} \hat{e}_1 + \Phi_{By} \hat{e}_2) = 0$$

ossia

$$r(-\cos \vartheta \Phi_{By} + \sin \vartheta \Phi_{Bx}) \hat{e}_3 = 0.$$

La seconda equazione cardinale della statica per il disco conduce pertanto all'unica condizione

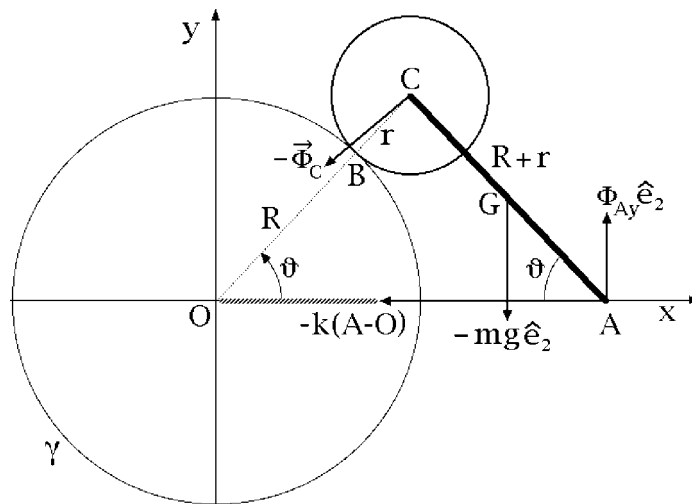
$$\sin \vartheta \Phi_{Bx} - \cos \vartheta \Phi_{By} = 0.$$

Forze esterne agenti sull'asta AC

L'asta omogenea AC è sottoposta alla forza elastica $-k(A - O)$ nell'estremo A e al sistema delle forze peso, equivalente al peso totale $-mg \hat{e}_2$ applicato nel punto medio G del segmento AC . La reazione vincolare in A assume la forma

$$\Phi_{Ay} \hat{e}_2$$

in quanto, per ipotesi, lo scorrimento di A lungo l'asse Ox avviene senza attrito. Il principio di azione e reazione impone infine che in C il disco eserciti sull'asta una reazione vincolare $-\vec{\Phi}_C$, l'opposto della reazione $\vec{\Phi}_C$ che AC esercita su \mathbb{D} .



Prima equazione cardinale della statica per l'asta AC

La prima equazione cardinale statica per l'asta richiede che si annulli il risultante di tutte le forze esterne applicate:

$$-\vec{\Phi}_C - mg \hat{e}_2 + \Phi_{Ay} \hat{e}_2 - k(A - O) = 0$$

vale a dire, osservato che $A - O = 2|A - C| \cos \vartheta \hat{e}_1 = 2(R + r) \cos \vartheta \hat{e}_1$,

$$-\Phi_{Cx} \hat{e}_1 - \Phi_{Cy} \hat{e}_2 - mg \hat{e}_2 + \Phi_{Ay} \hat{e}_2 - k 2(R + r) \cos \vartheta \hat{e}_1 = 0.$$

Si perviene così alle due equazioni di equilibrio:

$$-\Phi_{Cx} - 2k(R + r) \cos \vartheta = 0 \qquad -\Phi_{Cy} - mg + \Phi_{Ay} = 0.$$

Seconda equazione cardinale della statica per l'asta AC

È conveniente impostare la seconda equazione cardinale della statica rispetto all'estremo C , poichè in tal modo vengono eliminate le *due* componenti incognite di $\vec{\Phi}_C$ anzichè l'*unica* componente Φ_{Ay} . Si ha allora la relazione vettoriale

$$(C - C) \wedge (-\vec{\Phi}_C) + (G - C) \wedge (-mg \hat{e}_2) + (A - C) \wedge [-k(A - O) + \Phi_{Ay} \hat{e}_2] = 0$$

che grazie alle espressioni

$$G - C = \frac{R + r}{2} (\cos \vartheta \hat{e}_1 - \sin \vartheta \hat{e}_2) \qquad A - C = (R + r) (\cos \vartheta \hat{e}_1 - \sin \vartheta \hat{e}_2)$$

viene ricondotta a

$$\begin{aligned} & \frac{R + r}{2} (\cos \vartheta \hat{e}_1 - \sin \vartheta \hat{e}_2) \wedge (-mg \hat{e}_2) + \\ & + (R + r) (\cos \vartheta \hat{e}_1 - \sin \vartheta \hat{e}_2) \wedge [-2k(R + r) \cos \vartheta \hat{e}_1 + \Phi_{Ay} \hat{e}_2] = 0 \end{aligned}$$

e quindi a

$$-\frac{R + r}{2} mg \cos \vartheta \hat{e}_3 + (R + r) [\cos \vartheta \Phi_{Ay} - 2k(R + r) \sin \vartheta \cos \vartheta] \hat{e}_3 = 0.$$

La seconda equazione cardinale statica in C per l'asta porge pertanto la sola equazione di equilibrio

$$-\frac{1}{2} mg \cos \vartheta + \cos \vartheta \Phi_{Ay} - 2k(R + r) \sin \vartheta \cos \vartheta = 0.$$

(b) Equilibri mediante le equazioni cardinali della statica

Equazione pura di equilibrio

Collezionando tutte le componenti scalari non banali delle equazioni cardinali statiche scritte per disco ed asta si perviene al seguente sistema di equazioni, che esprime la condizio-

ne necessaria e sufficiente per l'equilibrio:

$$\Phi_{Bx} + \Phi_{Cx} = 0 \quad (.1.a)$$

$$\Phi_{By} + \Phi_{Cy} = mg \quad (.1.b)$$

$$\sin \vartheta \Phi_{Bx} - \cos \vartheta \Phi_{By} = 0 \quad (.1.c)$$

$$\Phi_{Cx} = -2k(R+r) \cos \vartheta \quad (.1.d)$$

$$\Phi_{Ay} - \Phi_{Cy} = mg \quad (.1.e)$$

$$-\frac{1}{2}mg \cos \vartheta + \Phi_{Ay} \cos \vartheta - 2k(R+r) \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \quad (.1.f)$$

e può riformularsi nel modo seguente:

$$\Phi_{Bx} = -\Phi_{Cx} \quad (.2.a)$$

$$\Phi_{By} = mg - \Phi_{Cy} \quad (.2.b)$$

$$\sin \vartheta \Phi_{Bx} - \cos \vartheta \Phi_{By} = 0 \quad (.2.c)$$

$$\Phi_{Cx} = -2k(R+r) \cos \vartheta \quad (.2.d)$$

$$\Phi_{Ay} = mg + \Phi_{Cy} \quad (.2.e)$$

$$-\frac{1}{2}mg \cos \vartheta + \Phi_{Ay} \cos \vartheta - 2k(R+r) \sin \vartheta \cos \vartheta = 0. \quad (.2.f)$$

Le equazioni (.2.a) e (.2.b) sostituite nella (.2.c) la riducono alla forma

$$\sin \vartheta (-\Phi_{Cx}) - \cos \vartheta (mg - \Phi_{Cy}) = 0$$

ossia

$$\sin \vartheta \Phi_{Cx} + mg \cos \vartheta - \cos \vartheta \Phi_{Cy} = 0 \quad (.3.c)$$

che con l'inserimento della (.2.d) diventa

$$-2k(R+r) \sin \vartheta \cos \vartheta + mg \cos \vartheta - \cos \vartheta \Phi_{Cy} = 0 \quad (.4.d)$$

e porge

$$\cos \vartheta \Phi_{Cy} = -2k(R+r) \sin \vartheta \cos \vartheta + mg \cos \vartheta. \quad (.5.c)$$

Moltiplicando la (.2.e) membro a membro per $\cos \vartheta$ si ha allora l'equazione

$$\cos \vartheta \Phi_{Ay} = mg \cos \vartheta + \cos \vartheta \Phi_{Cy}$$

che in virtù della (.5.c) assume la forma

$$\cos \vartheta \Phi_{Ay} = mg \cos \vartheta - 2k(R+r) \sin \vartheta \cos \vartheta + mg \cos \vartheta = 2mg \cos \vartheta - 2k(R+r) \sin \vartheta \cos \vartheta$$

e sostituita nella (.2.f) conduce all'equazione pura di equilibrio:

$$-\frac{1}{2}mg \cos \vartheta + [2mg \cos \vartheta - 2k(R+r) \sin \vartheta \cos \vartheta] - 2k(R+r) \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$$

ovvero

$$\frac{3}{2}mg \cos \vartheta - 4k(R+r) \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$$

ed infine

$$\left[\frac{3}{8} \frac{mg}{k(R+r)} - \sin \vartheta \right] \cos \vartheta = 0. \quad (.6)$$

Configurazioni di equilibrio

L'equazione (.6) ammette due radici definite incondizionatamente

$$\vartheta = +\pi/2 \qquad \vartheta = -\pi/2$$

per $\cos \vartheta = 0$, e due ulteriori equilibri

$$\vartheta = \arcsin \left[\frac{3}{8} \frac{mg}{k(R+r)} \right] := \vartheta^* \qquad \vartheta = \pi - \vartheta^*,$$

definiti e distinti dai precedenti a condizione che si abbia

$$\frac{3}{8} \frac{mg}{k(R+r)} < 1$$

in quanto soluzioni dell'equazione parziale $\sin \vartheta = 3mg/8k(R+r)$. Giova sottolineare, per la successiva analisi delle reazioni vincolari esterne negli stati di quiete, che $\vartheta^* \in (0, \pi/2)$ e $\pi - \vartheta^* \in (\pi/2, \pi)$.

(c) Reazioni vincolari esterne per gli stati di quiete

Stato di quiete nella configurazione $\vartheta = \pi/2$

In questo caso le equazioni (.2) si riducono a

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{Bx} = -\Phi_{Cx} \\ \Phi_{By} = mg - \Phi_{Cy} \\ \Phi_{Bx} = 0 \\ \Phi_{Cx} = 0 \\ \Phi_{Ay} = mg + \Phi_{Cy} \\ 0 = 0 \end{array} \right. \quad (.7)$$

e porgono la soluzione seguente:

$$\Phi_{Bx} = 0 \qquad \Phi_{Cx} = 0 \qquad \Phi_{Ay} = mg + \Phi_{Cy} \qquad \Phi_{By} = mg - \Phi_{Cy}$$

che corrisponde alle reazioni vincolari esterne

$$\vec{\Phi}_A = (mg + \Phi_{Cy})\hat{e}_2 \quad \vec{\Phi}_B = (mg - \Phi_{Cy})\hat{e}_2 \quad \vec{\Phi}_C = \Phi_{Cy}\hat{e}_2$$

definite a meno di una scelta arbitraria della componente $\Phi_{Cy} \in \mathbb{R}$. Dal momento che le reazioni vincolari non sono determinate univocamente, in questa configurazione il sistema risulta *staticamente indeterminato*.

Stato di quiete nella configurazione $\vartheta = -\pi/2$

Nella fattispecie le equazioni (.2) diventano

$$\begin{cases} \Phi_{Bx} = -\Phi_{Cx} \\ \Phi_{By} = mg - \Phi_{Cy} \\ -\Phi_{Bx} = 0 \\ \Phi_{Cx} = 0 \\ \Phi_{Ay} = mg + \Phi_{Cy} \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (.8)$$

con lo stesso risultato dell'equilibrio precedente:

$$\Phi_{Bx} = 0 \quad \Phi_{Cx} = 0 \quad \Phi_{Ay} = mg + \Phi_{Cy} \quad \Phi_{By} = mg - \Phi_{Cy}.$$

Il sistema è quindi ancora staticamente indeterminato, con le reazioni vincolari esterne

$$\vec{\Phi}_A = (mg + \Phi_{Cy})\hat{e}_2 \quad \vec{\Phi}_B = (mg - \Phi_{Cy})\hat{e}_2 \quad \vec{\Phi}_C = \Phi_{Cy}\hat{e}_2$$

individuate a meno della componente arbitraria $\Phi_{Cy} \in \mathbb{R}$.

Stato di quiete nella configurazione $\vartheta = \vartheta^$*

La forma assunta dalle equazioni (.2) in questa configurazione è la seguente

$$\Phi_{Bx} = -\Phi_{Cx} \quad (.9.a)$$

$$\Phi_{By} = mg - \Phi_{Cy} \quad (.9.b)$$

$$\sin \vartheta^* \Phi_{Bx} - \cos \vartheta^* \Phi_{By} = 0 \quad (.9.c)$$

$$\Phi_{Cx} = -2k(R + r) \cos \vartheta^* \quad (.9.d)$$

$$\Phi_{Ay} = mg + \Phi_{Cy} \quad (.9.e)$$

$$\left[-\frac{1}{2}mg + \Phi_{Ay} - 2k(R + r) \sin \vartheta^* \right] \cos \vartheta^* = 0 \quad (.9.f)$$

nella quale $\cos \vartheta^* \neq 0$, in modo che la (.9.f) equivale a

$$-\frac{1}{2}mg + \Phi_{Ay} - 2k(R + r) \sin \vartheta^* = 0$$

e fornisce

$$\Phi_{Ay} = \frac{1}{2}mg + 2k(R+r)\sin\vartheta^* = \frac{1}{2}mg + 2k(R+r)\frac{3}{8}\frac{mg}{k(R+r)} = \frac{5}{4}mg. \quad (.10)$$

La (.9.e) diventa così

$$\Phi_{Cy} = \Phi_{Ay} - mg = \frac{5}{4}mg - mg = \frac{1}{4}mg \quad (.11)$$

e permette di ridurre la (.9.b) a

$$\Phi_{By} = mg - \frac{1}{4}mg = \frac{3}{4}mg, \quad (.12)$$

mentre la (.9.e) inserita in (.9.a) porge

$$\Phi_{Bx} = 2k(R+r)\cos\vartheta^* \quad (.13)$$

e la (.9.c) è soddisfatta. In definitiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{Ay} = \frac{5}{4}mg \\ \Phi_{Bx} = 2k(R+r)\cos\vartheta^* \\ \Phi_{By} = \frac{3}{4}mg \\ \Phi_{Cx} = -2k(R+r)\cos\vartheta^* \\ \Phi_{Cy} = \frac{1}{4}mg \end{array} \right. \quad \vartheta^* = \arcsin\left[\frac{3}{8}\frac{mg}{k(R+r)}\right]$$

per cui le reazioni vincolari all'equilibrio sono definite in modo univoco

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_A &= \frac{5}{4}mg \hat{e}_2 & \vec{\Phi}_B &= 2k(R+r)\cos\vartheta^* \hat{e}_1 + \frac{3}{4}mg \hat{e}_2 \\ \vec{\Phi}_C &= -2k(R+r)\cos\vartheta^* \hat{e}_1 + \frac{1}{4}mg \hat{e}_2 \end{aligned}$$

e il sistema risulta, in questa configurazione, *staticamente determinato*.

Stato di quiete nella configurazione $\vartheta = \pi - \vartheta^$*

In questa configurazione le equazioni cardinali statiche delle parti rigide costituenti il sistema si riducono a:

$$\Phi_{Bx} = -\Phi_{Cx} \quad (.14.a)$$

$$\Phi_{By} = mg - \Phi_{Cy} \quad (.14.b)$$

$$\sin\vartheta^*\Phi_{Bx} + \cos\vartheta^*\Phi_{By} = 0 \quad (.14.c)$$

$$\Phi_{Cx} = 2k(R+r)\cos\vartheta^* \quad (.14.d)$$

$$\Phi_{Ay} = mg + \Phi_{Cy} \quad (.14.e)$$

$$\left[-\frac{1}{2}mg + \Phi_{Ay} - 2k(R+r)\sin\vartheta^* \right] \cos\vartheta^* = 0. \quad (.14.f)$$

La (.14.f) fornisce, come prima,

$$\Phi_{Ay} = \frac{1}{2}mg + 2k(R+r) \sin \vartheta^* = \frac{5}{4}mg \quad (.15)$$

per cui la (.14.e) conduce a

$$\Phi_{Cy} = \Phi_{Ay} - mg = \frac{5}{4}mg - mg = \frac{1}{4}mg. \quad (.16)$$

Dalle equazioni (.14.d) e (.14.a) si deduce inoltre

$$\Phi_{Bx} = -2k(R+r) \cos \vartheta^* \quad (.17)$$

mentre da (.14.b) e (.16) si ha

$$\Phi_{By} = mg - \frac{1}{4}mg = \frac{3}{4}mg. \quad (.18)$$

Si verifica infine che la (.14.c) è soddisfatta:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta^* \Phi_{Bx} + \cos \vartheta^* \Phi_{By} &= -\sin \vartheta^* 2k(R+r) \cos \vartheta^* + \cos \vartheta^* \frac{3}{4}mg = \\ &= 2k(R+r) \cos \vartheta^* \left[-\sin \vartheta^* + \frac{3}{8} \frac{mg}{k(R+r)} \right] = 2k(R+r) \cos \vartheta^* \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

In conclusione, in questa configurazione il sistema si presenta *staticamente determinato*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{Ay} = \frac{5}{4}mg \\ \Phi_{Bx} = -2k(R+r) \cos \vartheta^* \\ \Phi_{By} = \frac{3}{4}mg \\ \Phi_{Cx} = 2k(R+r) \cos \vartheta^* \\ \Phi_{Cy} = \frac{1}{4}mg \end{array} \right. \quad \vartheta^* = \arcsin \left[\frac{3}{8} \frac{mg}{k(R+r)} \right]$$

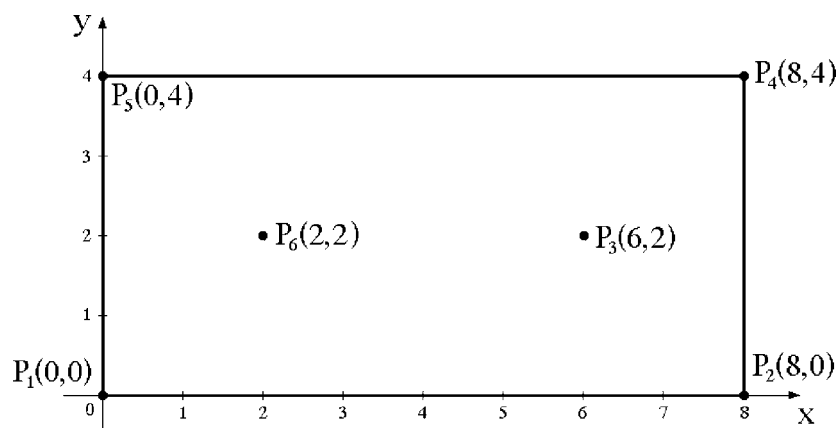
con le reazioni vincolari esterne

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_A &= \frac{5}{4}mg \hat{e}_2 & \vec{\Phi}_B &= -2k(R+r) \cos \vartheta^* \hat{e}_1 + \frac{3}{4}mg \hat{e}_2 \\ \vec{\Phi}_C &= 2k(R+r) \cos \vartheta^* \hat{e}_1 + \frac{1}{4}mg \hat{e}_2. \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Poligono d'appoggio

Dall'esame della figura appare del tutto evidente che l'involuppo convesso della base d'appoggio è dato dal rettangolo di vertici P_1, P_2, P_4, P_5 , che dunque costituisce il poligono d'appoggio del sistema nella configurazione assegnata.



(b) Poligono di completo appoggio

Il poligono di completo appoggio del sistema, nella configurazione assegnata, può essere determinato *in modo diretto*, applicando la formula generale per i coefficienti di struttura e le corrispondenti reazioni vincolari esterne agli appoggi, oppure *in maniera indiretta*, mediante l'introduzione di una terna di riferimento appropriata, che sfrutti la simmetria della base d'appoggio per semplificare il calcolo. Nella discussione che segue la base d'appoggio è indicata con

$$\Omega = \{P_i(x_i, y_i) \in Oxy, i = 1, \dots, 6\},$$

essendo (x_i, y_i) le coordinate del punto d'appoggio P_i .

Metodo diretto

La matrice necessaria per il calcolo dei coefficienti di struttura e delle reazioni vincolari esterne agli appoggi è data da:

$$S = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_x \\ S_{xy} & S_{yy} & S_y \\ S_x & S_y & \#\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 168 & 48 & 24 \\ 48 & 40 & 12 \\ 24 & 12 & 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 84 & 24 & 12 \\ 24 & 20 & 6 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

per via delle ovvie espressioni:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 0^2 + 8^2 + 6^2 + 8^2 + 0^2 + 2^2 = 168$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^6 x_i y_i = 0 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 48$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^6 y_i^2 = 0^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 = 40$$

$$S_x = \sum_{i=1}^6 x_i = 0 + 8 + 6 + 8 + 0 + 2 = 24$$

$$S_y = \sum_{i=1}^6 x_i = 0 + 0 + 2 + 4 + 4 + 2 = 12,$$

oltre a $\#\Omega = 6$. Il determinante della matrice — simmetrica — si scrive

$$\begin{aligned} \det S &= 8 \begin{vmatrix} 84 & 24 & 12 \\ 24 & 20 & 6 \\ 12 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 8 \left(84 \begin{vmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 24 \begin{vmatrix} 24 & 6 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} + 12 \begin{vmatrix} 24 & 20 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} \right) = \\ &= 8[84 \cdot 24 - 24(72 - 72) + 12(144 - 240)] = 8(84 \cdot 24 - 12 \cdot 96) = 6912 \end{aligned}$$

e consente di esprimere la relativa inversa — pure simmetrica — per mezzo del teorema di Laplace:

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \frac{4}{6912} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 24 & 12 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 24 & 12 \\ 20 & 6 \end{vmatrix} \\ \times & & \begin{vmatrix} 84 & 12 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 84 & 12 \\ 24 & 6 \end{vmatrix} \\ \times & & \times & \begin{vmatrix} 84 & 24 \\ 24 & 20 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1728} \begin{pmatrix} 24 & 0 & -96 \\ 0 & 108 & -216 \\ -96 & -216 & 1104 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -24 \\ 0 & 27 & -54 \\ -24 & -54 & 276 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il poligono di completo appoggio è allora definito dall'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{ (x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2 : (x_i \ y_i \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, 6 \right\}. \quad (.19)$$

Conviene calcolare in primo luogo i prodotti parziali costanti:

$$(x_1 \ y_1 \ 1) S^{-1} = (0 \ 0 \ 1) \frac{1}{432} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -24 \\ 0 & 27 & -54 \\ -24 & -54 & 276 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (-24 \ -54 \ 276)$$

$$\begin{aligned} (x_2 \ y_2 \ 1) S^{-1} &= (8 \ 0 \ 1) \frac{1}{432} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -24 \\ 0 & 27 & -54 \\ -24 & -54 & 276 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{432} (48 - 24 \quad -54 \quad -8 \cdot 24 + 276) = \frac{1}{432} (24 \quad -54 \quad 84) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_3 \ y_3 \ 1)S^{-1} &= (6 \ 2 \ 1) \frac{1}{432} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -24 \\ 0 & 27 & -54 \\ -24 & -54 & 276 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{432} (36 - 24 \quad 54 - 54 \quad -144 - 108 + 276) = \frac{1}{432} (12 \quad 0 \quad 24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_4 \ y_4 \ 1)S^{-1} &= (8 \ 4 \ 1) \frac{1}{432} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -24 \\ 0 & 27 & -54 \\ -24 & -54 & 276 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{432} (48 - 24 \quad 4 \cdot 27 - 54 \quad -8 \cdot 24 - 4 \cdot 54 + 276) = \\
&= \frac{1}{432} (24 \quad 54 \quad -132)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_5 \ y_5 \ 1)S^{-1} &= (0 \ 4 \ 1) \frac{1}{432} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -24 \\ 0 & 27 & -54 \\ -24 & -54 & 276 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{432} (-24 \quad 4 \cdot 27 - 54 \quad -4 \cdot 54 + 276) = \frac{1}{432} (-24 \quad 54 \quad 60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_6 \ y_6 \ 1)S^{-1} &= (2 \ 2 \ 1) \frac{1}{432} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -24 \\ 0 & 27 & -54 \\ -24 & -54 & 276 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{432} (12 - 24 \quad 0 \quad -48 - 108 + 276) = \frac{1}{432} (-12 \quad 0 \quad 120).
\end{aligned}$$

in modo che, posto per brevità $(x_G, y_G) = (x, y)$, si perviene alle espressioni:

$$(x_1 \ y_1 \ 1)S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (-24 \quad -54 \quad 276) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (-24x - 54y + 276)$$

$$(x_2 \ y_2 \ 1)S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (24 \quad -54 \quad 84) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (24x - 54y + 84)$$

$$(x_3 \ y_3 \ 1)S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (12 \quad 0 \quad 24) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (12x + 24)$$

$$(x_4 \ y_4 \ 1)S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (24 \quad 54 \quad -132) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (24x + 54y - 132)$$

$$(x_5 \ y_5 \ 1)S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (-24 \quad 54 \quad 60) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (-24x + 54y + 60)$$

$$(x_6 \ y_6 \ 1)S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (-12 \quad 0 \quad 120) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (-12x + 120).$$

I punti del poligono di completo appoggio sono tutte e sole le coppie (x, y) che soddisfano il sistema di disequazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} -24x - 54y + 276 > 0 \\ 24x - 54y + 84 > 0 \\ 12x + 24 > 0 \\ 24x + 54y - 132 > 0 \\ -24x + 54y + 60 > 0 \\ -12x + 120 > 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -4x - 9y + 46 > 0 \\ 4x - 9y + 14 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ 4x + 9y - 22 > 0 \\ -4x + 9y + 10 > 0 \\ -x + 10 > 0. \end{array} \right. \quad (.20)$$

La disequazione $-4x - 9y + 46 > 0$ individua il semipiano aperto contenente l'origine e delimitato dalla retta di equazione

$$-4x - 9y + 46 = 0$$

che interseca gli assi coordinati nei punti $(0, 46/9)$ e $(23/2, 0)$.

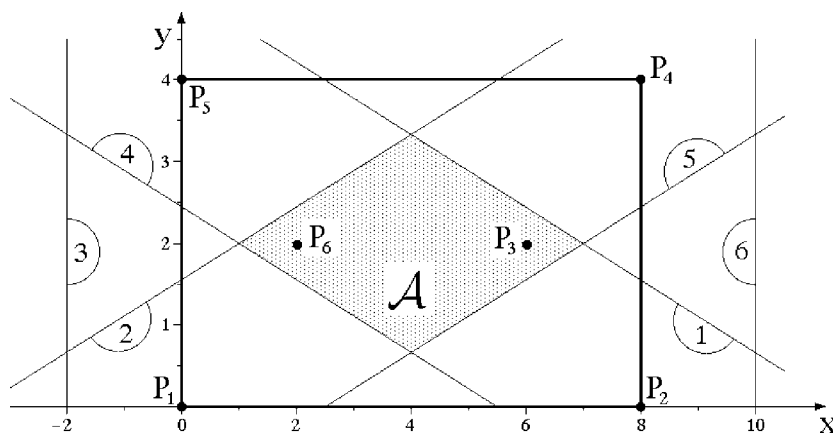
La relazione $4x - 9y + 14 > 0$ descrive invece il semipiano aperto che contiene l'origine ed ha come frontiera la retta $4x - 9y + 14 = 0$, le cui intersezioni con gli assi coordinati sono i punti $(0, 14/9)$ e $(-7/2, 0)$.

Per $4x + 9y - 22 > 0$ si ottiene il semipiano aperto che *non contiene l'origine* e che ha per frontiera la retta $4x + 9y - 22 = 0$, passante per i punti $(0, 22/9)$ e $(11/2, 0)$.

Alla diseuguaglianza $-4x + 9y + 10 > 0$ corrisponde il semipiano aperto comprendente l'origine e delimitato dalla retta di equazione $-4x + 9y + 10 = 0$, le cui intersezioni con gli assi coordinati sono date dai punti $(0, -10/9)$ e $(5/2, 0)$.

Le disequazioni $x + 2 > 0$ e $-x + 10 > 0$ individuano infine la striscia aperta $-2 < x < 10$.

La figura seguente mette in evidenza, con l'ombreggiatura, la soluzione \mathcal{A} del sistema (.20) — i numeri progressivi indicano le disequazioni del sistema, ordinate dall'alto verso il basso:



Metodo indiretto

Il sistema di punti materiali ottenuto attribuendo massa unitaria a tutti i punti della base d'appoggio ha baricentro B determinato da

$$B - O = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (x_i \hat{e}_1 + y_i \hat{e}_2) = \frac{1}{6} S_x \hat{e}_1 + \frac{1}{6} S_y \hat{e}_2 = \frac{1}{6} 24 \hat{e}_1 + \frac{1}{6} 12 \hat{e}_2 = 4 \hat{e}_1 + 2 \hat{e}_2 .$$

Le rette $B\xi$ e $B\eta$, rispettivamente parallele agli assi Ox e Oy , costituiscono ovvi assi di simmetria per cui $B\xi\eta z$ è una terna centrale d'inerzia dello stesso sistema materiale fittizio. Rispetto a $B\xi\eta z$ le coordinate dei punti di appoggio risultano:

$$P_1(-4, -2) \quad P_2(4, -2) \quad P_3(2, 0) \quad P_4(4, 2) \quad P_5(-4, 2) \quad P_6(-2, 0)$$

con

$$S_{\xi\xi} = \sum_{i=1}^6 \xi_i^2 = (-4)^2 + 4^2 + 2^2 + 4^2 + (-4)^2 + (-2)^2 = 72$$

$$S_{\eta\eta} = \sum_{i=1}^6 \eta_i^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 = 16$$

$$S_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^6 \xi_i \eta_i = 0 \quad S_{\xi} = \sum_{i=1}^6 \xi_i = 0 \quad S_{\eta} = \sum_{i=1}^6 \eta_i = 0$$

per cui la matrice S assume la forma diagonale:

$$S = \begin{pmatrix} 72 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} .$$

Nella terna $O\xi\eta z$ l'area di completo appoggio è dunque individuata da

$$\mathcal{A} = \left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : (\xi_i \ \eta_i \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, 6 \right\}$$

ossia, esplicitando l'inversa della matrice S ed eseguendo i prodotti matriciali,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\xi_i}{72} \xi + \frac{\eta_i}{16} \eta + \frac{1}{6} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, 6 \right\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^6 \left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\xi_i}{72} \xi + \frac{\eta_i}{16} \eta + \frac{1}{6} > 0 \right\} . \end{aligned}$$

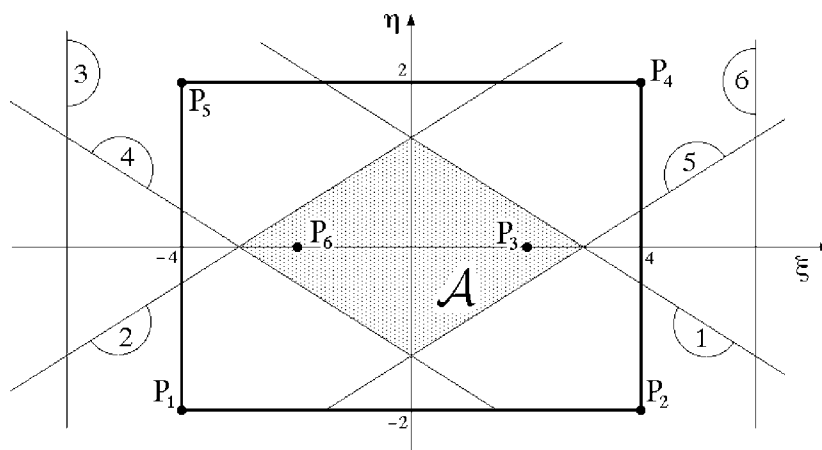
Basta così sostituire le coordinate degli appoggi per ottenere il sistema di disequazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{4}{72}\xi - \frac{2}{16}\eta + \frac{1}{6} > 0 \\ \frac{4}{72}\xi - \frac{2}{16}\eta + \frac{1}{6} > 0 \\ \frac{2}{72}\xi + \frac{1}{6} > 0 \\ \frac{4}{72}\xi + \frac{2}{16}\eta + \frac{1}{6} > 0 \\ -\frac{4}{72}\xi + \frac{2}{16}\eta + \frac{1}{6} > 0 \\ -\frac{2}{72}\xi + \frac{1}{6} > 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3}\xi - \frac{3}{4}\eta + 1 > 0 \\ \frac{1}{3}\xi - \frac{3}{4}\eta + 1 > 0 \\ \frac{1}{6}\xi + 1 > 0 \\ \frac{1}{3}\xi + \frac{3}{4}\eta + 1 > 0 \\ -\frac{1}{3}\xi + \frac{3}{4}\eta + 1 > 0 \\ -\frac{1}{6}\xi + 1 > 0 \end{array} \right.$$

ovvero il sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} -4\xi - 9\eta + 12 > 0 \\ 4\xi - 9\eta + 12 > 0 \\ \xi + 6 > 0 \\ 4\xi + 9\eta + 12 > 0 \\ -4\xi + 9\eta + 12 > 0 \\ -\xi + 6 > 0 \end{array} \right. \quad (.21)$$

che ammette il dominio di soluzioni evidenziato con il tratteggio nella figura seguente:



Questo sistema di disequazioni può ricondursi facilmente al sistema (.20) con l'introduzione del cambiamento di variabili:

$$\xi = x - x_B = x - 4 \quad \eta = y - y_B = y - 2$$

che sostituito in (.21) fornisce

$$\left\{ \begin{array}{l} -4(x-4) - 9(y-2) + 12 > 0 \\ 4(x-4) - 9(y-2) + 12 > 0 \\ (x-4) + 6 > 0 \\ 4(x-4) + 9(y-2) + 12 > 0 \\ -4(x-4) + 9(y-2) + 12 > 0 \\ -(x-4) + 6 > 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -4x - 9y + 46 > 0 \\ 4x - 9y + 14 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ 4x + 9y - 22 > 0 \\ -4x + 9y + 10 > 0 \\ -x + 10 > 0 \end{array} \right. \quad (.22)$$

come affermato.

(c) Reazioni vincolari esterne sugli appoggi

Se il baricentro G del sistema ha coordinate $(3, 3/2, 2)$, il centro di pressione è individuato dal vettore posizione

$$C - O = x_G \hat{e}_1 + y_G \hat{e}_2 = 3 \hat{e}_1 + \frac{3}{2} \hat{e}_2$$

che appartiene chiaramente al poligono d'appoggio ed assicura pertanto che la configurazione del sistema sia un equilibrio. A questo sono associati i coefficienti di struttura:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} mg = \frac{1}{432} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -24 \\ 0 & 27 & -54 \\ -24 & -54 & 276 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} mg = \frac{1}{432} \begin{pmatrix} -6 \\ -27/2 \\ 123 \end{pmatrix} mg.$$

Le componenti verticali delle reazioni vincolari esterne agli appoggi sono perciò:

$$\Phi_i = (x_i \quad y_i \quad 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{432} (x_i \quad y_i \quad 1) \begin{pmatrix} -6 \\ -27/2 \\ 123 \end{pmatrix} mg \quad i = 1, \dots, 6$$

ossia:

$$\Phi_1 = \frac{1}{432} (0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} -6 \\ -27/2 \\ 123 \end{pmatrix} mg = \frac{123}{432} mg = \frac{41}{144} mg$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{432} (8 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} -6 \\ -27/2 \\ 123 \end{pmatrix} mg = \frac{75}{432} mg = \frac{25}{144} mg$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{432} (6 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} -6 \\ -27/2 \\ 123 \end{pmatrix} mg = \frac{60}{432} mg = \frac{5}{36} mg$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{432} (8 \quad 4 \quad 1) \begin{pmatrix} -6 \\ -27/2 \\ 123 \end{pmatrix} mg = \frac{21}{432} mg = \frac{7}{144} mg$$

$$\Phi_5 = \frac{1}{432} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -27/2 \\ 123 \end{pmatrix} mg = \frac{69}{432} mg = \frac{23}{144} mg$$

$$\Phi_6 = \frac{1}{432} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -27/2 \\ 123 \end{pmatrix} mg = \frac{84}{432} mg = \frac{7}{36} mg$$

e risultano tutte positive. In effetti è facile verificare che il centro di pressione appartiene al poligono di completo appoggio, dal momento che le coordinate $(x_G, y_G) = (3, 3/2)$ soddisfano il sistema (.22):

$$\left\{ \begin{array}{l} -4x_G - 9y_G + 46 = \frac{41}{2} > 0 \\ 4x_G - 9y_G + 14 = \frac{25}{2} > 0 \\ x_G + 2 = 5 > 0 \\ 4x_G + 9y_G - 22 = \frac{7}{2} > 0 \\ -4x_G + 9y_G + 10 = \frac{23}{2} > 0 \\ -x_G + 10 = 7 > 0. \end{array} \right.$$

Vale la pena di notare, a riprova del risultato, che la somma delle reazioni vincolari esterne bilancia esattamente il peso totale del corpo \mathbb{S} :

$$\sum_{i=1}^6 \Phi_i = \frac{41}{144} mg + \frac{25}{144} mg + \frac{5}{36} mg + \frac{7}{144} mg + \frac{23}{144} mg + \frac{7}{36} mg = mg.$$

Concludendo, le reazioni vincolari agenti sui punti di appoggio del sistema nello stato di quiete sono:

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_1 &= \frac{41}{144} mg \hat{e}_3 & \vec{\Phi}_2 &= \frac{25}{144} mg \hat{e}_3 & \vec{\Phi}_3 &= \frac{5}{36} mg \hat{e}_3 \\ \vec{\Phi}_4 &= \frac{7}{144} mg \hat{e}_3 & \vec{\Phi}_5 &= \frac{23}{144} mg \hat{e}_3 & \vec{\Phi}_6 &= \frac{7}{36} mg \hat{e}_3. \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 3

Il sistema è scleronomo, posizionale conservativo e ad un solo grado di libertà. L'andamento qualitativo dei moto può quindi essere determinato ricorrendo all'analisi di Weierstrass. Al punto materiale è associata l'energia potenziale

$$W(x) = -U(x) = e^{-x^2} (x^4 - 3x^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R},$$

che è una funzione pari dell'intervallo reale. La derivata prima di W si scrive

$$\begin{aligned} W'(x) &= e^{-x^2} 2x(-x^4 + 3x^2 - 1) + e^{-x^2} (4x^3 - 6x) = \\ &= e^{-x^2} 2x(-x^4 + 3x^2 - 1 + 2x^2 - 3) = \\ &= e^{-x^2} 2x(-x^4 + 5x^2 - 4) = -e^{-x^2} 2x(x^4 - 5x^2 + 4) = \\ &= -e^{-x^2} 2x(x^4 - x^2 - 4x^2 + 4) = -e^{-x^2} 2x[x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1)] = \\ &= -e^{-x^2} 2x(x^2 - 4)(x^2 - 1) = -e^{-x^2} 2x(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1) \end{aligned}$$

ed annullandola si deducono i punti critici corrispondenti agli equilibri del sistema:

$$x = -2 \quad x = -1 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2.$$

Si ha inoltre

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = 0,$$

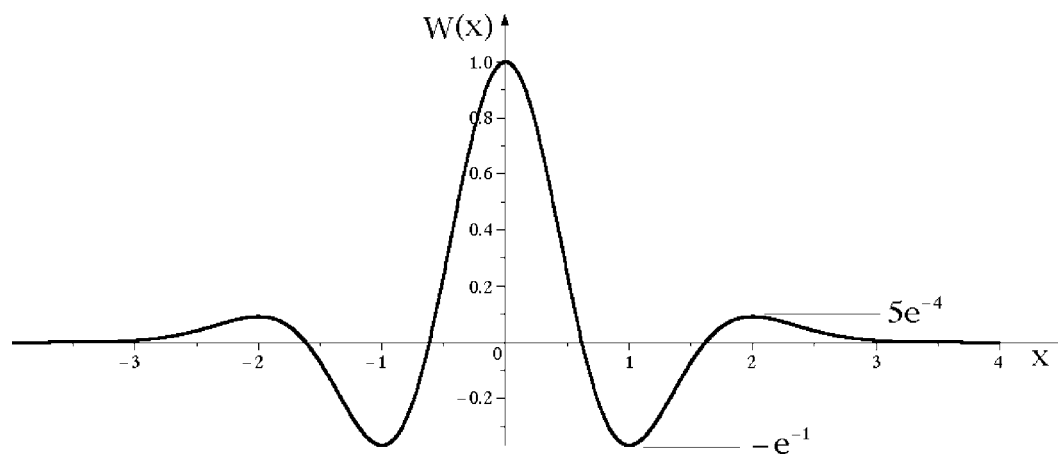
mentre i valori di W nei punti di equilibrio sono

$$W(2) = e^{-4}(16 - 12 + 1) = 5e^{-4} = W(-2)$$

$$W(1) = e^{-1}(1 - 3 + 1) = -e^{-1} = W(-1)$$

$$W(0) = 1.$$

Il grafico dell'energia potenziale deve quindi presentare l'andamento illustrato nella figura seguente:



con $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ massimi relativi propri e $x = -1$, $x = 1$ minimi relativi propri della funzione. Il grafico contiene tutte le informazioni necessarie a descrivere l'andamento qualitativo dei moti e a tracciare il relativo ritratto di fase.

(a) Condizioni iniziali per i moti periodici

Dall'esame del grafico di W e usando i criteri di Weierstrass appare evidente che i moti periodici del sistema ricorrono se e soltanto se l'energia meccanica del sistema

$$H(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + W(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} + e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1)$$

è compresa fra $W(1)$ e $W(2)$, a patto che il valore iniziale dell'ascissa x sia contenuto nell'intervallo $-2 < x < 2$. Le condizioni iniziali per i moti periodici sono pertanto tutte e sole quelle ricomprese nel dominio aperto di \mathbb{R}^2 :

$$\left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : -e^{-1} < \frac{\dot{x}^2}{2} + e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1) < 5e^{-4}, -2 < x < 2 \right\}.$$

(b) Condizioni iniziali per i moti a meta asintotica

I moti a meta asintotica si realizzano soltanto quando l'energia meccanica del sistema coincide con il valore dell'energia potenziale nei punti critici $x = 0$ e $x = 2$ — massimi relativi propri — purchè la velocità iniziale sia opportunamente orientata, se del caso. Nella fattispecie, i criteri di Weierstrass consentono di trarre le seguenti conclusioni:

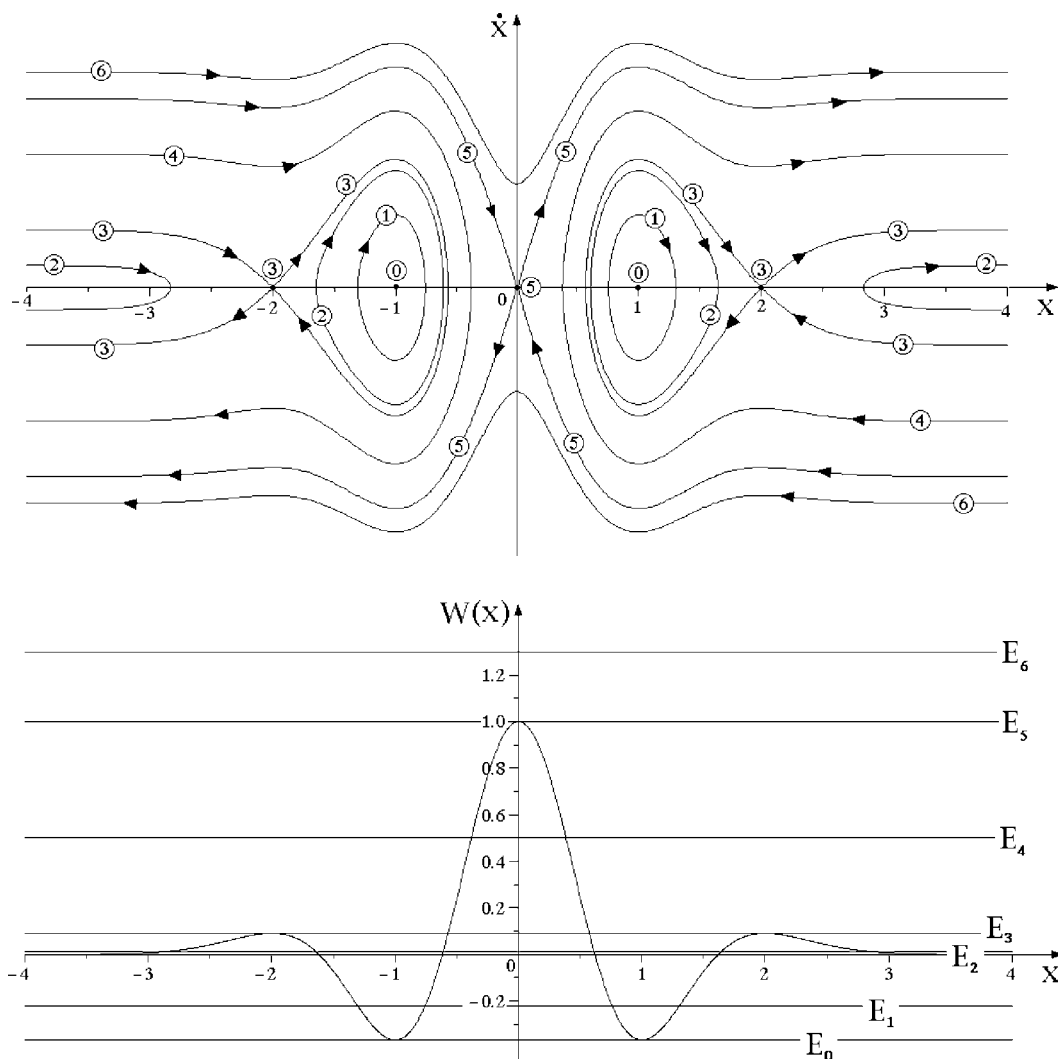
- per $H(x, \dot{x}) = W(2) = 5e^{-4}$, se il valore iniziale x_0 dell'ascissa è compreso fra -2 e 0 si ottiene una *soluzione omoclina*, che tende alla meta asintotica $x = -2$ tanto per $t \rightarrow +\infty$ quanto per $t \rightarrow -\infty$;
- per $H(x, \dot{x}) = W(2) = 5e^{-4}$ e $x_0 \in (0, 2)$ è definita un'ulteriore *soluzione omoclina*, simmetrica alla precedente, ma con meta asintotica $x = 2$;
- qualora sia $H(x, \dot{x}) = W(2) = 5e^{-4}$ e $x_0 < -2$, si perviene ad un moto a meta asintotica (nel futuro) unicamente per velocità iniziale \dot{x}_0 positiva. La meta asintotica è ovviamente $x = -2$;
- per $H(x, \dot{x}) = W(2) = 5e^{-4}$ e $x_0 > +2$, la condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia un moto asintotico (nel futuro) è che $\dot{x}_0 < 0$. La meta asintotica in questo caso è l'equilibrio $x = 2$;
- per $H(x, \dot{x}) = W(0) = 1$ e $x_0 < 0$, per ottenere un moto asintotico la velocità iniziale deve essere positiva. La meta asintotica risulta $x = 0$;
- se infine $H(x, \dot{x}) = W(0) = 1$ e $x_0 > 0$, sono i valori negativi della velocità iniziale che specificano i moti asintotici (nel futuro), sempre con meta asintotica $x = 0$.

Le condizioni iniziali per i moti a meta asintotica (nel futuro) sono dunque quelle appartenenti all'insieme:

$$\begin{aligned} & \left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\dot{x}^2}{2} + e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1) = 5e^{-4}, -2 < x < 0 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\dot{x}^2}{2} + e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1) = 5e^{-4}, 0 < x < 2 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\dot{x}^2}{2} + e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1) = 5e^{-4}, x < -2, \dot{x} > 0 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\dot{x}^2}{2} + e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1) = 5e^{-4}, x > 2, \dot{x} < 0 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\dot{x}^2}{2} + e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1) = 1, x < 0, \dot{x} > 0 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\dot{x}^2}{2} + e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1) = 1, x > 0, \dot{x} < 0 \right\}. \end{aligned}$$

(c) **Ritratto di fase**

Il ritratto di fase del sistema ha l'aspetto illustrato in figura:



Per appurarlo, è sufficiente considerare i livelli notevoli E_i , $i = 0, 1, \dots, 6$, dell'energia meccanica secondo i criteri seguenti:

$$\begin{aligned}
 E_0 &= W(1) = e^{-1} \\
 e^{-1} &= W(1) < E_1 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = 0 \\
 0 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) < E_2 < W(2) = 5e^{-4} \\
 E_3 &= W(2) = 5e^{-4} \\
 5e^{-4} &= W(2) < E_4 < W(0) = 1 \\
 E_5 &= W(0) = 1 \\
 E_6 &> W(0) = 1
 \end{aligned}$$

ed applicare i teoremi di Weierstrass. In particolare si osserva che:

- per $H = E_0$ si ottengono gli stati di quiete nelle configurazioni di equilibrio stabili $x = -1$ e $x = 1$;
- ogni curva di livello $H = E_1$ corrisponde a due orbite chiuse simmetriche nel piano delle fasi, ciascuna associata ad un moto periodico;
- per $H = E_2$ si individuano 4 orbite distinte, corrispondenti ad altrettante soluzioni. Due di esse sono associate soluzioni periodiche nelle striscie $-2 < x < 0$ e $0 < x < 2$; una terza soluzione, la cui orbita è ubicata nel semipiano $x > 2$ presenta un unico punto di inversione e tende a $x = +\infty$ tanto nel passato quanto nel futuro, risultando peraltro definita $\forall t \in \mathbb{R}$. Una quarta soluzione ha orbita nel semipiano $x < -2$, con un unico punto di inversione; è definita a tutti i tempi e tende a $x = -\infty$ sia per $t \rightarrow +\infty$ che per $t \rightarrow -\infty$;
- se $H = E_3$ si hanno le due orbite omocline in $-2 < x < 0$ e $0 < x < 2$ e le soluzioni a meta asintotica nel futuro già descritte al punto (b). In più, vengono individuati gli stati di quiete negli equilibri instabili $x = -2$ e $x = 2$ e due moti a meta asintotica *nel passato* per $x > 2$ e $x < -2$ rispettivamente;
- per $H = E_4$ si hanno due moti distinti, uno nel semipiano $x > 0$ e un altro nel semipiano $x < 0$. Entrambi sono definiti $\forall t \in \mathbb{R}$, presentano un solo punto di inversione e tendono, rispettivamente, a $x = +\infty$ e $x = -\infty$ tanto nel passato quanto nel futuro;
- per $H = E_5$ si perviene alla quiete nella posizione di equilibrio instabile $x = 0$ e ai due moti a meta asintotica già discussi al punto (b) — con meta asintotica in $x = 0$ nel futuro. Ricorrono anche due moti a meta asintotica nel passato, sempre con meta asintotica $x = 0$ e tendenti a $x = +\infty$ e $x = -\infty$ nel futuro;
- se infine $H = E_6$, il moto non presenta né punti di inversione né mete asintotiche e si mantiene indefinitamente progressivo per velocità iniziale positiva e indefinitamente retrogrado per velocità iniziale negativa.