

Esercizio 1

Un sistema rigido con punto fisso O , privo di attrito, in una sua configurazione \mathbb{S} è sottoposto alle sollecitazioni seguenti:

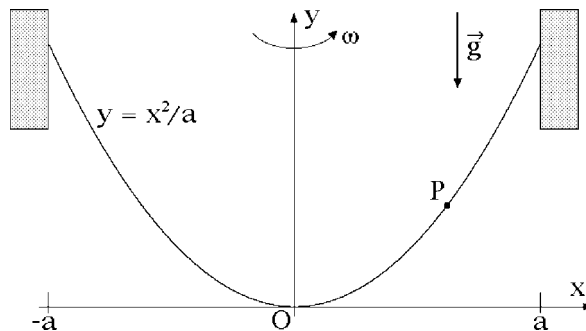
- $\vec{F}_1 = -\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3$ applicata nel punto $P_1(1, 2, 0)$;
- $\vec{F}_2 = -\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_2 + \hat{e}_3$ applicata in $P_2(-1, -3, -1)$,

dove β è una costante reale.

- (a) Calcolare il valore di β in modo che \mathbb{S} sia un equilibrio.
- (b) Determinare risultante e momento risultante in O delle reazioni vincolari esterne, all'equilibrio.

Esercizio 2

Nella terna cartesiana $Oxyz$, un punto materiale pesante di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo la parabola di equazione $y = x^2/a$, con a costante positiva e $x \in [-a, a]$. Il riferimento $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale Oy .

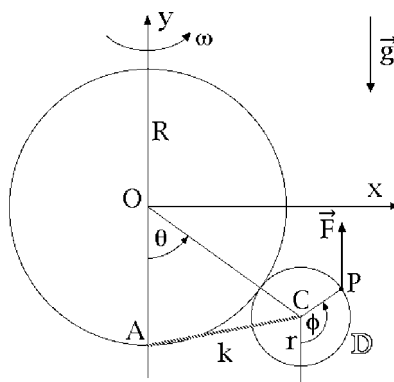


Assunta la curva liscia e usando l'ascissa $x \in [-a, a]$ di P come coordinata, determinare del sistema:

- (a) le equazioni del moto;
- (b) le configurazioni di equilibrio;
- (c) le proprietà di stabilità degli equilibri.

Esercizio 3

Nel piano verticale Oxy di una terna cartesiana ortogonale $Oxyz$ un disco circolare omogeneo pesante \mathbb{D} , di massa m , raggio r e centro C rotola lungo il bordo esterno di una guida circolare fissa di centro O e raggio R . Una molla ideale di costante elastica $k = mg/R$ congiunge il centro C del disco con il punto fisso $A(0, -R, 0)$, mentre ad un punto assegnato P sul bordo del disco è applicata una forza costante $\vec{F} = mg \hat{e}_2$. La terna $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale Oy , relativamente ad un riferimento inerziale — non rappresentato in figura.



Nell'ipotesi di vincoli ideali, e usando gli angoli θ e ϕ indicati in figura come coordinate lagrangiane, determinare:

- l'energia cinetica relativa a $Oxyz$ del sistema;
- gli equilibri relativi a $Oxyz$ del sistema;
- le proprietà di stabilità degli equilibri;
- le equazioni del moto del sistema;
- le frequenze normali delle piccole oscillazioni nell'intorno di un equilibrio stabile.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Condizione di equilibrio

Il sistema rigido con punto fisso O privo di attrito è un noto sistema a vincoli ideali e la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio si riduce all'annullarsi del momento risultante in O di tutte le forze attive applicate — nella configurazione data \mathbb{S} e con atto di moto nullo. La configurazione \mathbb{S} sarà dunque di equilibrio per il sistema se e soltanto se:

$$(P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 = 0$$

ossia:

$$(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) \wedge (-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3) + (-\hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 - \hat{e}_3) \wedge (-\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_2 + \hat{e}_3) = 0,$$

condizione che, eseguiti i prodotti vettore si riduce a:

$$4\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 + (-3 + \beta)\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + (-\beta - 3)\hat{e}_3 = 0$$

e quindi all'equazione:

$$(1 + \beta)\hat{e}_1 - (1 + \beta)\hat{e}_3 = 0.$$

L'equilibrio nella configurazione \mathbb{S} è quindi possibile e ricorre per il solo valore $\beta = -1$ del parametro.

(b) Risultante e momento risultante delle reazioni vincolari esterne

Le equazioni cardinali della statica prevedono che, all'equilibrio, risultante e momento risultante di tutte le sollecitazioni applicate al sistema, attive e di reazione vincolare, siano nulli. Risultante e momento risultante delle sollecitazioni interne sono inoltre nulli in virtù del principio di azione e reazione. Deve aversi pertanto:

$$\vec{R}^{\phi,e} = -\vec{R}^{a,e} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

$$\vec{M}_O^{\phi,e} = -\vec{M}_O^{a,e} = -(P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 - (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 = 0$$

e dunque i risultanti richiesti valgono:

$$\vec{R}^{\phi,e} = -(-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3 - \hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3) = 2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - 3\hat{e}_3.$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Equazioni del moto

Il punto materiale vincolato a restare sull'arco liscio di parabola costituisce un sistema scleronomo a un grado di libertà, con vincoli ideali e unilaterali. L'ascissa $x \in [-a, a]$ costituisce l'unica coordinata generalizzata. Le equazioni pure del moto si identificano pertanto con le equazioni di Lagrange. La posizione del punto P rispetto alla terna assoluta $Oxyz$ è individuata per mezzo del vettore posizione:

$$P - O = x\hat{e}_1 + \frac{x^2}{a}\hat{e}_2$$

per cui la velocità istantanea di un qualsiasi moto possibile risulta:

$$\dot{P} = \left(\hat{e}_1 + \frac{2x}{a} \hat{e}_2 \right) \dot{x}$$

e la corrispondente energia cinetica assume la forma:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{P}^2 = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{4x^2}{a^2} \right) \dot{x}^2.$$

Tutte le sollecitazioni attive agenti sul sistema sono peraltro posizionali e conservative, riducendosi alla gravità ed alle forze centrifughe, mentre la forza di Coriolis si presenta necessariamente ortogonale alla curva e quindi di componente lagrangiana identicamente nulla — la forza di Coriolis è diretta secondo la binormale all'arco di parabola. Il potenziale U del sistema è dato allora dalla somma di un termine gravitazionale:

$$U_g = -mg \hat{e}_2 \cdot (P - O) = -mg \frac{x^2}{a}$$

e di uno centrifugo:

$$U_{cf} = \frac{\omega^2}{2} m [(P - O) \cdot \hat{e}_1]^2 = \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

in modo che vale:

$$U(x) = -mg \frac{x^2}{a} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = m \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{a} \right) x^2.$$

Le equazioni pure del moto si riducono alla sola equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

con la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{4x^2}{a^2} \right) \dot{x}^2 + m \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{a} \right) x^2.$$

Sostituendo le ovvie relazioni:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \left(1 + \frac{4x^2}{a^2} \right) \dot{x} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{4mx}{a^2} \dot{x}^2 + m \left(\omega^2 - \frac{2g}{a} \right) x$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = m \left(1 + \frac{4x^2}{a^2} \right) \ddot{x} + \frac{8mx}{a^2} \dot{x}^2$$

si perviene così al risultato desiderato:

$$m \left(1 + \frac{4x^2}{a^2} \right) \ddot{x} + \frac{4mx}{a^2} \dot{x}^2 + m \left(\frac{2g}{a} - \omega^2 \right) x = 0.$$

(b) Equilibri

Poiché l'ascissa x varia nell'intervallo chiuso $[-a, a]$, il sistema è a vincoli unilaterali e può presentare configurazioni di equilibrio sia ordinarie che di confine. Gli equilibri ordinari sono tutti e soltanto i punti critici del potenziale, ovvero le soluzioni dell'equazione:

$$U'(x) = m\left(\omega^2 - \frac{2g}{a}\right)x = 0$$

e si riducono perciò alla sola configurazione $x = 0$, sempre definita. Le configurazioni di confine vengono individuate mediante il teorema dei lavori virtuali. Per $x = a$ si ha equilibrio se e soltanto se:

$$U'(a) \delta x \leq 0 \quad \delta x \leq 0$$

ossia

$$U'(a) = m\left(\omega^2 - \frac{2g}{a}\right)a \geq 0$$

e quindi condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio in $x = a$ è che si abbia:

$$\omega^2 \geq \frac{2g}{a}.$$

Analogamente, la configurazione di confine $x = -a$ costituisce un equilibrio per il sistema se e soltanto se:

$$U'(a) \delta x \leq 0 \quad \delta x \geq 0$$

ovvero:

$$U'(a) \leq 0,$$

condizione che equivale a:

$$U'(a) = -m\left(\omega^2 - \frac{2g}{a}\right)a \leq 0.$$

Anche in questo caso la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è data dalla diseguaglianza $\omega^2 \geq 2g/a$.

(c) Stabilità degli equilibri

La sola configurazione di equilibrio ordinaria — per la quale ha senso parlare di stabilità o instabilità secondo Liapunov — è costituita da $x = 0$. La derivata seconda del potenziale è costante:

$$U''(x) = U''(0) = m\left(\omega^2 - \frac{2g}{a}\right)$$

in modo che:

- (i) per $\omega^2 < 2g/a$ si ha $U''(0) < 0$ e la configurazione si riconosce essere un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet;
- (ii) nel caso si abbia $\omega^2 > 2g/a$ risulta $U''(0) > 0$ e l'instabilità della configurazione si deduce dal teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;

(iii) per $\omega^2 = 2g/a$ ricorre un caso critico. Una applicazione immediata dei criteri di Weierstrass — applicabili in quanto il sistema è conservativo ed unidimensionale — consente di verificare l'instabilità della configurazione.

Soluzione dell'esercizio 3

(a) Energia cinetica

Il disco omogeneo \mathbb{D} non presenta punti fissi e la sua energia cinetica viene determinata usando il teorema di König. Il baricentro del disco coincide con il suo centro geometrico:

$$C - O = (R + r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R + r) \cos \theta \hat{e}_2$$

e la sua velocità istantanea, relativa alla terna $Oxyz$ si scrive:

$$\dot{C} = (R + r)(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \dot{\theta}.$$

D'altra parte, l'angolo ϕ descrive la rotazione del disco attorno al proprio asse Cz , e quale angolo compreso fra una direzione fissata nella terna assoluta — la verticale condotta da C verso il basso — e la direzione CP assegnata sul disco stesso, consente di esprimere la velocità angolare istantanea di \mathbb{D} nella forma:

$$\vec{\omega}_{\mathbb{D}} = \dot{\phi} \hat{e}_3$$

in cui si è tenuto conto della usuale regola della mano destra. Il teorema di König porge pertanto:

$$T = \frac{m}{2} \dot{C}^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} |\vec{\omega}_{\mathbb{D}}|^2 = \frac{m}{2} (R + r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} |\dot{\phi} \hat{e}_3|^2$$

e conduce al risultato richiesto:

$$T = \frac{m}{2} (R + r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{mr^2}{4} \dot{\phi}^2.$$

(b) Equilibri del sistema

Si osserva in primo luogo che la terna $Oxyz$ costituisce un riferimento non inerziale ed è perciò sede di forze fittizie, centrifughe e di Coriolis. Le sollecitazioni di Coriolis, essendo applicate ai punti del disco nel piano fissato Oxy , contenente l'asse di rotazione Oy , risultano ortogonali al piano del moto e le loro componenti lagrangiane sono identicamente nulle. Tutte le altre sollecitazioni attive hanno natura posizionale e conservativa, e vengono descritte per mezzo dei rispettivi potenziali.

Potenziale elastico

La molla ideale di costante elastica $k = mg/R$ dà luogo ad una interazione elastica fra i punti C ed A , che sono individuati dai vettori posizione:

$$C - O = (R + r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R + r) \cos \theta \hat{e}_2 \quad A - O = -R \hat{e}_2.$$

Si ha pertanto:

$$C - A = (R + r) \sin \theta \hat{e}_1 + [R - (R + r) \cos \theta] \hat{e}_2$$

ed il relativo potenziale elastico diventa:

$$\begin{aligned} U_{\text{el}} &= -\frac{k}{2}(C - A)^2 = \\ &= -\frac{mg}{2R}[(R + r)^2 \sin^2 \theta + R^2 - 2R(R + r) \cos \theta + (R + r)^2 \cos^2 \theta] = \\ &= mg(R + r) \cos \theta + \text{costante}. \end{aligned}$$

Potenziale gravitazionale

Il potenziale gravitazionale del disco si calcola direttamente applicando l'espressione generale:

$$U_g = -mg(C - O) \cdot \hat{e}_2 = mg(R + r) \cos \theta.$$

Potenziale centrifugo

Anche per il potenziale centrifugo il calcolo è immediato, come da definizione:

$$\begin{aligned} U_{\text{cf}} &= \frac{\omega^2}{2} I_{Oy} = \frac{\omega^2}{2} [I_{Cy} + m[(C - O) \cdot \hat{e}_1]^2] = \\ &= \frac{\omega^2}{2} \left[\frac{mr^2}{4} + m(R + r)^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{m\omega^2}{2} (R + r)^2 \sin^2 \theta + \text{costante} \end{aligned}$$

ed omettendo le costanti additive inessenziali il risultato si scrive:

$$U_{\text{cf}} = \frac{m\omega^2}{2} (R + r)^2 \sin^2 \theta.$$

Potenziale della forza costante

Alla forza costante $\vec{F} = mg \hat{e}_2$ applicata in P si associa il potenziale:

$$U_F = \vec{F} \cdot (P - O) = mg \hat{e}_2 \cdot (P - O)$$

in cui vale:

$$P - O = C - O + P - C = (R + r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R + r) \cos \theta \hat{e}_2 + r \sin \phi \hat{e}_1 - r \cos \phi \hat{e}_2.$$

Perciò:

$$U_F = -mg(R + r) \cos \theta - mgr \cos \phi.$$

Potenziale del sistema

Il potenziale del sistema è la somma dei potenziali parziali delle singole sollecitazioni:

$$U = U_{\text{el}} + U_g + U_{\text{cf}} + U_F = mg(R + r) \cos \theta + \frac{m\omega^2}{2} (R + r)^2 \sin^2 \theta - mgr \cos \phi$$

e risulta definito $\forall (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$.

Equilibri

Trattandosi di sistema scleronomo posizionale e conservativo, a vincoli bilaterali e ideali, le configurazioni di equilibrio sono tutti e soli i punti critici del potenziale U . Poiché le componenti del gradiente di U si scrivono:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = U_\theta = -mg(R+r)\sin\theta + m\omega^2(R+r)^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = U_\phi = mgr\sin\phi$$

gli equilibri si ottengono risolvendo il sistema di equazioni trigonometriche:

$$\begin{cases} m\omega^2(R+r)^2\sin\theta\left[-\frac{g}{\omega^2(R+r)} + \cos\theta\right] = 0 \\ mgr\sin\phi = 0 \end{cases}$$

che equivale a:

$$\begin{cases} \sin\theta\left[-\frac{g}{\omega^2(R+r)} + \cos\theta\right] = 0 \\ \sin\phi = 0. \end{cases}$$

Il sistema ottenuto si disaccoppia in due equazioni distinte, l'una nella sola incognita θ e l'altra nella sola variabile ϕ . La prima equazione è soddisfatta per $\sin\theta = 0$, ovvero per:

$$-\frac{g}{\omega^2(R+r)} + \cos\theta = 0.$$

Nel primo caso si hanno le radici $\theta = 0, \pi$, sempre definite, mentre dal secondo risultano le radici distinte

$$\theta = \pm\theta^* = \pm\arccos\lambda$$

a patto che si ponga, per brevità, $\lambda = g/\omega^2(R+r) > 0$ e si abbia $\lambda < 1$. La seconda delle equazioni del sistema porge invece $\phi = 0, \pi$. Le configurazioni di equilibrio sono quindi individuate da tutte le possibili combinazioni dei valori di θ e ϕ ottenuti, vale a dire dai punti critici:

$$(\theta, \phi) = (0, 0), \quad (0, \pi), \quad (\pi, 0), \quad (\pi, \pi),$$

che sono definiti per qualsiasi scelta delle costanti caratteristiche del sistema, e da:

$$(\theta, \phi) = (\theta^*, 0), \quad (\theta^*, \pi), \quad (-\theta^*, 0), \quad (-\theta^*, \pi)$$

definiti se e soltanto se $\lambda < 1$, con $\theta^* = \arccos\lambda$.

(c) Stabilità degli equilibri

Il sistema è posizionale e conservativo, per cui la stabilità degli equilibri può essere studiata ricorrendo ai teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo, conviene ricavare preliminarmente le derivate parziali seconde del potenziale:

$$\begin{cases} U_{\theta\theta} = -mg(R+r)\cos\theta + m\omega^2(R+r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ U_{\theta\phi} = U_{\phi\theta} = 0 \\ U_{\phi\phi} = mgr\cos\phi \end{cases}$$

e la relativa matrice hessiana, che risulta diagonale:

$$H_U(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} m\omega^2(R+r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta - \lambda \cos\theta) & 0 \\ 0 & mgr \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Per $\phi = 0$ si ha $U_{\phi\phi}(\theta, 0) = mgr > 0$ e tutte le configurazioni con tale valore della coordinata lagrangiana ϕ risultano instabili per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Nel caso di $\phi = \pi$ è $U_{\phi\phi}(\theta, \pi) = -mgr < 0$ e le proprietà di stabilità o instabilità dell'equilibrio dipendono unicamente dal segno di $U_{\theta\theta}(\theta, \pi)$.

Configurazione $(\theta, \phi) = (0, \pi)$

Si ha:

$$U_{\theta\theta}(0, \pi) = m\omega^2(R+r)^2(1-\lambda)$$

e debbono perciò distinguersi tre casi:

- (i) se $\lambda > 1$ risulta $U_{\theta\theta}(0, \pi) < 0$ e la configurazione $(\theta, \phi) = (0, \pi)$ si riconosce essere un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet;
- (ii) per $\lambda < 1$ si ha invece $U_{\theta\theta}(0, \pi) > 0$ e la configurazione è instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- (iii) se infine $\lambda = 1$ ricorre un caso critico, avendosi $U_{\theta\theta}(0, \pi) = 0$ e risultando perciò l'hessiana soltanto semidefinita non definita negativa. In questo caso la sola speranza di trarre in modo semplice una qualche conclusione circa la stabilità o instabilità della configurazione è quella di accertare la presenza in $(\theta, \phi) = (0, \pi)$ un massimo relativo proprio del potenziale U , così da poter applicare ugualmente il teorema di Lagrange-Dirichlet e provare la stabilità. Vale in effetti:

$$\begin{aligned} U(\theta, \phi) &= m\omega^2(R+r)^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta + \lambda \cos\theta \right] - mgr \cos\phi = \\ &= m\omega^2(R+r)^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta + \cos\theta \right] - mgr \cos\phi = \\ &= m\omega^2(R+r)^2 \left[2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - mgr \cos\phi = \\ &= m\omega^2(R+r)^2 \left[1 - 2\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - mgr \cos\phi \end{aligned}$$

e da tale espressione si deduce che $(\theta, \phi) = (0, \pi)$ è un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(\theta, \phi) = (\pi, \pi)$

In questo caso la derivata seconda in θ del potenziale si scrive:

$$U_{\theta\theta}(\pi, \pi) = m\omega^2(R+r)^2(1+\lambda) > 0$$

ed implica l'instabilità della configurazione per il teorema di inversione parziale.

Configurazioni $(\theta, \phi) = (\theta^*, \pi), (-\theta^*, \pi)$

Le proprietà di stabilità di queste configurazioni sono identiche per via della simmetria del potenziale:

$$U(\theta, \phi) = U(-\theta, -\phi) \quad \forall (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$$

e possono quindi essere studiate per una sola delle due configurazioni. La derivata seconda rispetto a θ assume la forma:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta}(\theta^*, \pi) &= m\omega^2(R+r)^2(\cos^2\theta^* - \sin^2\theta^* - \lambda \cos\theta^*) = \\ &= m\omega^2(R+r)^2(\cos^2\theta^* - \sin^2\theta^* - \cos^2\theta^*) = -m\omega^2(R+r)^2\sin^2\theta^* < 0. \end{aligned}$$

Quando definite, le configurazioni di equilibrio $(\theta, \phi) = (\pm\theta^*, \pi)$ costituiscono perciò dei massimi relativi propri del potenziale e la loro stabilità si riconosce grazie al teorema di Lagrange-Dirichlet.

(d) Equazioni del moto

Il sistema è olonomo e a vincoli bilaterali ideali, a due gradi di libertà. Le equazioni del moto sono quindi quelle di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

con lagrangiana:

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{m}{2}(R+r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{mr^2}{4}\dot{\phi}^2 + mg(R+r)\cos\theta + \frac{m\omega^2}{2}(R+r)^2\sin^2\theta - mgr\cos\phi$$

dalla quale si deducono le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= m(R+r)^2\dot{\theta} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m(R+r)^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -mg(R+r)\sin\theta + m\omega^2(R+r)^2\sin\theta\cos\theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{mr^2}{2}\dot{\phi} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{mr^2}{2}\ddot{\phi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= mgr\sin\phi \end{aligned}$$

e le relative equazioni di Lagrange:

$$\begin{cases} m(R+r)^2\ddot{\theta} + mg(R+r)\sin\theta - m\omega^2(R+r)^2\sin\theta\cos\theta = 0 \\ \frac{mr^2}{2}\ddot{\phi} - mgr\sin\phi = 0. \end{cases}$$

Si noti che le equazioni del moto sono disaccoppiate, la prima descrivendo l'evoluzione nel tempo del solo parametro θ e la seconda relativamente al solo parametro ϕ .

(e) Frequenze normali delle piccole oscillazioni

Per la maggiore semplicità dei calcoli, conviene studiare le piccole oscillazioni nell'intorno della configurazione di equilibrio $(\theta, \phi) = (0, \pi)$, già riconosciuta stabile per $\lambda > 1$. Le frequenze normali delle piccole oscillazioni si ottengono risolvendo in $\Omega > 0$ l'equazione caratteristica:

$$\det[\Omega^2 A(0, \pi) + H_U(0, \pi)] = 0$$

in cui $A(0, \pi)$ e $H_U(0, \pi)$ sono rispettivamente la matrice di rappresentazione dell'energia cinetica e la matrice hessiana del potenziale nella configurazione considerata, mentre Ω rappresenta la generica pulsazione normale. La matrice rappresentativa dell'energia cinetica si ricava riscrivendo l'energia cinetica nella forma:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\theta} \ \dot{\phi}) \begin{pmatrix} m(R+r)^2 & 0 \\ 0 & mr^2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

e risulta perciò costante e diagonale:

$$A(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} m(R+r)^2 & 0 \\ 0 & mr^2/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice hessiana del potenziale è già stata ricavata nel corso dell'analisi di stabilità e ci si limita perciò a riscriverla di seguito:

$$H_U(0, \pi) = \begin{pmatrix} -m\omega^2(R+r)^2(\lambda-1) & 0 \\ 0 & -mgr \end{pmatrix}.$$

L'equazione caratteristica diventa perciò:

$$\det \begin{pmatrix} m(R+r)^2\Omega^2 - m\omega^2(R+r)^2(\lambda-1) & 0 \\ 0 & mr^2\Omega^2/2 - mgr \end{pmatrix} = 0$$

e si scrive esplicitamente come:

$$\left[m(R+r)^2\Omega^2 - m\omega^2(R+r)^2(\lambda-1) \right] \left[\frac{mr^2\Omega^2}{2} - mgr \right] = 0$$

deducendosi da essa che:

$$\Omega = \Omega_1 = \omega\sqrt{\lambda-1} \quad \text{e} \quad \Omega = \Omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{r}}.$$

Le frequenze normali delle piccole oscillazioni sono perciò:

$$f_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{\lambda-1} \quad \text{e} \quad f_2 = \frac{\Omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{r}}.$$