**Scritto di meccanica razionale 2 del 24.02.2004**

**Esercizio 1**
Un punto materiale di massa unitaria è vincolato a restare nel piano orizzontale $Oxy$ di una terna cartesiana ortogonale $Oxyz$. Sul punto agisce un campo di forze posizionali conservative di potenziale:

$$\mathcal{U}(x,y) = xy - \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3}\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Nell'ipotesi che il piano sia liscio, determinare:

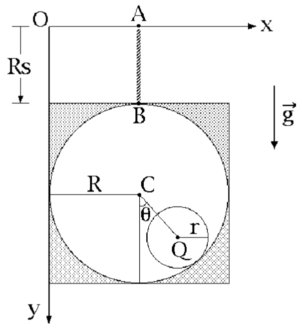
- $(a)$ gli equilibri stabili del sistema;
- $(b)$ l'equazione delle piccole oscillazioni nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile a scelta;
- $(c)$ le frequenze normali delle piccole oscillazioni di cui al punto precedente;
- $(d)$ i modi normali di oscillazione corrispondenti.

**Esercizio 2**
Un sistema rigido con punto fisso $C(0,1,-1)$ è posto in una certa configurazione $\mathbb{S}$ e soggetto alle forze attive seguenti:

- $\vec{F}_1 = \hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3$ applicata nel punto $P_1(-1,2,0)$ del sistema;
- $\vec{F}_2 = -4\,\hat{e}_1 + \beta\,\hat{e}_2 + \hat{e}_3$ applicata in $P_2(1,0,-2)$, essendo $\beta \in \mathbb{R}$ una costante.

Si determini la costante $\beta \in \mathbb{R}$ in modo che la configurazione $\mathbb{S}$ sia di equilibrio per il sistema.

**Esercizio 3**
Una lamina quadrata di lato $2R$, nella quale è praticato un foro circolare concentrico di raggio $R$, ha massa $M$ ed è vincolata a scorrere nel piano $Oxy$ di una terna cartesiana ortogonale $Oxyz$, mantenendosi al di sotto del piano orizzontale $Oxz$ e con un lato lungo l'asse verticale $Oy$. Il punto medio $B$ del lato superiore è collegato alla sua proiezione ortogonale fissa $A$ sull'asse $Ox$ mediante una molla ideale di costante elastica $k$. Lungo il bordo interno del foro circolare un disco omogeneo di centro $Q$, raggio $r < R$ e massa $m$, è vincolato a rotolare senza strisciare, giacendo sempre in $Oxy$. I vincoli si assumono ideali.




Usando le variabili adimensionali $s$ e $\theta$ illustrate in figura come parametri lagrangiani, determinare del sistema:

- $(a)$ l'espressione dell'energia cinetica;
- $(b)$ gli equilibri ordinari e di confine;
- $(c)$ la stabilità degli equilibri ordinari;
- $(d)$ le equazioni pure del moto;
- $(e)$ un integrale primo.

**Soluzione dell'esercizio 1**

Il campo di forze posizionali conservative associato al potenziale

$$\mathcal{U}(x,y) = xy - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 \ , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

si scrive:

$$\vec{F}(x,y) \ = \ (y-x)\,\hat{e}_1 + (x+y^2)\,\hat{e}_2 \ , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, .$$

$(a)$ **Equilibri stabili**

Le posizioni di equilibrio sono quelle per cui $\vec{F}(x,y) = 0$ (o, equivalentemente, i punti critici del potenziale $\mathcal{U}(x,y)$), e dunque sono soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{U}(x,y) = y - x = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\mathcal{U}(x,y) = x + y^2 = 0 \, . \end{cases}$$

Dalla prima equazione deduciamo $x = y$ e sostituendo tale relazione nella seconda otteniamo $x + x^2 = 0$, ovvero $x = 0$ e $x = -1$. Abbiamo dunque due configurazioni di equilibrio:

$$(x = 0, y = 0), \qquad (x = -1, y = -1).$$

Dato che le sollecitazioni attive applicate al sistema hanno carattere posizionale e conservativo, le proprietà di stabilità degli equilibri possono essere analizzate facendo ricorso ai teoremi classici di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. Valutiamo dunque le derivate parziali seconde del potenziale:

$$\mathcal{U}_{xx}(x,y) = -1$$

$$\mathcal{U}_{xy}(x,y) = \mathcal{U}_{yx}(x,y) = 1$$

$$\mathcal{U}_{yy}(x,y) = 2y$$

cui corrisponde la matrice hessiana:

$$H_U(x,y) \ = \ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix} .$$

Ciò premesso, possiamo studiare la stabilità di ognuna delle due configurazioni di equilibrio del sistema:

*Configurazione* $(x,y) = (0,0)$

In questa configurazione la matrice hessiana del potenziale assume la forma:

$$H_U(0,0) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dal fatto che $H_U(0,0)_{11} = -1 < 0$ e $\det H_U(0,0) = -1 < 0$, deduciamo che $(x,y) = (0,0)$ è un punto di sella per il potenziale e quindi, per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, è una configurazione di equilibrio instabile.

*Configurazione* $(x,y) = (-1,-1)$
In questa configurazione la matrice hessiana del potenziale assume la forma:

$$H_U(-1,-1) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dal fatto che $H_U(-1,-1)_{11} = -1 < 0$ e $\det H_U(-1,-1) = 1 > 0$, deduciamo che $(x,y) = (-1,-1)$ è un punto di massimo relativo per il potenziale e quindi, per il teorema di Lagrange-Dirichlet, è una configurazione di equilibrio stabile.

(*b*) **Equazione delle piccole oscillazioni**
Lo studio delle piccole oscillazioni può essere svolto per la configurazione stabile $(x,y) = (-1,-1)$. L'energia cinetica del sistema è data da

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

dove la matrice di rappresentazione dell'energia cinetica è data da

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice hessiana del potenziale in $(x,y) = (-1,-1)$ è stata già calcolata al punto precedente ed è data da

$$H_U(-1,-1) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'equazione per le pulsazioni $\omega$ delle piccole oscillazioni si scrive perciò:

$$\det[H_U(-1,-1) + \omega^2 A(-1,-1)] \;=\; 0$$

e sostituendo le espressioni esplicite delle matrici $H_U$ ed $A$ diventa:

$$\det\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \omega^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \;=\; 0$$

ossia:

$$\det\begin{pmatrix} \omega^2-1 & 1 \\ 1 & \omega^2-2 \end{pmatrix} = 0$$

e quindi:

$$(\omega^2-1)(\omega^2-2)-1=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega^4-3\omega^2+1=0.$$

Questa equazione caratteristica — di secondo grado in $\omega^2$ — fornisce le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile considerata.

($c$) **Frequenze normali delle piccole oscillazioni**
Le due soluzioni $\omega_1^2$ e $\omega_2^2$ dell'equazione di secondo grado in $\omega^2$

$$\omega^4-3\omega^2+1=0,$$

sono il quadrato delle pulsazioni normali delle piccole oscillazioni nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile considerata. Si ha:

$$\omega_1^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \qquad \omega_2^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

($d$) **Modi normali di oscillazione**
Il primo modo normale di oscillazione, corrispondente alla pulsazione $\omega_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, è un vettore (non nullo) $(a,b)$, tale che

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \omega_1^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In altre parole il vettore $(a,b)$ è una soluzione (non nulla) del sistema lineare omogeneo nelle incognite $a,b$:

$$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}a+b=0 \\ a-\frac{1-\sqrt{5}}{2}b=0\,. \end{cases}$$

Sono soluzioni di questo sistema tutte e sole le coppie $(a,b)$ tali che $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}b$, ovvero tutti i vettori $(a,b)$ multipli di $(\frac{1-\sqrt{5}}{2},1)$.
Il secondo modo normale di oscillazione, corrispondente alla pulsazione $\omega_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$, è un vettore (non nullo) $(a,b)$, tale che

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \omega_2^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In altre parole il vettore $(a, b)$ è una quasiasi soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo nelle incognite $a, b$:

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2}a + b = 0 \\ a - \frac{1+\sqrt{5}}{2}b = 0\,. \end{cases}$$

Sono soluzioni di tale sistema tutte le coppie $(a, b)$ tali che $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}b$, ovvero tutti i vettori $(a, b)$ multipli di $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1)$.
Concludendo, le piccole oscillazioni $(\delta x(t), \delta y(t))$ nell'intorno della posizione di equilibrio stabile $(x, y) = (-1, -1)$ sono rappresentabili come sovrapposizione dei due modi normali di oscillazione calcolati, ossia

$$\begin{pmatrix} \delta x(t) \\ \delta y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos\Big(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\,t+\phi_1\Big)+c_2 \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos\Big(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,t+\phi_2\Big),$$

con $c_1, c_2, \in \mathbb{R}$, $\phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi)$.

### Soluzione dell'esercizio 2

La configurazione $\mathbb{S}$ è di equilibrio per il sistema se e soltanto se il momento delle forze attive applicate rispetto polo $C$ risulta nullo. Tale momento risultante si scrive:

$$\begin{aligned} &[(P_1 - C) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - C) \wedge \vec{F}_2] = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -4 & \beta & 1 \end{vmatrix} = (\beta - 5)\hat{e}_1 + (\beta - 5)\hat{e}_3 \end{aligned}$$

e la condizione di equilibrio equivale perciò a richiedere che sia:

$$\beta = 5\,.$$

### Soluzione dell'esercizio 3

**$(a)$ Energia cinetica**

L'energia cinetica del sistema è data dalla somma di due contributi, relativi alla lamina quadrata e al disco omogeneo rispettivamente.

*Lamina quadrata*

Il moto della lamina è puramente traslatorio. L'espressione per l'energia cinetica è dunque:

$$T_{lamina} = \frac{1}{2}M\dot{C}^2.$$

Il baricentro $C$ è individuato dal vettore posizione

$$C - O \;=\; R\hat{e}_1 + R(1+s)\,\hat{e}_2$$

ed ha perciò velocità istantanea $\dot{C} = R\dot{s}\hat{e}_2$. Sostituendo si ha dunque

$$T_{lamina} = \frac{1}{2}MR^2\dot{s}^2.$$

*Disco*

L'energia cinetica del disco omogeneo è calcolabile tramite il teorema di König:

$$T_{disco} = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}I_Q|\vec{\omega}|^2,$$

dove $\vec{\omega}$ indica la velocità di rotazione del disco rispetto al sistema di riferimento del baricentro e $I_Q$ è il momento d'inerzia rispetto all'asse $Qz$:

$$I_Q = \frac{mr^2}{2}.$$

Il baricentro $Q$ è individuato dal vettore posizione

$$Q - C \;=\; (R-r)\sin\theta\,\hat{e}_1 + (R-r)\cos\theta\,\hat{e}_2$$

$$Q - O \;=\; [R + (R-r)\sin\theta]\,\hat{e}_1 + [R + Rs + (R-r)\cos\theta]\,\hat{e}_2$$

ed ha perciò velocità istantanea

$$\dot{Q} = (R-r)\cos\theta\dot{\theta}\,\hat{e}_1 + [R\dot{s} - (R-r)\sin\theta\dot{\theta}]\,\hat{e}_2,$$

di modulo quadro

$$\dot{Q}^2 \;=\; (R-r)^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{s}^2 - 2R(R-r)\sin\theta\dot{\theta}\dot{s}.$$

La velocità angolare di rotazione $\vec{\omega}$ del disco rispetto al baricentro è determinabile imponendo la condizione di rotolamento puro, ovvero imponento che la velocità istantanea del punto di contatto fra disco e bordo interno della lamina sia nulla nel sistema di riferimento della lamina. Posto $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_3$, otteniamo:

$$-\omega r + \dot{\theta}(R-r) = 0 \quad\Rightarrow\quad \omega = \frac{(R-r)}{r}\dot{\theta}.$$

L'energia cinetica del disco diviene pertanto:

$$T_{disco} = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{s}^2 - mR(R-r)\sin\theta\,\dot{\theta}\dot{s}\,.$$

*Energia cinetica del sistema*
Per ricavare l'energia cinetica del sistema non rimane che sommare le energie cinetiche della lamina e del disco:

$$T = T_{lamina} + T_{disco} = \frac{1}{2}(m+M)R^2\dot{s}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 - mR(R-r)\sin\theta\,\dot{\theta}\dot{s}\,.$$

($b$) **Equilibri ordinari e di confine**
Tutte le sollecitazioni applicate al sistema hanno natura posizionale e conservativa e sono quindi descritte da un potenziale $U$, che risulterà dalla somma di un potenziale elastico relativo all'interazione fra i punti $B$ ed $A$, del potenziale gravitazionale della lamina e del potenziale gravitazionale del disco omogeneo. Per il calcolo del potenziale occorre esprimere le coordinate del punto $B$ e dei baricentri $C$ e $Q$ della lamina e del disco in funzione dei parametri lagrangiani. Semplici considerazioni trigonometriche porgono le relazioni:

$$\begin{aligned} B - A &= Rs\hat{e}_2 \\ C - O &= R\hat{e}_1 + R(1+s)\hat{e}_2 \\ Q - O &= [R + (R-r)\sin\theta]\,\hat{e}_1 + [R + Rs + (R-r)\cos\theta]\,\hat{e}_2\,. \end{aligned}$$

Il potenziale gravitazionale del sistema si scrive perciò:

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{g}} &= Mg\hat{e}_2\cdot(C-O) + mg\hat{e}_2\cdot(Q-O) = \\ &= Mg(R+Rs) + mg[R + Rs + (R-r)\cos\theta] \end{aligned}$$

mentre quello elastico vale:

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}|B-A|^2 = -\frac{k}{2}R^2s^2\,,$$

in modo che il potenziale del sistema assume la forma:

$$U(s,\theta) = U_{\mathrm{g}} + U_{\mathrm{el}} = (M+m)Rgs + mg(R-r)\cos\theta - \frac{k}{2}R^2s^2 + \mathrm{costante}\,.$$

Gli equilibri ordinari del sistema si identificano con i punti critici del potenziale $U$ e sono determinabili annullando simultaneamente le derivate parziali prime di questo

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s}(s,\theta) &= (M+m)Rg - kR^2s \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(s,\theta) &= -mg(R-r)\sin\theta\,. \end{aligned}$$

Le equazioni di equilibrio sono perciò, omessi i fattori costanti,

$$\begin{cases} (M+m)Rg - kR^2 s \,=\, 0 \\ \sin\theta \,=\, 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

Dalla prima equazione segue l'unica radice

$$s \,=\, s^* \,=\, \frac{(M+m)g}{kR}$$

mentre la seconda equazione ammette per $\sin\theta = 0$ due radici sempre definite:

$$\theta \,=\, 0\,, \quad \pi\,.$$

Esistono dunque due configurazioni di equilibrio ordinario:

$$(s,\theta) \,=\, (s^*,0)\,, \quad (s^*,\pi)\,.$$

Le configurazioni di confine del sistema sono tutte e soltanto della forma

$$(s,\theta) \,=\, (0,\theta)\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Poiché il dominio di definizione della parametrizzazione è il semipiano

$$\{(s,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;:\; s \,\geq\, 0\}\,,$$

il teorema dei lavori virtuali consente di caratterizzare gli equilibri di confine per mezzo della relazione simbolica:

$$\delta L \,=\, \frac{\partial U}{\partial s}(0,\theta)\,\delta s + \frac{\partial U}{\partial \theta}(0,\theta)\,\delta\theta \,\leq\, 0 \qquad \forall\,\delta s \,\geq\, 0\,, \quad \forall\,\delta\theta \in \mathbb{R}$$

ossia del sistema equivalente di relazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial s}(0,\theta) \,=\, (M+m)Rg \,\leq\, 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta}(0,\theta) \,=\, -mg(R-r)\sin\theta \,=\, 0\,. \end{cases}$$

L'evidente inconsistenza della prima relazione induce a concludere che nessuna configurazione di confine soddisfa le condizioni del teorema dei lavori virtuali, per cui il sistema non ammette equilibri di confine.

($c$) **Stabilità degli equilibri**
Si è già sottolineato come tutte le sollecitazioni attive applicate al sistema abbiano carattere posizionale e conservativo. Le proprietà di stabilità degli

equilibri possono quindi essere analizzate facendo ricorso ai teoremi classici di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo si rende necessario calcolare le derivate parziali seconde del potenziale:

$$\begin{aligned}
U_{ss}(s,\theta) &= -kR^2 \\
U_{s\theta}(s,\theta) &= U_{\theta s}(s,\theta) = 0 \\
U_{\theta\theta}(s,\theta) &= -mg(R-r)\cos\theta
\end{aligned}$$

cui corrisponde la matrice hessiana diagonale:

$$H_U(s,\theta) = \begin{pmatrix} -kR^2 & 0 \\ 0 & -mg(R-r)\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ciò premesso, si può procedere allo studio di ogni singola configurazione di equilibrio del sistema.

**Configurazione** $(s,\theta) = (s^\star, 0)$
In questa configurazione la matrice hessiana del potenziale assume la forma:

$$H_U(s^\star,0) = \begin{pmatrix} -kR^2 & 0 \\ 0 & -mg(R-r) \end{pmatrix}$$

i cui autovalori coincidono con i relativi elementi diagonali e sono entrambi negativi. La configurazione costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, stabile in virtù del teorema di Lagrange-Dirichlet.

**Configurazione** $(s,\theta) = (s^\star, \pi)$
In questa configurazione la matrice hessiana del potenziale assume la forma:

$$H_U(s^\star,0) = \begin{pmatrix} -kR^2 & 0 \\ 0 & mg(R-r) \end{pmatrix}$$

in questo caso un autovalore è positivo e uno negativo. La configurazione è di equilibrio instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

$(d)$ **Equazioni del moto**
Le equazioni del moto sono quelle di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{s}}\Big) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial s} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \theta} = 0$$

con lagrangiana $\mathfrak{L} = T + U$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} = &\frac{1}{2}(m+M)R^2\dot{s}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 - mR(R-r)\sin\theta\,\dot{\theta}\dot{s} + (M+m)Rgs + \\
&+ mg(R-r)\cos\theta - \frac{k}{2}R^2s^2 .
\end{aligned}$$

Si hanno le espressioni:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{s}} &= (m+M)R^2\dot{s} - mR(R-r)\sin\theta\,\dot{\theta} \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{s}}\Big) &= (m+M)R^2\ddot{s} - mR(R-r)\sin\theta\,\ddot{\theta} - mR(R-r)\cos\theta\,\dot{\theta}^2 \\
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial s} &= (M+m)Rg - kR^2 s
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\theta} - mR(R-r)\sin\theta\,\dot{s} \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\theta}}\Big) &= \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} - mR(R-r)\sin\theta\,\ddots - mR(R-r)\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{s} \\
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \theta} &= -mR(R-r)\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{s} - mg(R-r)\sin\theta
\end{aligned}
$$

per cui le equazioni del moto diventano:

$$
(m+M)R^2\ddot{s} - mR(R-r)\sin\theta\,\ddot{\theta} - mR(R-r)\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - (M+m)Rg + kR^2 s = 0
$$

$$
\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} - mR(R-r)\sin\theta\,\ddot{s} + mg(R-r)\sin\theta = 0\,.
$$

(*e*) **Integrale primo**
La Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, si conserva dunque l'integrale primo dell'energia meccanica $H = T - U$:

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}(m+M)R^2\dot{s}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 - mR(R-r)\sin\theta\,\dot{\theta}\dot{s} - (M+m)Rgs + \\
&\quad - mg(R-r)\cos\theta + \frac{k}{2}R^2 s^2\,.
\end{aligned}
$$