

Esercizio 1

Un sistema rigido con asse fisso Ox , privo di attrito, in una sua configurazione \mathbb{S} è sottoposto alle sollecitazioni seguenti:

- $\vec{F}_1 = \hat{e}_1 - 2\hat{e}_3$ applicata nel punto $P_1(-1, -2, 0)$;
- $\vec{F}_2 = -\hat{e}_1 + \alpha\hat{e}_2$ applicata nel punto $P_2(1, 0, -1)$,

dove α è una costante reale. Determinare, nell'ipotesi di vincoli ideali:

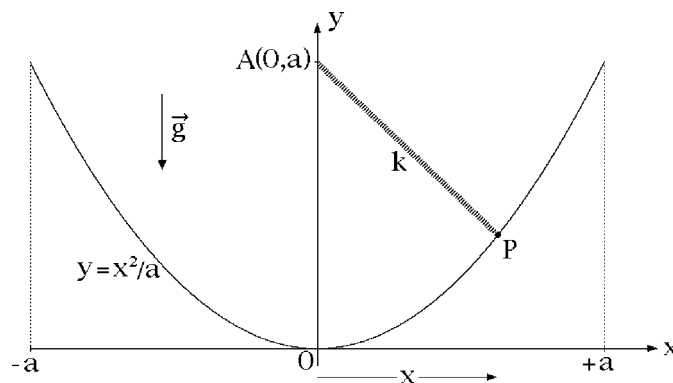
- (a) il valore di α in modo che \mathbb{S} sia un equilibrio;
- (b) risultante e momento risultante in O delle reazioni vincolari esterne, all'equilibrio.

Esercizio 2

Un punto materiale pesante P , di massa m , è vincolato a restare sull'arco di parabola grafico della funzione

$$y(x) = \frac{x^2}{a}, \quad x \in [-a, a]$$

con $a > 0$. Una molla ideale di costante elastica $k = 4mg/a$ congiunge P con il punto fisso $A(0, a)$.

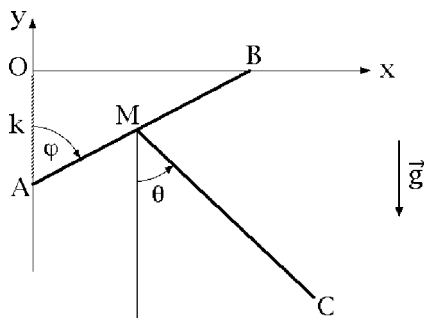


Usando come parametro l'ascissa $x \in [-a, a]$ del punto P , determinare:

- (a) le configurazioni di equilibrio;
- (b) l'espressione delle velocità virtuali del sistema nelle configurazioni individuate da $x = -a$ e $x = -a/4$;
- (c) le reazioni vincolari esplicabili dal sistema nelle configurazioni corrispondenti a $x = a/4$ e $x = a$;
- (d) le reazioni vincolari applicate al punto P in tutti gli stati di quiete del sistema.

Esercizio 3

In un piano verticale, un'asta omogenea AB , di massa m e lunghezza L , ha gli estremi A e B vincolati a scorrere rispettivamente lungo gli assi verticale e orizzontale di un riferimento cartesiano $Oxyz$. Una seconda asta MC , identica alla prima, ha l'estremo M incernierato nel punto medio dell'asta AB . Il sistema è soggetto, oltre che alla forza peso, ad una forza elastica $-k(A - O)$ agente sull'estremo A .



I parametri lagrangiani sono gli angoli φ e θ illustrati in figura: opportuni vincoli unilaterali fanno sì che si abbia $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $\theta \in [-\pi/3, \pi/3]$. Assunti i vincoli ideali, determinare:

- gli equilibri ordinari;
- se $(\varphi, \theta) = (\pi/2, -\pi/3)$ costituisce un equilibrio;
- le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- l'espressione dell'energia cinetica;
- le equazioni del moto;
- l'equazione delle piccole oscillazioni nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile a scelta.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Valore di α per l'equilibrio

La configurazione \mathbb{S} è di equilibrio per il sistema se e soltanto se il momento delle forze attive applicate rispetto all'asse fisso Ox , privo di attrito per ipotesi, risulta nullo. Tale momento risultante si scrive:

$$\begin{aligned} & [(P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2] \cdot \hat{e}_1 = \\ & = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \cdot \hat{e}_1 + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & \alpha & 0 \end{vmatrix} \cdot \hat{e}_1 = 4 + \alpha \end{aligned}$$

e la condizione di equilibrio equivale perciò a richiedere che sia:

$$\alpha = -4.$$

(b) Risultante e momento risultante delle reazioni vincolari

All'equilibrio, risultante e momento risultante in O delle reazioni vincolari esterne coincidono con i rispettivi risultante e momento risultante in O , cambiati di segno, delle forze attive applicate:

$$\vec{R}^{\phi,e} = -\vec{R}^{a,e} \quad \vec{M}_O^{\phi,e} = -\vec{M}_O^{a,e}$$

come si deduce immediatamente dalle equazioni cardinali della statica. Nella fattispecie, si ha:

$$\vec{R}^{a,e} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \hat{e}_1 - 2\hat{e}_3 - \hat{e}_1 - 4\hat{e}_2 = -4\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3$$

e:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^{a,e} &= (P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 4\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 - 4\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - 4\hat{e}_3 = -\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3 \end{aligned}$$

in modo che i risultanti richiesti sono:

$$\vec{R}^{\phi,e} = 4\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 \quad \vec{M}_O^{\phi,e} = \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3.$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Configurazioni di equilibrio

Il punto materiale è vincolato a rimanere su una curva fissa e liscia e tutte le sollecitazioni attive ad esso applicate hanno natura posizionale e conservativa, con potenziali noti. Precisamente, si hanno un potenziale gravitazionale:

$$\mathcal{U}_g(x, y) = -mgy$$

ed un potenziale elastico:

$$\mathcal{U}_{el}(x, y) = -\frac{1}{2} \frac{4mg}{a} |P - A|^2 = -\frac{2mg}{a} |x\hat{e}_1 + (y - a)\hat{e}_2|^2 = -\frac{2mg}{a} [x^2 + (y - a)^2].$$

Il moto del sistema è quindi descritto dal potenziale ottenuto sostituendo alle coordinate cartesiane (x, y) la parametrizzazione della curva vincolare:

$$x \in [-a, a] \longrightarrow (x, y) = \left(x, \frac{x^2}{a}\right)$$

che risulta perciò:

$$\begin{aligned} U(x) &= -mg \frac{x^2}{a} - \frac{2mg}{a} \left[x^2 + \left(\frac{x^2}{a} - a \right)^2 \right] = \\ &= -\frac{mg}{a} x^2 - \frac{2mg}{a} \left[x^2 + \frac{x^4}{a^2} + a^2 - 2x^2 \right] = \\ &= -\frac{mg}{a} \left(\frac{2x^4}{a^2} - x^2 + 2a^2 \right), \quad x \in [-a, a]. \end{aligned}$$

Gli equilibri ordinari sono i punti critici del potenziale, zeri in $(-a, a)$ della derivata prima:

$$U'(x) = -\frac{mg}{a} \left(\frac{8x^3}{a^2} - 2x \right) = -\frac{2mg}{a} x \left(\frac{4x^2}{a^2} - 1 \right)$$

e dunque soluzioni dell'equazione algebrica:

$$x \left(\frac{4x^2}{a^2} - 1 \right) = 0, \quad x \in (-a, a).$$

Si hanno le radici, tutte accettabili,

$$x = 0 \quad x = -\frac{a}{2} \quad x = \frac{a}{2}$$

che costituiscono gli equilibri ordinari cercati.

Per riconoscere gli eventuali equilibri di confine si ricorre al teorema dei lavori virtuali. Il lavoro virtuale delle forze attive, corrispondente ad uno spostamento virtuale δx , si scrive:

$$U'(x) \delta x = -\frac{2mg}{a} x \left(\frac{4x^2}{a^2} - 1 \right) \delta x$$

e deve essere calcolato in ciascuna delle due configurazioni di confine $x = -a$ e $x = a$.

Configurazione $x = -a$

Poiché $x = -a$ è l'estremo inferiore dell'intervallo di definizione della coordinata lagrangiana x , il teorema dei lavori virtuali assume in questa configurazione la forma:

$$U'(-a) \delta x \leq 0 \quad \forall \delta x \geq 0$$

in modo che la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio in $x = -a$ diventa:

$$U'(-a) \leq 0.$$

Poiché

$$U'(-a) = 2mg \left(\frac{4a^2}{a^2} - 1 \right) = 6mg > 0$$

la condizione non è verificata e la posizione **non costituisce** un equilibrio.

Configurazione $x = a$

Nella fattispecie $x = a$ rappresenta l'estremo superiore dell'intervallo di definizione della parametrizzazione del sistema ed il teorema dei lavori virtuali prescrive che debba aversi:

$$U'(a) \delta x \leq 0 \quad \forall \delta x \leq 0$$

per cui la condizione caratteristica dell'equilibrio si riduce alla disequazione:

$$U'(a) \geq 0.$$

Si riconosce pertanto che l'equilibrio **non ricorre**:

$$U'(a) = -2mg \left(\frac{4a^2}{a^2} - 1 \right) = -6mg < 0.$$

Si conclude, in definitiva, che il sistema non ammette alcun equilibrio di confine. Alla caratterizzazione degli equilibri ordinari e di confine del sistema si può pervenire anche senza fare ricorso al formalismo lagrangiano, utilizzando direttamente il teorema di caratterizzazione degli equilibri per un punto materiale vincolato a rimanere su una curva fissa e liscia.

Metodo alternativo per il calcolo degli equilibri

Il risultante delle forze attive agenti sul punto P in una generica posizione lungo la curva di parametrizzazione:

$$P(x) - O = x \hat{e}_1 + \frac{x^2}{a} \hat{e}_2, \quad x \in [-a, a],$$

è dato dalla relazione:

$$\begin{aligned} \vec{F}(x) &= m\vec{g} + k(A - P) = -mg \hat{e}_2 + \frac{4mg}{a} \left[-x \hat{e}_1 + \left(a - \frac{x^2}{a} \right) \hat{e}_2 \right] = \\ &= -\frac{4mg}{a} x \hat{e}_1 + \left[-mg + \frac{4mg}{a} \left(a - \frac{x^2}{a} \right) \right] \hat{e}_2 = -\frac{4mg}{a} x \hat{e}_1 + mg \left(3 - \frac{4x^2}{a^2} \right) \hat{e}_2. \end{aligned}$$

In una configurazione ordinaria, individuata da $x \in (-a, a)$, si ha equilibrio se e soltanto se il risultante delle forze attive si mantiene costantemente ortogonale alla curva. Poiché un vettore tangente alla curva — regolare — nella posizione P si identifica con la derivata prima della parametrizzazione:

$$\frac{dP}{dx}(x) = \hat{e}_1 + \frac{2x}{a} \hat{e}_2,$$

la condizione per l'equilibrio ordinario in $x \in (-a, a)$ diventa:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{F}(x) \cdot \frac{dP}{dx}(x) = -\frac{4mg}{a}x + \frac{2x}{a} mg \left(3 - \frac{4x^2}{a^2}\right) = \\ &= \frac{2mg}{a} \left(-2 + 3 - \frac{4x^2}{a^2}\right) x = \frac{2mg}{a} x \left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right) \end{aligned}$$

che porge le stesse soluzioni già ricavate in precedenza:

$$x = -a/2, \quad 0, \quad a/2.$$

Nella configurazione di confine $x = -a$ il teorema dei lavori virtuali conduce alla condizione di equilibrio:

$$\vec{F}(-a) \cdot \frac{dP}{dx}(-a) \leq 0$$

ossia:

$$\frac{2mg}{a}(-a) \left(1 - \frac{4a^2}{a^2}\right) \leq 0$$

che tuttavia non è soddisfatta, riducendosi a:

$$6mg \leq 0.$$

Analogamente, si ha equilibrio nella configurazione di confine $x = a$ se e soltanto se:

$$\vec{F}(a) \cdot \frac{dP}{dx}(a) \geq 0$$

ovvero per:

$$\frac{2mg}{a} a \left(1 - \frac{4a^2}{a^2}\right) \geq 0,$$

condizione anche questa che non appare verificata:

$$-6mg \geq 0.$$

Il risultato conferma quanto già affermato circa l'assenza di equilibri di confine.

(b) Velocità virtuali

Le velocità virtuali del sistema nella configurazione ordinaria individuata da $x = -a/4$ sono tutti e soli i vettori tangenti alla curva vincolare in tale posizione:

$$\vec{v}_{-a/4} = \alpha \frac{dP}{dx}(-a/4) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

ossia, sostituendo la forma esplicita della parametrizzazione:

$$\vec{v}_{-a/4} = \alpha \left[\hat{e}_1 + \frac{2}{a} \left(-\frac{a}{4}\right) \hat{e}_2 \right] = \alpha \left(\hat{e}_1 - \frac{1}{2} \hat{e}_2 \right) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nella configurazione di confine $x = -a$ le velocità virtuali si identificano ancora con i vettori tangenti alla curva, purché diretti verso il supporto della curva stessa. Poiché tale è il vettore

$$\frac{dP}{dx}(-a) = \hat{e}_1 + \frac{2}{a}(-a)\hat{e}_2 = \hat{e}_1 - 2\hat{e}_2,$$

le velocità virtuali relative alla configurazione $x = -a$ saranno tutti e soltanto i vettori della forma:

$$\vec{v}_{-a} = \alpha(\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2) \quad \forall \alpha \geq 0.$$

(c) Reazioni vincolari esplicabili

Nella configurazione ordinaria $x = a/4$ le reazioni vincolari esplicabili nell'ipotesi di curva liscia sono tutti e soli i vettori $\vec{\Phi}_{a/4}$ ortogonali alla curva vincolare in tale posizione, individuati dalla condizione:

$$\vec{\Phi}_{a/4} \cdot \frac{dP}{dx}(a/4) = 0$$

equivalente a:

$$\vec{\Phi}_{a/4} \cdot \left(\hat{e}_1 + \frac{1}{2}\hat{e}_2\right) = 0.$$

Più esplicitamente si può scrivere

$$\vec{\Phi}_{a/4} = \alpha \hat{e}_3 \wedge \left(\hat{e}_1 + \frac{1}{2}\hat{e}_2\right) + \beta \hat{e}_3 = \alpha \left(-\frac{1}{2}\hat{e}_1 + \hat{e}_2\right) + \beta \hat{e}_3 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Per la configurazione di confine $x = a$ sono ammesse tutte le reazioni vincolari con arbitraria componente ortogonale alla curva:

$$\begin{aligned} \alpha \hat{e}_3 \wedge \frac{dP}{dx}(a) + \beta \hat{e}_3 &= \alpha \hat{e}_3 \wedge (\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) + \beta \hat{e}_3 = \\ &= \alpha(-2\hat{e}_1 + \hat{e}_2) + \beta \hat{e}_3 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e componente tangenziale diretta secondo il supporto della curva vincolare:

$$\gamma \frac{dP}{dx}(a) = \gamma(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) \quad \forall \gamma \leq 0$$

— si osservi che il vettore $dP/dx(a)$ **non è diretto** secondo il supporto della curva, ma in senso opposto. In definitiva, le reazioni vincolari esplicabili in $x = a$ sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_a &= \alpha(-2\hat{e}_1 + \hat{e}_2) + \beta \hat{e}_3 + \gamma(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) = \\ &= (-2\alpha + \gamma)\hat{e}_1 + (\alpha + 2\gamma)\hat{e}_2 + \beta \hat{e}_3 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \gamma \leq 0. \end{aligned}$$

(d) Reazioni vincolari negli stati di quiete

Gli stati di quiete che siano moti naturali del sistema ricorrono, per definizione di equilibrio, esclusivamente in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio. Gli stati di quiete del sistema sono quindi:

$$\begin{aligned} x(t) &= -a/2 & \forall t \in \mathbb{R} \\ x(t) &= 0 & \forall t \in \mathbb{R} \\ x(t) &= a/2 & \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Per ognuno di essi il postulato delle reazioni vincolari prevede che la reazione vincolare bilanci il risultante delle forze attive applicate, cosicché risulta:

$$\vec{\Phi}_{-a/2} = -\vec{F}(-a/2) = \frac{4mg}{a} \left(-\frac{a}{2}\right) \hat{e}_1 - mg \left(3 - \frac{4}{a^2} \frac{a^2}{4}\right) \hat{e}_2 = -2mg \hat{e}_1 - 2mg \hat{e}_2$$

$$\vec{\Phi}_0 = -\vec{F}(0) = \frac{4mg}{a} 0 \hat{e}_1 - mg(3 - 0) \hat{e}_2 = -3mg \hat{e}_2$$

$$\vec{\Phi}_{a/2} = -\vec{F}(a/2) = \frac{4mg}{a} \frac{a}{2} \hat{e}_1 - mg \left(3 - \frac{4}{a^2} \frac{a^2}{4}\right) \hat{e}_2 = 2mg \hat{e}_1 - 2mg \hat{e}_2,$$

rispettivamente nei tre casi. Si osservi che le reazioni vincolari calcolate risultano costanti nel tempo, essendo fissa la curva vincolare e costanti le forze attive agenti sul punto P .

Soluzione dell'esercizio 3

(a) Equilibri ordinari

Tutte le sollecitazioni applicate al sistema hanno natura posizionale e conservativa e sono quindi descritte da un potenziale U , che risulterà dalla somma di un potenziale elastico relativo all'interazione fra i punti O ed A , del potenziale gravitazionale dell'asta AB e del potenziale gravitazionale dell'asta MC . Per il calcolo del potenziale occorre esprimere le coordinate del punto A e dei baricentri M e G delle due aste in funzione dei parametri lagrangiani. Semplici considerazioni trigonometriche porgono le relazioni:

$$A - O = -L \cos \varphi \hat{e}_2 \quad B - O = L \sin \varphi \hat{e}_1$$

$$M - O = \frac{A - O + B - O}{2} = \frac{L}{2} \sin \varphi \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \cos \varphi \hat{e}_2$$

$$C - M = L \sin \theta \hat{e}_1 - L \cos \theta \hat{e}_2$$

per cui il baricentro G dell'asta MC è individuato dal vettore:

$$G - M = \frac{C - M}{2} = \frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_2.$$

Il potenziale gravitazionale del sistema si scrive perciò:

$$\begin{aligned} U_g &= -mg \hat{e}_2 \cdot (M - O) - mg \hat{e}_2 \cdot (G - O) = \\ &= -mg \hat{e}_2 \cdot (M - O) - mg \hat{e}_2 \cdot (M - O + G - M) = \\ &= -2mg \hat{e}_2 \cdot (M - O) - mg \hat{e}_2 \cdot (G - M) = \\ &= -2mg \left(-\frac{L}{2} \cos \varphi\right) - mg \left(-\frac{L}{2} \cos \theta\right) = \\ &= mgL \cos \varphi + \frac{1}{2} mgL \cos \theta \end{aligned}$$

mentre quello elastico vale:

$$U_{el} = -\frac{k}{2} |A - O|^2 = -\frac{k}{2} L^2 \cos^2 \varphi,$$

in modo che il potenziale del sistema assume la forma:

$$U(\varphi, \theta) = U_g + U_{el} = mgL \cos \varphi - \frac{kL^2}{2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} mgL \cos \theta$$

$$(\varphi, \theta) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/3, \pi/3] .$$

Gli equilibri ordinari del sistema si identificano con i punti critici del potenziale U nel rettangolo aperto $(-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/3, \pi/3)$, in cui si annullano ambo le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) = -mgL \sin \varphi + kL^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = -\frac{1}{2} mgL \sin \theta .$$

Le equazioni di equilibrio sono perciò, omessi i fattori costanti,

$$\begin{cases} \sin \varphi \left(-\frac{mg}{kL} + \cos \varphi \right) = 0 \\ \sin \theta = 0 . \end{cases} \quad (1)$$

La prima equazione ammette per $\sin \varphi = 0$ due radici sempre definite:

$$\varphi = 0 , \quad \pi$$

e per $\cos \varphi - mg/kL = 0$ le due ulteriori soluzioni:

$$\varphi = \pm \arccos\left(\frac{mg}{kL}\right) = \pm \varphi^* \in (-\pi/2, \pi/2) ,$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia $mg/kL < 1$. Causa la limitazione $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, le radici ottenute sono tutte accettabili salvo $\varphi = \pi$. La seconda equazione di equilibrio (1) fornisce invece le soluzioni

$$\theta = 0 , \quad \pi ,$$

definite incondizionatamente; di queste, $\theta = \pi$ va rigettata per via della restrizione $-\pi/3 < \theta < \pi/3$. Dal momento che le equazioni di equilibrio appaiono disaccoppiate, gli equilibri ordinari sono individuati da tutte le possibili combinazioni dei valori di φ e θ determinati in precedenza:

$$(\varphi, \theta) = (0, 0) , \quad (\varphi^*, 0) , \quad (-\varphi^*, 0) .$$

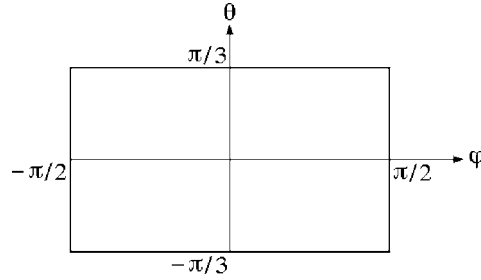
La seconda e la terza delle configurazioni di equilibrio esistono se e soltanto se $mg/kL < 1$, nel qual caso sono anche distinte dalla prima e fra loro.

(b) **Equilibri di confine**

Sebbene si richieda soltanto di stabilire se la configurazione di confine $(\varphi, \theta) = (\pi/2, -\pi/3)$ sia o meno un equilibrio del sistema, per maggiore completezza si procede ad una analisi dettagliata di tutti gli equilibri di confine, esaminando uno ad uno lati e vertici del rettangolo $\{(\varphi, \theta) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/3, \pi/3]\}$. Il lavoro virtuale delle forze attive si scrive:

$$\delta L = \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \delta \varphi + \frac{\partial U}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \delta \theta = kL^2 \sin \varphi \left(\cos \varphi - \frac{mg}{kL} \right) \delta \varphi - \frac{1}{2} mgL \sin \theta \delta \theta$$

per qualsiasi spostamento virtuale $(\delta \varphi, \delta \theta) \in \mathbb{R}^2$ relativo alla configurazione considerata.



- Lato $(\varphi, \theta) = (\varphi, -\pi/3)$, $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ della frontiera

In $(\varphi, -\pi/3)$ si ha equilibrio se e solo se:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}(\varphi, -\pi/3) \delta \varphi + \frac{\partial U}{\partial \theta}(\varphi, -\pi/3) \delta \theta \leq 0 \quad \forall \delta \varphi \in \mathbb{R}, \forall \delta \theta \geq 0$$

ovvero:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\varphi, -\pi/3) = kL^2 \sin \varphi \left(\cos \varphi - \frac{mg}{kL} \right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(\varphi, -\pi/3) = -\frac{1}{2} mgL \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \leq 0 \end{cases}$$

e poiché la seconda condizione non è soddisfatta:

$$-\frac{1}{2} mgL \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} mgL > 0,$$

si conclude che non esistono equilibri di confine lungo questo tratto della frontiera.

- Lato $(\varphi, \theta) = (\pi/2, \theta)$, $\theta \in (-\pi/3, \pi/3)$

Condizione necessaria e sufficiente perché $(\pi/2, \theta)$ sia un equilibrio del sistema è che:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}(\pi/2, \theta) \delta \varphi + \frac{\partial U}{\partial \theta}(\pi/2, \theta) \delta \theta \leq 0 \quad \forall \delta \varphi \leq 0, \forall \delta \theta \in \mathbb{R}$$

ossia:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\pi/2, \theta) = -mgL \geq 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(\pi/2, \theta) = \sin \theta = 0. \end{cases}$$

Nessun equilibrio sussiste per via della prima relazione, che non è verificata.

- *Lato* $(\varphi, \theta) = (\varphi, \pi/3)$, $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$

La configurazione $(\varphi, \pi/3)$ è un equilibrio se e soltanto se

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}(\varphi, \pi/3) \delta\varphi + \frac{\partial U}{\partial \theta}(\varphi, \pi/3) \delta\theta \leq 0 \quad \forall \delta\varphi \in \mathbb{R}, \forall \delta\theta \leq 0.$$

Ciò equivale a richiedere che:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\varphi, \pi/3) = kL^2 \sin \varphi \left(\cos \varphi - \frac{mg}{kL} \right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(\varphi, \pi/3) = -\frac{1}{2}mgL \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}mgL \geq 0 \end{cases}$$

ma siccome la seconda condizione non risulta verificata, anche in questo caso non si riconosce alcuna configurazione di equilibrio della forma cercata.

- *Lato* $(\varphi, \theta) = (-\pi/2, \theta)$, $\theta \in (-\pi/3, \pi/3)$

Il teorema dei lavori virtuali prescrive la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio nella configurazione $(-\pi/2, \theta)$ nella forma

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}(-\pi/2, \theta) \delta\varphi + \frac{\partial U}{\partial \theta}(-\pi/2, \theta) \delta\theta \leq 0 \quad \forall \delta\theta \in \mathbb{R}, \forall \delta\varphi \geq 0$$

ed equivale a:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \varphi}(-\pi/2, \theta) = mgL \leq 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(-\pi/2, \theta) = \sin \theta = 0. \end{cases}$$

La prima delle due condizioni non è mai soddisfatta, per cui la configurazione non costituisce un equilibrio del sistema.

- *Vertice* $(\varphi, \theta) = (\pi/2, -\pi/3)$

La configurazione è un equilibrio se e soltanto se

$$-mgL \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}mgL \leq 0,$$

condizione evidentemente non soddisfatta.

- Vertice $(\varphi, \theta) = (\pi/2, \pi/3)$

In questo caso le condizioni per l'equilibrio sono

$$-mgL \geq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{\sqrt{3}}{4}mgL \geq 0$$

e risultano violate entrambe.

- Vertice $(\varphi, \theta) = (-\pi/2, \pi/3)$

In questa configurazione si ha equilibrio nell'ipotesi siano soddisfatte le due condizioni

$$mgL \leq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{\sqrt{3}}{4}mgL \geq 0$$

che tuttavia non ricorrono.

- Vertice $(\varphi, \theta) = (-\pi/2, -\pi/3)$

L'equilibrio ricorre se e solo se

$$mgL \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}mgL \leq 0.$$

Neppure questa configurazione costituisce un equilibrio di confine per il sistema.

(c) Stabilità degli equilibri ordinari

Si è già sottolineato come tutte le sollecitazioni attive applicate al sistema abbiano carattere posizionale e conservativo. Le proprietà di stabilità degli equilibri possono quindi essere analizzate facendo ricorso ai teoremi classici di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo si rende necessario calcolare le derivate parziali seconde del potenziale:

$$\begin{aligned} U_{\varphi\varphi}(\varphi, \theta) &= -mgL \cos \varphi + kL^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\ U_{\varphi\theta}(\varphi, \theta) &= U_{\theta\varphi}(\varphi, \theta) = 0 \\ U_{\theta\theta}(\varphi, \theta) &= -\frac{1}{2}mgL \cos \theta \end{aligned}$$

cui corrisponde la matrice hessiana diagonale:

$$H_U(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -mgL \cos \varphi + kL^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}mgL \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ciò premesso, si può procedere allo studio di ogni singola configurazione di equilibrio del sistema.

Configurazione $(\varphi, \theta) = (0, 0)$

In questa configurazione la matrice hessiana del potenziale assume la forma:

$$H_U(0, 0) = \begin{pmatrix} -mgL + kL^2 & 0 \\ 0 & -mgL/2 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori coincidono con i relativi elementi diagonali. Mentre l'autovalore $-mgL/2$ ha sempre segno negativo per qualsiasi scelta dei coefficienti caratteristici del sistema, il secondo autovalore $-mgL + kL^2$ non presenta segno definito e richiede l'esame di tre casi distinti:

- (i) si ha stabilità per $-mgL + kL^2 < 0$, ossia $1 < mg/kL$, poiché in tal caso $H_U(0,0)$ ha tutti gli autovalori negativi e la configurazione costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, stabile in virtù del teorema di Lagrange-Dirichlet;
- (ii) se $1 > mg/kL$ si verifica l'instabilità della configurazione, per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- (iii) per $mg/kL = 1$ ricorre infine un caso critico. In effetti, uno sviluppo di Taylor nell'intorno di $(\varphi, \theta) = (0,0)$ consente di accertare che la configurazione costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è comunque assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(\varphi, \theta) = (\varphi^*, 0)$

Dal momento che:

$$\begin{aligned} U_{\varphi\varphi}(\varphi^*, 0) &= -mgL \cos \varphi^* + kL^2(\cos^2 \varphi^* - \sin^2 \varphi^*) = \\ &= kL^2 \left(-\frac{mg}{kL} \cos \varphi^* + \cos^2 \varphi^* - \sin^2 \varphi^* \right) = -kL^2 \sin^2 \varphi^* < 0, \end{aligned}$$

l'hessiana del potenziale risulta definita negativa:

$$H_U(\varphi^*, 0) = \begin{pmatrix} -kL^2 \sin^2 \varphi^* & 0 \\ 0 & -mgL/2 \end{pmatrix}$$

e individua la configurazione di equilibrio come massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(\varphi, \theta) = (-\varphi^*, 0)$

Anche questa configurazione risulta stabile, quando definita. La matrice hessiana del potenziale coincide infatti con quella calcolata per la configurazione simmetrica $(\varphi, \theta) = (\varphi^*, 0)$, avendosi in particolare:

$$U_{\varphi\varphi}(-\varphi^*, 0) = U_{\varphi\varphi}(\varphi^*, 0)$$

per via della simmetria del potenziale:

$$U(-\varphi, \theta) = U(\varphi, \theta) \quad \forall (\varphi, \theta) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/3, \pi/3].$$

(d) **Energia cinetica**

L'energia cinetica del sistema è data dalla somma di due contributi, relativi all'asta AB e all'asta MC rispettivamente. Entrambe le aste sono prive di punti fissi, per cui l'espressione dell'energia cinetica viene ottenuta, in ambo i casi, facendo uso del teorema di König.

Asta AB

L'energia cinetica dell'asta AB si scrive per mezzo dell'espressione:

$$T_{AB} = \frac{m}{2} \dot{M}^2 + \frac{1}{2} I_{Mz} |\vec{\omega}_{AB}|^2$$

nella quale la velocità del baricentro vale

$$\dot{M} = \frac{L}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \hat{e}_2$$

mentre il momento d'inerzia relativo all'asse Mz e la velocità angolare istantanea risultano:

$$I_{Mz} = \frac{mL^2}{12} \quad \vec{\omega}_{AB} = -\dot{\varphi} \hat{e}_3.$$

Sostituendo si ha così la relazione:

$$T_{AB} = \frac{m}{2} \frac{L^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{mL^2}{24} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} mL^2 \dot{\varphi}^2.$$

Asta MC

Il teorema di König porge per l'energia cinetica dell'asta MC l'espressione:

$$T_{MC} = \frac{m}{2} \dot{G}^2 + \frac{1}{2} I_{Gz} |\vec{\omega}_{MC}|^2$$

dove il baricentro è individuato per mezzo del vettore posizione

$$G - O = \frac{L}{2} [(\sin \varphi + \sin \theta) \hat{e}_1 - (\cos \varphi + \cos \theta) \hat{e}_2]$$

ed ha perciò velocità istantanea:

$$\dot{G} = \frac{L}{2} [(\cos \varphi \dot{\varphi} + \cos \theta \dot{\theta}) \hat{e}_1 + (\sin \varphi \dot{\varphi} + \sin \theta \dot{\theta}) \hat{e}_2]$$

di modulo quadrato:

$$\begin{aligned} \dot{G}^2 &= \frac{L^2}{4} [\cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2 \cos \varphi \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\theta} + \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2 \sin \varphi \sin \theta \dot{\varphi} \dot{\theta}] = \\ &= \frac{L^2}{4} [\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta}], \end{aligned}$$

mentre velocità angolare istantanea a momento angolare rispetto all'asse Gz sono dati dalle relazioni:

$$\vec{\omega}_{MC} = \dot{\theta} \hat{e}_3 \quad \text{e} \quad I_{Gz} = \frac{mL^2}{12}.$$

L'energia cinetica dell'asta diventa pertanto:

$$T_{MC} = \frac{mL^2}{8}[\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta}] + \frac{mL^2}{24} \dot{\theta}^2.$$

Energia cinetica del sistema

Per ricavare l'energia cinetica del sistema non rimane che sommare le energie cinetiche delle due aste:

$$\begin{aligned} T = T_{AB} + T_{MC} &= \frac{mL^2}{6} \dot{\varphi}^2 + \frac{mL^2}{8} \dot{\varphi}^2 + \frac{mL^2}{8} \dot{\theta}^2 + \frac{mL^2}{24} \dot{\theta}^2 + \frac{mL^2}{4} \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta} = \\ &= \frac{7}{24} mL^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6} mL^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} mL^2 \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta}. \end{aligned}$$

(e) Equazioni del moto

Le equazioni del moto sono quelle di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

con lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$:

$$\mathcal{L} = \frac{7}{24} mL^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6} mL^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} mL^2 \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta} + mgL \cos \varphi - \frac{kL^2}{2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} mgL \cos \theta.$$

Si hanno le espressioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{7}{12} mL^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{4} mL^2 \cos(\varphi - \theta) \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \frac{7}{12} mL^2 \ddot{\varphi} + \frac{1}{4} mL^2 \cos(\varphi - \theta) \ddot{\theta} - \frac{1}{4} mL^2 \sin(\varphi - \theta) (\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \dot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{4} mL^2 \sin(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta} - mgL \sin \varphi + kL^2 \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{3} mL^2 \dot{\theta} + \frac{1}{4} mL^2 \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{4} mL^2 \cos(\varphi - \theta) \ddot{\varphi} - \frac{1}{4} mL^2 \sin(\varphi - \theta) (\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \dot{\varphi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \frac{1}{4} mL^2 \sin(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta} - \frac{1}{2} mgL \sin \theta \end{aligned}$$

per cui le equazioni del moto diventano:

$$\frac{7}{12} mL^2 \ddot{\varphi} + \frac{1}{4} mL^2 \cos(\varphi - \theta) \ddot{\theta} + \frac{1}{4} mL^2 \sin(\varphi - \theta) \dot{\theta}^2 + mgL \sin \varphi - kL^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} + \frac{1}{4}mL^2 \cos(\varphi - \theta) \ddot{\varphi} - \frac{1}{4}mL^2 \sin(\varphi - \theta) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgL \sin \theta = 0.$$

(f) **Piccole oscillazioni**

Lo studio delle piccole oscillazioni può essere svolto, ad esempio, per la configurazione $(\varphi, \theta) = (0, 0)$, stabile per $mg/kL > 1$. La configurazione offre il vantaggio di una relativa semplicità dei calcoli. L'hessiana del potenziale in $(\varphi, \theta) = (0, 0)$ è già stata calcolata per lo studio della stabilità e vale

$$H_U(0, 0) = \begin{pmatrix} kL^2 - mgL & 0 \\ 0 & -mgL/2 \end{pmatrix}.$$

Trattandosi di sistema scleronomo, l'energia cinetica è una forma quadratica definita positiva delle velocità generalizzate $\dot{\varphi}, \dot{\theta}$ e può esprimersi come prodotto matriciale

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mL^2 \left[\frac{7}{12}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\cos(\varphi - \theta)\dot{\varphi}\dot{\theta} \right] = \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\varphi} \ \dot{\theta}) mL^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{4}\cos(\varphi - \theta) \\ \frac{1}{4}\cos(\varphi - \theta) & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove la matrice di rappresentazione dell'energia cinetica è data da:

$$A(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{4}\cos(\varphi - \theta) \\ \frac{1}{4}\cos(\varphi - \theta) & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

L'equazione per le pulsazioni ω delle piccole oscillazioni si scrive perciò:

$$\det[H_U(0, 0) + \omega^2 A(0, 0)] = 0$$

e sostituendo le espressioni esplicite delle matrici H_U ed A diventa:

$$\det \left[\begin{pmatrix} kL^2 - mgL & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}mgL \end{pmatrix} + mL^2\omega^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{4}\cos(\varphi - \theta) \\ \frac{1}{4}\cos(\varphi - \theta) & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right] = 0$$

ossia:

$$\det \begin{pmatrix} kL^2 \left(1 - \frac{mg}{kL}\right) + \frac{7}{12}mL^2\omega^2 & \frac{1}{4}\cos(\varphi - \theta) mL^2\omega^2 \\ \frac{1}{4}\cos(\varphi - \theta) mL^2\omega^2 & \frac{1}{3}mL^2\omega^2 - \frac{1}{2}mgL \end{pmatrix} = 0$$

e quindi:

$$\left[\frac{7}{12}mL^2\omega^2 + kL^2 \left(1 - \frac{mg}{kL}\right) \right] \left(\frac{1}{3}mL^2\omega^2 - \frac{1}{2}mgL \right) - \frac{1}{16}\cos^2(\varphi - \theta) m^2 L^4 \omega^4 = 0.$$

Questa equazione caratteristica — di secondo grado in ω^2 — fornisce le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile considerata.