

Esercizio 1

Un punto materiale di massa unitaria è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse orizzontale Ox e soggetto ad una forza posizionale conservativa di potenziale

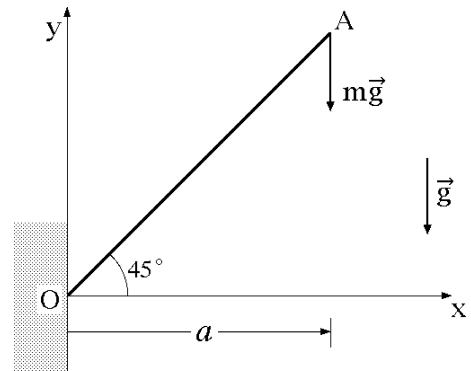
$$U(x) = \frac{1}{3x - x^3}$$

definito $\forall x \in \mathbb{R}$ diverso da $-\sqrt{3}$, 0 e $\sqrt{3}$. Si chiede di determinare del sistema:

- (a) tutte e sole le condizioni iniziali corrispondenti ai moti periodici;
- (b) le condizioni iniziali associate ai moti a meta asintotica nel futuro;
- (c) il ritratto di fase.

Esercizio 2

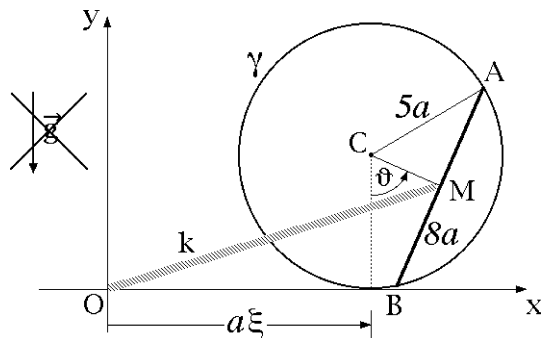
Una trave sottile OA , rettilinea, omogenea e pesante, di massa m e lunghezza $\sqrt{2}a$, ha l'estremo O incastrato nell'origine di un riferimento cartesiano Oxy , con l'asse Oy diretto verticalmente verso l'alto. La trave forma un angolo di 45° con il semiasse Ox positivo, e sorregge un peso $m\vec{g}$ agganciato all'estremo libero A . Supposto il sistema in quiete, determinare:



- (a) lo sforzo $\vec{R}(x)$, distinguendo sforzo normale e di taglio;
- (b) il momento $\vec{M}(x)$, distinguendo momento flettente e torcente.

Esercizio 3

Nel piano Oxy di una terna inerziale $Oxyz$ un anello circolare omogeneo γ , di raggio $5a$, centro C e massa m , rotola senza strisciare lungo l'asse Ox . Un'asta rettilinea omogenea AB , di massa m e lunghezza $8a$, ha gli estremi vincolati a scorrere su γ e il suo punto medio M è collegato all'origine da una molla ideale di costante elastica k . Su AB agisce un sistema di forze \mathbb{S} , con risultante $\vec{R} = -ka\hat{e}_2$ e momento risultante $\vec{M}_C = -3ka^2 \sin \vartheta \hat{e}_3$ in C . Resistenze viscosse di uguale costante β sono applicate in C e in M . Assunti i vincoli ideali e le forze peso trascurabili, usare le coordinate $(\xi, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$ in figura per determinare:



- le componenti generalizzate (i) delle sollecitazioni elastiche, (ii) del sistema di forze \mathbb{S} , e (iii) delle resistenze viscosse;
- gli equilibri del sistema;
- le proprietà di stabilità degli equilibri.

Esercizio 4

Le equazioni del moto che descrivono la dinamica di un sistema scleronomo posizionale conservativo sono definite per mezzo della lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{ma^2}{2} \left(3\dot{\xi}^2 + \frac{43}{3}\dot{\vartheta}^2 + 6 \cos \vartheta \dot{\xi} \dot{\vartheta} \right) + ka^2 \left(-\frac{\xi^2}{2} - 3\xi \sin \vartheta + 18 \cos \vartheta \right),$$

in cui $(\xi, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$ sono le coordinate generalizzate e m , a , k rispettivamente una massa, una lunghezza e una costante elastica caratteristiche del sistema. Ricavare, nell'intorno dell'equilibrio stabile $(\xi, \vartheta) = (0, 0)$:

- le equazioni delle piccole oscillazioni;
- le frequenze normali delle piccole oscillazioni;
- l'espressione dei modi normali di oscillazione, distinguendo il modo "basso" e quello "alto".

Soluzione dell'esercizio 1

Il sistema è scleronomo, posizionale conservativo e ad un solo grado di libertà. L'andamento qualitativo delle corrispondenti soluzioni può essere determinato applicando l'analisi di Weierstrass all'energia potenziale del sistema:

$$W(x) = -U(x) = \frac{1}{x^3 - 3x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}.$$

La funzione può riesprimersi nella forma:

$$W(x) = \frac{1}{(x + \sqrt{3})x(x - \sqrt{3})}$$

dalla quale risulta evidente che $W(x)$ presenta singolarità in $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ e $x = +\sqrt{3}$ ed ha segno negativo negli intervalli:

$$(-\infty, -\sqrt{3}) \quad (0, \sqrt{3})$$

e positivo negli intervalli:

$$(-\sqrt{3}, 0) \quad (+\sqrt{3}, +\infty).$$

Evidenti sono anche i limiti all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = 0.$$

La derivata prima della funzione vale:

$$W'(x) = -(x^3 - 3x)^{-2}(3x^2 - 3) = -3(x^3 - 3x)^{-2}(x^2 - 1)$$

e si annulla per $x = -1$ e $x = 1$. La natura di questi due punti critici viene stabilita calcolando la derivata seconda dell'energia potenziale:

$$W''(x) = -3(-2)(x^3 - 3x)^{-3}(3x^2 - 3)(x^2 - 1) - 3(x^3 - 3x)^{-2} 2x.$$

In $x = -1$ si ha

$$W''(-1) = -3 \cdot (-1 + 3)^{-2} \cdot 2 \cdot (-1) = 3/2$$

mentre per $x = 1$ risulta

$$W''(1) = -3 \cdot (1 - 3)^{-2} \cdot 2 \cdot 1 = -3/2.$$

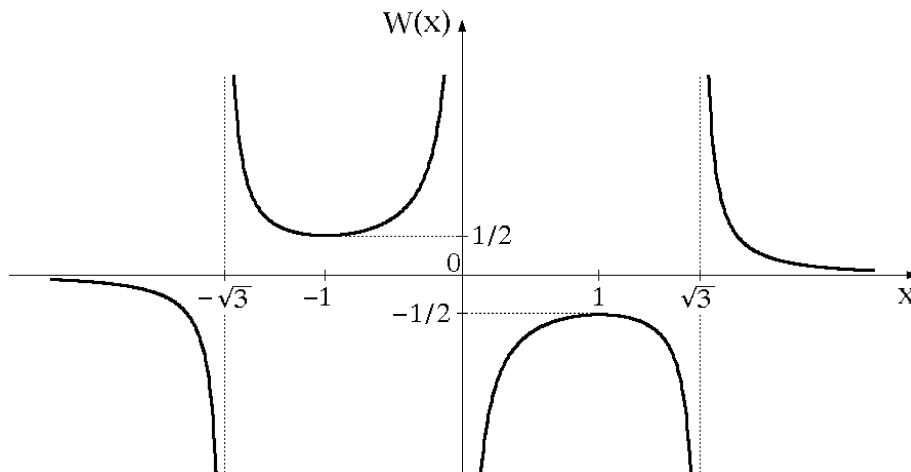
Conseguentemente, si riconosce che in $x = -1$ l'energia potenziale presenta un minimo relativo proprio, nel quale la funzione assume il valore:

$$W(-1) = \frac{1}{(-1)^3 - 3 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}.$$

In modo analogo, il punto critico $x = 1$ costituisce un massimo relativo proprio di W , nel quale risulta:

$$W(1) = \frac{1}{1^3 - 3 \cdot 1} = -\frac{1}{2}.$$

La funzione energia potenziale ha perciò il grafico illustrato nella figura seguente:



che rappresenta la base per la discussione di Weierstrass. L'energia meccanica conservata è infine data dall'espressione:

$$H(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + W(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{x^3 - 3x}.$$

(a) Condizioni iniziali per i moti periodici

I criteri di Weierstrass e l'andamento del grafico di W mostrano immediatamente che le condizioni iniziali associate ai moti periodici del sistema sono tutte e sole quelle con energia meccanica strettamente maggiore di $W(-1) = 1/2$ e posizione iniziale compresa nell'intervallo $x \in (-\sqrt{3}, 0)$, ovvero quelle ricomprese nel sottoinsieme di \mathbb{R}^2 :

$$\left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{3} < x < 0, \quad \frac{1}{2} < \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{x^3 - 3x} \right\}.$$

(b) Condizioni iniziali per i moti a meta asintotica nel futuro

I moti a meta asintotica nel futuro ricorrono per $H(x, \dot{x}) = W(1) = -1/2$, purchè si abbia:

- $\dot{x} > 0$ e $x \in (0, 1)$, oppure
- $\dot{x} < 0$ e $x \in (1, \sqrt{3})$.

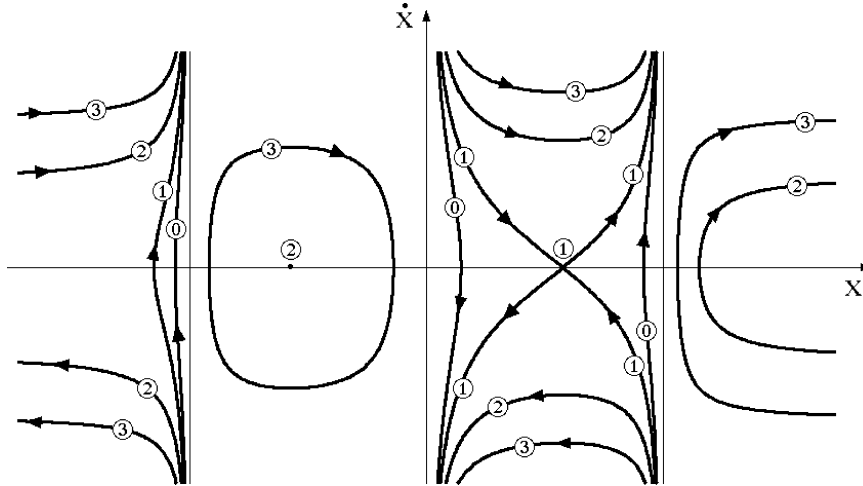
Le condizioni iniziali richieste sono pertanto quelle dell'insieme:

$$\left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \quad \dot{x} > 0, \quad \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{x^3 - 3x} = -\frac{1}{2} \right\} \cup$$

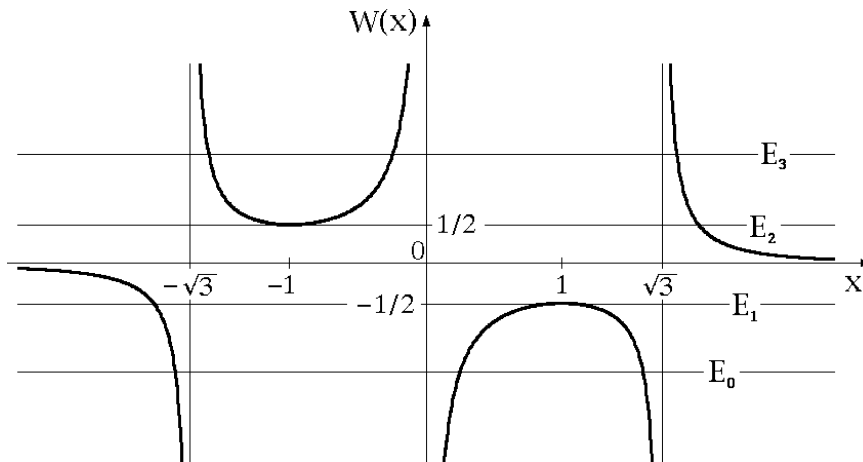
$$\cup \left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < \sqrt{3}, \quad \dot{x} < 0, \quad \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{x^3 - 3x} = -\frac{1}{2} \right\}.$$

(c) **Ritratto di fase**

Il ritratto di fase del sistema è illustrato nella figura seguente:



e si ricava facilmente studiando il grafico dell'energia potenziale W :



Basta considerare i livelli notevoli di energia meccanica evidenziati nella figura e applicare i criteri di Weierstrass appropriati. Più precisamente, si ha che:

- per $H(x, \dot{x}) = E_0$, con $E_0 < W(1) = -1/2$, una soluzione è ubicata nell'intervallo $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$, presenta un unico punto di inversione e tende asintoticamente a $x = -\sqrt{3}$ sia nel passato che nel futuro. Altre due soluzioni distinte, dall'andamento analogo, si situano negli intervalli $x \in (0, 1)$ e $x \in (1, \sqrt{3})$ rispettivamente: la prima tende asintoticamente a $x = 0$ nel passato come nel futuro, mentre la seconda converge a $x = \sqrt{3}$. Le soluzioni sono tutte definite su intervalli di tempo limitati. Ad esempio,

l'intervallo di tempo T occorrente alla soluzione in $x \in (0, 1)$ per passare dal punto di inversione $x = x_{inv}$ alla posizione asintotica $x = 0$ (fase di moto retrogrado) è dato dall'integrale:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x_{inv}} \frac{1}{\sqrt{E_0 - \frac{1}{x^3 - 3x}}} dx$$

che, oltre ad essere ovviamente convergente nel punto di inversione $x = x_{inv}$, converge anche in $x = 0$ causa la relazione:

$$\frac{1}{\sqrt{E_0 - \frac{1}{x^3 - 3x}}} = \sqrt{\frac{x^3 - 3x}{E_0(x^3 - 3x) - 1}} = \sqrt{\frac{3x - x^3}{1 - E_0(x^3 - 3x)}} \sim \sqrt{x} \quad (x \rightarrow 0+);$$

- per $H(x, \dot{x}) = E_1 = -1/2$ si individua una soluzione nell'intervallo $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$, con un unico punto di inversione del moto. Una ulteriore soluzione è costituita dallo stato di quiete nella posizione di equilibrio $x = 1$. Nello stesso intervallo $x \in (0, \sqrt{3})$ si collocano anche due soluzioni con meta asintotica $(x, \dot{x}) = (1, 0)$ nel futuro e altrettante con la stessa meta asintotica nel passato;
- se $H(x, \dot{x}) = E_2 = W(-1) = 1/2$ ricorrono due soluzioni in $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$, una progressiva e una retrograda, la prima divergente a $x = -\infty$ per $t \rightarrow -\infty$ e convergente a $x = -\sqrt{3}$ nel futuro, la seconda divergente a $x = -\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ e convergente a $x = -\sqrt{3}$ nel passato. Nell'intervallo $x \in (-\sqrt{3}, 0)$ risulta definito il solo stato di quiete nella posizione di equilibrio $x = -1$. Per $x \in (0, \sqrt{3})$ si hanno due soluzioni, una progressiva, convergente a $x = 0$ nel passato e a $x = \sqrt{3}$ nel futuro, e una retrograda che tende a $x = \sqrt{3}$ nel passato e a $x = 0$ nel futuro. Infine, una ulteriore soluzione è definita nell'intervallo $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$ con un singolo punto di inversione e divergente a $x = +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ e per $t \rightarrow -\infty$;
- per $H(x, \dot{x}) = E_3 > 1/2$ le soluzioni presentano gli stessi andamenti di quelle esaminate per $H = E_2$, salvo che la quiete in $x = -1$ è sostituita da un moto periodico sempre ubicato nell'intervallo $x \in (-\sqrt{3}, 0)$.

Vale la pena di notare che per $H(x, \dot{x}) = 0$ non ricorre alcuna soluzione delle equazioni del moto. Da rilevare inoltre come le soluzioni convergenti a $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ o $x = +\sqrt{3}$, nel passato o nel futuro, non possano considerarsi come moti a meta asintotica in senso stretto, dal momento che le configurazioni limite non appartengono al sistema.

Soluzione dell'esercizio 2

La trave sottile è soggetta ad un sistema di forze distribuite — le forze peso — la cui densità per unità di lunghezza si ricava dividendo il peso totale $-mg\hat{e}_2$ per la lunghezza $\sqrt{2}a$:

$$\vec{f} = -\frac{mg}{\sqrt{2}a} \hat{e}_2.$$

Una forza concentrata $-mg \hat{e}_2$ è inoltre applicata nell'estremo A . La trave presenta infine un incastro nel primo estremo O , mentre è libera nel secondo estremo A . Considerata l'inclinazione costante di 45° con il semiasse Ox positivo, la parametrizzazione della trave rettilinea si scrive

$$P(x) - O = x\hat{e}_1 + x\hat{e}_2, \quad x \in [0, a],$$

e l'elemento infinitesimo di lunghezza assume la forma

$$ds = |P'(x)| dx = |\hat{e}_1 + \hat{e}_2| dx = \sqrt{2} dx.$$

(a) **Sforzo** $\vec{R}(x)$

Si vuole determinare la distribuzione $\vec{R}(x)$ dello sforzo lungo la trave in funzione dell'ascissa $x \in [0, a]$, per lo stato di quiete. Tale distribuzione è governata dall'equazione di equilibrio:

$$\frac{d\vec{R}}{ds} + \vec{f} = 0$$

che introducendo l'ascissa x come variabile indipendente diventa in questo caso

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\vec{R}}{dx} + \vec{f}(x) = 0.$$

In $x = 0$ e $x = a$ valgono inoltre le condizioni di raccordo:

$$-\vec{R}(0-0) + \vec{R}(0+0) = 0 \quad -\vec{R}(a-0) - mg\hat{e}_2 + \vec{R}(a+0) = 0.$$

nelle quali $\vec{R}(0-0)$ è arbitrario per via dell'incastro in O , mentre $\vec{R}(a+0) = 0$ a causa dell'estremo libero in A . Si tratta quindi di risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\vec{R}}{dx}(x) - \frac{mg}{\sqrt{2}a} \hat{e}_2 = 0 \\ \vec{R}(a-0) = -mg\hat{e}_2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \frac{d\vec{R}}{dx}(x) = \frac{mg}{a} \hat{e}_2 \\ \vec{R}(a-0) = -mg\hat{e}_2 \end{cases}$$

nell'intervallo $x \in [0, a]$. Il modo più diretto per ricavare la soluzione consiste nell'integrare membro a membro l'equazione fra un generico $x \in (0, a)$ e $x = a$:

$$\int_x^a \frac{d\vec{R}}{dx}(x) dx = \int_x^a \frac{mg}{a} \hat{e}_2 dx$$

ottenendo così

$$\vec{R}(a-0) - \vec{R}(x) = \frac{mg}{a}(a-x)\hat{e}_2$$

e quindi

$$\vec{R}(x) = \vec{R}(a-0) - \frac{mg}{a}(a-x)\hat{e}_2 = -mg\hat{e}_2 - \frac{mg}{a}(a-x)\hat{e}_2 = mg\left(\frac{x}{a} - 2\right)\hat{e}_2.$$

Lo sforzo lungo la trave è così espresso da:

$$\vec{R}(x) = mg\left(\frac{x}{a} - 2\right)\hat{e}_2 \quad \forall x \in (0, a),$$

con i valori al contorno $\vec{R}(a-0) = -mg\hat{e}_2$ e

$$\vec{R}(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \vec{R}(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} mg\left(\frac{x}{a} - 2\right)\hat{e}_2 = -2mg\hat{e}_2.$$

Sforzo normale

Lo sforzo normale è costituito, per definizione, dalla componente dello sforzo tangente alla generatrice della trave. Il versore tangente alla generatrice è espresso da

$$\hat{\tau}(x) = \frac{P'(x)}{|P'(x)|} = \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2}{|\hat{e}_1 + \hat{e}_2|} = \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2}{\sqrt{2}},$$

in modo che lo sforzo normale assumerà la forma

$$\begin{aligned} \vec{R}_n(x) &= \vec{R}(x) \cdot \hat{\tau}(x) \hat{\tau}(x) = mg\left(\frac{x}{a} - 2\right)\hat{e}_2 \cdot \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2}{\sqrt{2}} \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{2}mg\left(\frac{x}{a} - 2\right)(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \quad \forall x \in (0, a). \end{aligned}$$

Sforzo di taglio

Lo sforzo di taglio è quello residuo, diretto ortogonalmente alla generatrice della trave:

$$\begin{aligned} \vec{R}_t(x) &= \vec{R}(x) - \vec{R}_n(x) = mg\left(\frac{x}{a} - 2\right)\hat{e}_2 - \frac{1}{2}mg\left(\frac{x}{a} - 2\right)(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = \\ &= \frac{1}{2}mg\left(\frac{x}{a} - 2\right)(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \quad \forall x \in (0, a). \end{aligned}$$

(b) **Momento** $\vec{M}(x)$

Per una trave sottile la distribuzione dei momenti in condizioni statiche deve soddisfare l'equazione differenziale

$$\frac{d\vec{M}}{ds}(s) + \frac{dP}{ds}(s) \wedge \vec{R}(s) = 0$$

che assumendo l'ascissa x come variabile indipendente diventa:

$$\frac{d\vec{M}}{dx}(x) + \frac{dP}{dx}(x) \wedge \vec{R}(x) = 0.$$

Nel primo estremo deve essere soddisfatta la condizione di raccordo:

$$-\vec{M}(0-0) + \vec{M}(0+0) = 0$$

con $\vec{M}(0-0)$ arbitrario, a causa dell'incastro. Poichè la trave è sottile, il momento della forza concentrata agente in A deve considerarsi nullo e conduce all'ulteriore condizione di raccordo:

$$-\vec{M}(a-0) + \vec{M}(a+0) = 0$$

nella quale l'essere A un estremo libero comporta si abbia $\vec{M}(a+0) = 0$. In definitiva, la determinazione dei momenti statici richiede la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\vec{M}}{dx}(x) + \frac{dP}{dx}(x) \wedge \vec{R}(x) = 0 \\ \vec{M}(a-0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

nell'intervallo $x \in [0, a]$. Dalle espressioni:

$$\frac{dP}{dx}(x) = \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \quad \vec{R}(x) = mg\left(\frac{x}{a} - 2\right)\hat{e}_2, \quad x \in (0, a),$$

si deduce che

$$\frac{dP}{dx}(x) \wedge \vec{R}(x) = mg\left(\frac{x}{a} - 2\right)\hat{e}_3, \quad x \in (0, a),$$

per cui l'equazione differenziale del momento si riduce a:

$$\frac{d\vec{M}}{dx}(x) + mg\left(\frac{x}{a} - 2\right)\hat{e}_3 = 0, \quad x \in (0, a),$$

e il problema di Cauchy (1), da risolvere in $x \in [0, a]$, diventa:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{M}}{dx}(x) + mg\left(\frac{x}{a} - 2\right)\hat{e}_3 = 0 \\ \vec{M}(a-0) = 0. \end{cases}$$

Una integrazione membro a membro fra un generico $x \in (0, a)$ e $x = a$ fornisce

$$\int_x^a \frac{d\vec{M}}{dx}(x) dx + mg \int_x^a \left(\frac{x}{a} - 2\right) dx \hat{e}_3 = 0$$

vale a dire

$$\vec{M}(a-0) - \vec{M}(x) + mg \left[\frac{x^2}{2a} - 2x \right]_x^a \hat{e}_3 = 0$$

e quindi, tenuto conto della condizione iniziale,

$$-\vec{M}(x) + mg \left[\frac{x^2}{2a} - 2x \right]_x^a \hat{e}_3 = 0$$

per cui

$$\begin{aligned} \vec{M}(x) &= mg \left[\frac{x^2}{2a} - 2x \right]_x^a \hat{e}_3 = mg \left(\frac{a}{2} - 2a - \frac{x^2}{2a} + 2x \right) \hat{e}_3 \\ &= mg \left(-\frac{3}{2}a + 2x - \frac{x^2}{2a} \right) \hat{e}_3, \quad x \in [0, a]. \end{aligned}$$

Momento torcente

Per definizione il momento torcente che agisce sulla trave in condizioni statiche è la componente di $\vec{M}(x)$ tangente alla generatrice. Appare evidente come in questo caso il momento torcente risulti identicamente nullo lungo l'intero corpo della trave:

$$\vec{M}_t(x) = \vec{M}(x) \cdot \hat{\tau}(x) \hat{\tau}(x) = mg \left(-\frac{3}{2}a + 2x - \frac{x^2}{2a} \right) \hat{e}_3 \cdot \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2}{\sqrt{2}} \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2}{\sqrt{2}} = 0 \quad \forall x \in [0, a].$$

Momento flettente

Il momento flettente è la componente di \vec{M} diretta ortogonalmente alla generatrice della trave, ed esprimibile come differenza fra il momento totale $\vec{M}(x)$ e il momento torcente $\vec{M}_t(x)$ appena calcolato. Nella fattispecie, si conclude che l'intero momento applicato lungo la trave è flettente:

$$\vec{M}_f(x) = \vec{M}(x) - \vec{M}_t(x) = \vec{M}(x) - 0 = mg \left(-\frac{3}{2}a + 2x - \frac{x^2}{2a} \right) \hat{e}_3, \quad x \in [0, a].$$

Soluzione dell'esercizio 3

(a) Componenti generalizzate delle sollecitazioni attive

Si nota preliminarmente che la distanza dell'asta AB dal centro C dell'anello coincide con la distanza $M - C$, e si calcola agevolmente applicando il teorema di Pitagora al triangolo CMA :

$$|M - C| = \sqrt{|C - A|^2 - |A - M|^2} = \sqrt{(5a)^2 - (4a)^2} = 3a.$$

Di conseguenza, la posizione assoluta del punto medio M dell'asta viene individuata dal vettore:

$$\begin{aligned} M - O &= C - O + M - C = a\xi \hat{e}_1 + 5a\hat{e}_2 + 3a(\sin \vartheta \hat{e}_1 - \cos \vartheta \hat{e}_2) = \\ &= a(\xi + 3 \sin \vartheta) \hat{e}_1 + a(5 - 3 \cos \vartheta) \hat{e}_2, \end{aligned}$$

mentre quella del centro C è semplicemente:

$$C - O = a\xi \hat{e}_1 + 5a\hat{e}_2.$$

Si hanno ora tutti gli elementi per poter procedere al calcolo delle componenti generalizzate di tutte le sollecitazioni attive agenti sul sistema.

(i) *Forza elastica*

L'interazione elastica associata alla molla ideale di costante k tesa fra M ed O viene descritta per mezzo del potenziale:

$$\begin{aligned} U_{el} &= -\frac{k}{2}|M - O|^2 = -\frac{k}{2}|a(\xi + 3 \sin \vartheta)\hat{e}_1 + a(5 - 3 \cos \vartheta)\hat{e}_2|^2 = \\ &= -\frac{ka^2}{2}[(\xi + 3 \sin \vartheta)^2 + (5 - 3 \cos \vartheta)^2] = \\ &= -\frac{ka^2}{2}(\xi^2 + 9 \sin^2 \vartheta + 6\xi \sin \vartheta + 25 + 9 \cos^2 \vartheta - 30 \cos \vartheta) = \\ &= -\frac{ka^2}{2}(\xi^2 + 6\xi \sin \vartheta - 30 \cos \vartheta) + \text{costante} \end{aligned}$$

cui corrispondono le componenti generalizzate della sollecitazione:

$$\begin{aligned} Q_{\xi}^{el} &= \frac{\partial U_{el}}{\partial \xi} = -\frac{ka^2}{2}(2\xi + 6 \sin \vartheta) = -ka^2(\xi + 3 \sin \vartheta) \\ Q_{\vartheta}^{el} &= \frac{\partial U_{el}}{\partial \vartheta} = -\frac{ka^2}{2}(6\xi \cos \vartheta + 30 \sin \vartheta) = -ka^2(3\xi \cos \vartheta + 15 \sin \vartheta). \end{aligned}$$

(ii) *Sistema di forze \mathbb{S} applicato all'asta*

Il sistema \mathbb{S} è caratterizzato da un risultante \vec{R} e da un momento risultante \vec{M}_C in C :

$$\vec{R} = -ka\hat{e}_2 \quad \vec{M}_C = -3ka^2 \sin \vartheta \hat{e}_3.$$

Basta osservare che:

- il moto dell'asta rigida è piano ed avviene nel piano coordinato Oxy ;
- il punto C appartiene allo spazio solidale all'asta, dal momento che le sue distanze dai vertici A e B si mantengono costanti e C rimane comunque ubicato nel piano fisso Oxy ;
- l'angolo ϑ è compreso fra la retta antiparallela all'asse Oy e condotta per il punto C (che costituisce una direzione fissa rispetto alla terna assoluta), e il vettore $M - C$ (solidale all'asta).

Ricorrono perciò le condizioni per poter calcolare le componenti generalizzate del sistema \mathbb{S} per mezzo delle formule:

$$Q_{\xi}^{\mathbb{S}} = \frac{\partial C}{\partial \xi} \cdot \vec{R} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_C = a\hat{e}_1 \cdot \vec{R} + 0 \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_C = a\hat{e}_1 \cdot (-ka\hat{e}_2) = 0$$

e

$$Q_{\vartheta}^{\mathbb{S}} = \frac{\partial C}{\partial \vartheta} \cdot \vec{R} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta} \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_C = 0 \cdot \vec{R} + \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_C = \hat{e}_3 \cdot (-3ka^2 \sin \vartheta \hat{e}_3) = -3ka^2 \sin \vartheta.$$

La sollecitazione (Q_ξ^S, Q_ϑ^S) ammette potenziale in virtù della condizione di “irrotazionalità”:

$$\frac{\partial Q_\xi^S}{\partial \vartheta} - \frac{\partial Q_\vartheta^S}{\partial \xi} = \frac{\partial 0}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial \xi}(-3ka^2 \sin \vartheta) = 0$$

valida $\forall (\xi, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$, un ovvio insieme convesso. Si ha in effetti il potenziale:

$$U_S(\xi, \vartheta) = 3ka^2 \cos \vartheta.$$

(iii) *Resistenze viscosse*

Le forze di resistenza viscosa sono date dalle espressioni

$$\vec{F}_C = -\beta \dot{C} \quad \vec{F}_M = -\beta \dot{M}$$

e rispettivamente applicate nei punti C ed M individuati dai vettori posizione

$$C - O = a\xi \hat{e}_1 + 5a \hat{e}_2 \quad M - O = a(\xi + 3 \sin \vartheta) \hat{e}_1 + a(5 - 3 \cos \vartheta) \hat{e}_2,$$

cui corrispondono le velocità assolute:

$$\dot{C} = a\dot{\xi} \hat{e}_1 \quad \dot{M} = a(\dot{\xi} + 3 \cos \vartheta \dot{\vartheta}) \hat{e}_1 + 3a \sin \vartheta \dot{\vartheta} \hat{e}_2$$

e le derivate parziali prime:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \xi} &= a \hat{e}_1 & \frac{\partial M}{\partial \xi} &= a \hat{e}_1 \\ \frac{\partial C}{\partial \vartheta} &= 0 & \frac{\partial M}{\partial \vartheta} &= 3a \cos \vartheta \hat{e}_1 + 3a \sin \vartheta \hat{e}_2. \end{aligned}$$

Le relazioni che definiscono le componenti generalizzate del sistema di resistenze viscosse sono dunque

$$\begin{aligned} Q_\xi^{rv} &= \vec{F}_C \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi} + \vec{F}_M \cdot \frac{\partial M}{\partial \xi} = -\beta \dot{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi} - \beta \dot{M} \cdot \frac{\partial M}{\partial \xi} \\ Q_\vartheta^{rv} &= \vec{F}_C \cdot \frac{\partial C}{\partial \vartheta} + \vec{F}_M \cdot \frac{\partial M}{\partial \vartheta} = -\beta \dot{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \vartheta} - \beta \dot{M} \cdot \frac{\partial M}{\partial \vartheta} \end{aligned}$$

e sostituendo le espressioni precedenti per le velocità assolute e per le derivate parziali prime dei vettori posizione diventano

$$\begin{aligned} Q_\xi^{rv} &= -\beta a \dot{\xi} \hat{e}_1 \cdot a \hat{e}_1 - \beta a [(\dot{\xi} + 3 \cos \vartheta \dot{\vartheta}) \hat{e}_1 + 3 \sin \vartheta \dot{\vartheta} \hat{e}_2] \cdot a \hat{e}_1 = \\ &= -\beta a^2 \dot{\xi} - \beta a^2 (\dot{\xi} + 3 \cos \vartheta \dot{\vartheta}) = -\beta a^2 (2\dot{\xi} + 3 \cos \vartheta \dot{\vartheta}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q_\vartheta^{rv} &= -\beta a \dot{\xi} \hat{e}_1 \cdot 0 - \beta a [(\dot{\xi} + 3 \cos \vartheta \dot{\vartheta}) \hat{e}_1 + 3 \sin \vartheta \dot{\vartheta} \hat{e}_2] \cdot 3a (\cos \vartheta \hat{e}_1 + \sin \vartheta \hat{e}_2) = \\ &= -3\beta a^2 [(\dot{\xi} + 3 \cos \vartheta \dot{\vartheta}) \cos \vartheta + 3 \sin^2 \vartheta \dot{\vartheta}] = \\ &= -3\beta a^2 (\dot{\xi} \cos \vartheta + 3\dot{\vartheta}) = -\beta a^2 (3 \cos \vartheta \dot{\xi} + 9\dot{\vartheta}). \end{aligned}$$

La sollecitazione $(Q_{\xi}^{rv}, Q_{\vartheta}^{rv})$ è di natura completamente dissipativa. Lo si evince dall'espressione della potenza:

$$\begin{aligned}\pi &= Q_{\xi}^{rv} \dot{\xi} + Q_{\vartheta}^{rv} \dot{\vartheta} = -\beta a^2 (2\dot{\xi} + 3 \cos \vartheta \dot{\vartheta}) \dot{\xi} - \beta a^2 (3 \cos \vartheta \dot{\xi} + 9\dot{\vartheta}) \dot{\vartheta} = \\ &= -\beta a^2 (2\dot{\xi}^2 + 3 \cos \vartheta \dot{\xi} \dot{\vartheta} + 3 \cos \vartheta \dot{\xi} \dot{\vartheta} + 9\dot{\vartheta}^2) = -\beta a^2 (2\dot{\xi}^2 + 6 \cos \vartheta \dot{\xi} \dot{\vartheta} + 9\dot{\vartheta}^2)\end{aligned}$$

dove la forma quadratica in $(\dot{\xi}, \dot{\vartheta})$ entro parentesi è definita positiva, potendosi scrivere come

$$2\dot{\xi}^2 + 6 \cos \vartheta \dot{\xi} \dot{\vartheta} + 9\dot{\vartheta}^2 = (\dot{\xi} \ \dot{\vartheta}) \begin{pmatrix} 2 & 3 \cos \vartheta \\ 3 \cos \vartheta & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

con la matrice rappresentativa di determinante e traccia positivi:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \cos \vartheta \\ 3 \cos \vartheta & 9 \end{pmatrix} = 18 - 9 \cos^2 \vartheta > 0 \quad \text{tr} \begin{pmatrix} 2 & 3 \cos \vartheta \\ 3 \cos \vartheta & 9 \end{pmatrix} = 11 > 0.$$

La potenza della sollecitazione risulta quindi sempre non positiva:

$$\pi \leq 0 \quad \forall (\xi, \vartheta, \dot{\xi}, \dot{\vartheta}) \in \mathbb{R}^4$$

e nulla unicamente per velocità generalizzate nulle:

$$\pi = 0 \quad \iff \quad (\dot{\xi}, \dot{\vartheta}) = (0, 0).$$

(b) Equilibri

Il sistema è scleronomo a vincoli bilaterali ideali, e risulta soggetto a sollecitazioni che in parte hanno natura posizionale conservativa (la forza elastica e il sistema \mathbb{S}), in parte completamente dissipativa (le resistenze viscosse). Gli equilibri del sistema sono pertanto tutti ordinari e vanno identificati con i punti critici del potenziale del sistema, le sollecitazioni dissipative risultando totalmente ininfluenti.

Potenziale del sistema

Il potenziale del sistema si scrive come somma dei potenziali parziali U_{el} e $U_{\mathbb{S}}$:

$$\begin{aligned}U(\xi, \vartheta) &= U_{\text{el}} + U_{\mathbb{S}} = ka^2 \left(-\frac{\xi^2}{2} - 3\xi \sin \vartheta + 15 \cos \vartheta \right) + 3ka^2 \cos \vartheta = \\ &= ka^2 \left(-\frac{\xi^2}{2} - 3\xi \sin \vartheta + 18 \cos \vartheta \right), \quad (\xi, \vartheta) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Equilibri

Gli equilibri si ottengono imponendo l'annullarsi delle due derivate parziali prime del potenziale U :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = ka^2 (-\xi - 3 \sin \vartheta) \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = ka^2 (-3\xi \cos \vartheta - 18 \sin \vartheta),$$

ossia risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} ka^2(-\xi - 3 \sin \vartheta) = 0 \\ ka^2(-3\xi \cos \vartheta - 18 \sin \vartheta) = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} \xi = -3 \sin \vartheta \\ \xi \cos \vartheta + 6 \sin \vartheta = 0. \end{cases}$$

Convienne sostituire la prima equazione nella seconda per ottenere l'equazione di equilibrio per la sola variabile angolare

$$-3 \sin \vartheta \cos \vartheta + 6 \sin \vartheta = 0$$

che, raccolti i fattori comuni, diventa

$$3 \sin \vartheta (-\cos \vartheta + 2) = 0$$

ed ammette le sole radici $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ in quanto l'espressione entro parentesi risulta sempre di segno positivo. Gli equilibri del sistema sono quindi individuati da

$$(\xi, \vartheta) = (0, 0) \quad (\xi, \vartheta) = (0, \pi).$$

(c) Stabilità degli equilibri

Si sono individuate due sole configurazioni di equilibrio, necessariamente isolate. Le sollecitazioni applicate al sistema sono inoltre in parte posizionali conservative, descritte dal potenziale U , e per la parte residua completamente dissipative (le resistenze viscosi). L'analisi di stabilità può dunque essere condotta in modo completo ricorrendo alla forma forte del teorema di Lagrange-Dirichlet, basata sui criteri di Barbasin-Krasovskii. A questo scopo occorre e basta stabilire quali equilibri del sistema costituiscano massimi relativi propri del potenziale, e quali no. Le derivate parziali seconde del potenziale assumono la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(\xi, \vartheta) &= -ka^2 & \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial \xi}(\xi, \vartheta) &= -3ka^2 \cos \vartheta \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta}(\xi, \vartheta) &= -3ka^2 \cos \vartheta & \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}(\xi, \vartheta) &= ka^2(3\xi \sin \vartheta - 18 \cos \vartheta) \end{aligned}$$

e definiscono la matrice hessiana:

$$H_U(\xi, \vartheta) = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -3 \cos \vartheta \\ -3 \cos \vartheta & 3\xi \sin \vartheta - 18 \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

che va calcolata in ciascuna configurazione di equilibrio del sistema.

Configurazione $(\xi, \vartheta) = (0, 0)$

In questo caso la matrice hessiana del potenziale si riduce a

$$H_U(0, 0) = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -18 \end{pmatrix}$$

e risulta definita negativa, avendo determinante positivo e traccia negativa:

$$\det \left[ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -18 \end{pmatrix} \right] = 9k^2a^4 > 0 \quad \text{tr} \left[ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -18 \end{pmatrix} \right] = -19ka^2 < 0.$$

L'equilibrio è quindi un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità asintotica viene assicurata dalla forma forte del teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(\xi, \vartheta) = (0, \pi)$

Per questa configurazione la matrice hessiana del potenziale diventa

$$H_U(0, \pi) = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}$$

e ha determinante negativo:

$$\det H_U(0, \pi) = \det \left[ka^2 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 18 \end{pmatrix} \right] = -27k^2a^4 < 0.$$

Gli autovalori (reali) della matrice sono quindi di segno opposto e l'equilibrio viene riconosciuto essere un punto di sella per il grafico del potenziale. L'assenza del massimo locale del potenziale nella posizione di equilibrio ne comporta l'instabilità per la forma forte del teorema di Lagrange-Dirichlet.

Soluzione dell'esercizio 4

(a) Equazioni delle piccole oscillazioni

Il sistema scleronomo, posizionale e conservativo, è descritto dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{ma^2}{2} \left(3\dot{\xi}^2 + \frac{43}{3}\dot{\vartheta}^2 + 6 \cos \vartheta \dot{\xi} \dot{\vartheta} \right) + ka^2 \left(-\frac{\xi^2}{2} - 3\xi \sin \vartheta + 18 \cos \vartheta \right),$$

nella quale il polinomio quadratico delle velocità generalizzate $(\dot{\xi}, \dot{\vartheta})$ deve corrispondere all'energia cinetica:

$$T = \frac{ma^2}{2} \left(3\dot{\xi}^2 + \frac{43}{3}\dot{\vartheta}^2 + 6 \cos \vartheta \dot{\xi} \dot{\vartheta} \right)$$

mentre il termine residuo va identificato con il potenziale del sistema:

$$U(\xi, \vartheta) = ka^2 \left(-\frac{\xi^2}{2} - 3\xi \sin \vartheta + 18 \cos \vartheta \right).$$

L'analisi delle piccole oscillazioni richiede il calcolo della matrice rappresentativa $A(\xi, \vartheta)$ dell'energia cinetica, che si deduce dall'identità:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\xi} \ \dot{\vartheta}) ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 3 \cos \vartheta \\ 3 \cos \vartheta & 43/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\dot{\xi} \ \dot{\vartheta}) A(\xi, \vartheta) \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

e risulta quindi

$$A(\xi, \vartheta) = ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 3 \cos \vartheta \\ 3 \cos \vartheta & 43/3 \end{pmatrix}.$$

Le derivate parziali seconde del potenziale valgono invece:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(\xi, \vartheta) &= -ka^2 & \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial \xi}(\xi, \vartheta) &= -3ka^2 \cos \vartheta \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta}(\xi, \vartheta) &= -3ka^2 \cos \vartheta & \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}(\xi, \vartheta) &= ka^2(3\xi \sin \vartheta - 18 \cos \vartheta) \end{aligned}$$

e porgono la matrice hessiana

$$H_U(\xi, \vartheta) = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -3 \cos \vartheta \\ -3 \cos \vartheta & 3\xi \sin \vartheta - 18 \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Nella posizione di equilibrio $(\xi, \vartheta) = (0, 0)$ le due matrici si riducono a:

$$A(0, 0) = ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 43/3 \end{pmatrix} \quad H_U(0, 0) = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -18 \end{pmatrix}$$

e le equazioni delle piccole oscillazioni intorno a $(\xi, \vartheta) = (0, 0)$ diventano:

$$ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 43/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \ddot{\xi} \\ \delta \ddot{\vartheta} \end{pmatrix} - ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \xi \\ \delta \vartheta \end{pmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{cases} ma^2(3 \delta \ddot{\xi} + 3 \delta \ddot{\vartheta}) + ka^2(\delta \xi + 3 \delta \vartheta) = 0 \\ ma^2\left(3 \delta \ddot{\xi} + \frac{43}{3} \delta \ddot{\vartheta}\right) + ka^2(3 \delta \xi + 18 \delta \vartheta) = 0, \end{cases}$$

dove $\delta \xi$ e $\delta \vartheta$ indicano piccoli scostamenti dei parametri lagrangiani dai rispettivi valori di equilibrio, $\xi = 0$ e $\vartheta = 0$.

(b) Frequenze normali delle piccole oscillazioni

Le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni sono le soluzioni $\omega > 0$ dell'equazione caratteristica

$$\det[\omega^2 A(0, 0) + H_U(0, 0)] = 0$$

che scritta esplicitamente assume la forma

$$\det\left[m\omega^2 a^2 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 43/3 \end{pmatrix} + ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -18 \end{pmatrix}\right] = 0$$

e raccolto membro a membro un fattore $k^2 a^4$ diventa

$$\det \left[\frac{m\omega^2}{k} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 43/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -18 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Conviene porre $\mu = m\omega^2/k$ per ottenere l'equazione equivalente

$$\det \begin{pmatrix} 3\mu - 1 & 3\mu - 3 \\ 3\mu - 3 & \frac{43}{3}\mu - 18 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$(3\mu - 1) \left(\frac{43}{3}\mu - 18 \right) - (3\mu - 3)^2 = 0$$

ed infine, semplificando,

$$34\mu^2 - \frac{151}{3}\mu + 9 = 0.$$

Ridotta a forma intera l'equazione algebrica si esprime come

$$102\mu^2 - 151\mu + 27 = 0$$

ed ammette le radici:

$$\mu_{\pm} = \frac{151 \pm \sqrt{151^2 - 4 \cdot 102 \cdot 27}}{2 \cdot 102} = \frac{151 \pm \sqrt{11785}}{204}$$

cui corrispondono le pulsazioni normali:

$$\omega_- = \sqrt{\mu_-} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_+ = \sqrt{\mu_+} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Le frequenze normali delle piccole oscillazioni sono pertanto:

$$f_- = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{151 - \sqrt{11785}}{204}} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad f_+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{151 + \sqrt{11785}}{204}} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

con $f_- < f_+$.

(c) Modi normali di oscillazione

Le ampiezze dei modi normali di oscillazione si ottengono come soluzioni $(a_{\pm}, b_{\pm}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 3\mu_{\pm} - 1 & 3\mu_{\pm} - 3 \\ 3\mu_{\pm} - 3 & \frac{43}{3}\mu_{\pm} - 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\pm} \\ b_{\pm} \end{pmatrix} = 0$$

che equivale all'unica equazione linearmente indipendente:

$$(3\mu_{\pm} - 1)a_{\pm} + (3\mu_{\pm} - 3)b_{\pm} = 0$$

ed implica per il rapporto delle ampiezze di oscillazione in ξ e in ϑ il valore costante

$$\frac{a_{\pm}}{b_{\pm}} = -\frac{3\mu_{\pm} - 3}{3\mu_{\pm} - 1}.$$

Essendo:

$$\begin{aligned} 3\mu_{\pm} - 3 &= \frac{151 \pm \sqrt{11785}}{68} - 3 = \frac{151 \pm \sqrt{11785} - 204}{68} = \frac{-53 \pm \sqrt{11785}}{68} \\ 3\mu_{\pm} - 1 &= \frac{151 \pm \sqrt{11785}}{68} - 1 = \frac{151 \pm \sqrt{11785} - 68}{68} = \frac{83 \pm \sqrt{11785}}{68}, \end{aligned}$$

il rapporto delle ampiezze risulta dunque:

$$\frac{a_{\pm}}{b_{\pm}} = -\frac{-53 \pm \sqrt{11785}}{83 \pm \sqrt{11785}} = \frac{53 \mp \sqrt{11785}}{83 \pm \sqrt{11785}}.$$

Poichè infine $\mu_- < \mu_+$, le ampiezze (a_-, b_-) sono associate al modo “basso”, mentre (a_+, b_+) sono le ampiezze del modo di frequenza più alta.

Modo “basso”

In questo caso il rapporto delle ampiezze di oscillazione vale

$$a_-/b_- = (53 + \sqrt{11785})/(83 - \sqrt{11785})$$

per cui si può assumere:

$$a_- = 53 + \sqrt{11785} \quad b_- = 83 - \sqrt{11785}$$

e il modo normale di oscillazione sarà espresso da

$$\begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\vartheta \end{pmatrix} = A_- \begin{pmatrix} 53 + \sqrt{11785} \\ 83 - \sqrt{11785} \end{pmatrix} \cos \left[\sqrt{\frac{151 - \sqrt{11785}}{204}} \sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_- \right] \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

con $A_- \neq 0$ e φ_- costanti reali arbitrarie.

Modo “alto”

Nella fattispecie il rapporto delle ampiezze di oscillazione risulta

$$a_+/b_+ = (53 - \sqrt{11785})/(83 + \sqrt{11785})$$

e consente di porre

$$a_+ = 53 - \sqrt{11785} \quad b_+ = 83 + \sqrt{11785}.$$

Ne deriva che il modo normale di oscillazione deve assumere la forma:

$$\begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\vartheta \end{pmatrix} = A_+ \begin{pmatrix} 53 - \sqrt{11785} \\ 83 + \sqrt{11785} \end{pmatrix} \cos \left[\sqrt{\frac{151 + \sqrt{11785}}{204}} \sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_+ \right] \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

con $A_+ \neq 0$ e φ_+ costanti reali arbitrarie.