Scritto di meccanica razionale 2 del 07.07.2004

Esercizio 1
In una terna inerziale $Oxyz$ si consideri un sistema rigido con asse fisso baricentrale OA privo di attrito. In una configurazione $\mathbb{S}$ assegnata, il sistema è soggetto alle sollecitazioni:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= p(\hat{e}_1 - \hat{e}_3) \qquad &\text{agente nel punto } P_1(0, L, 0) \\ \vec{F}_2 &= p(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) \qquad &\text{agente nel punto } P_2(L, L, 0) \end{aligned}$$

essendo $p > 0$ e $L > 0$ rispettivamente il peso ed una lunghezza caratteristica — costante — del sistema. Sapendo che $(0, 2L, 0)$ sono le coordinate del punto A in $Oxyz$:

(a) stabilire se la configurazione $\mathbb{S}$ è un equilibrio del sistema;

(b) determinare le reazioni vincolari esterne in O ed in A quando il sistema si trova in quiete nella configurazione $\mathbb{S}$, precisando se il problema è staticamente determinato o meno.

Esercizio 2
Un punto materiale di massa unitaria è vincolato a scorrere senza attrito lungo una curva fissata γ. In termini dell'ascissa curvilinea $s \in \mathbb{R}$, la relativa equazione del moto si scrive:

$$\ddot{s} = s^2 - 2s\,.$$

Determinare:

(a) le condizioni iniziali per le quali si hanno i moti periodici del sistema;

(b) le condizioni iniziali per i moti a meta asintotica;

(c) il ritratto di fase del sistema.

Esercizio 3
Un sistema scleronomo a due gradi di libertà e vincoli ideali bilaterali è descritto dalle coordinate generalizzate adimensionali $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$ ed ha lagrangiana:

$$\mathfrak{L} = T + U = \frac{3}{4} m R^2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR(-x^2 + 2x\sin\theta + \cos\theta)$$

dove m ed R sono rispettivamente una massa ed una lunghezza caratteristiche del sistema, mentre g indica l'accelerazione di gravità. Determinare:

(a) gli equilibri del sistema;

(b) le proprietà di stabilità degli equilibri;

(c) le equazioni linearizzate del moto nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile a scelta;

(d) frequenze e modi normali delle piccole oscillazioni nell'intorno dello stesso equilibrio.

Soluzione dell'esercizio 1
(a) **Equilibrio del rotore rigido**
Trattandosi di corpo rigido con asse fisso privo di attrito, la configurazione $\mathbb{S}$ del sistema è di equilibrio se e soltanto se il momento risultante rispetto all'asse di rotazione delle forze attive applicate risulta nullo:

$$\mathbb{S} \text{ equilibrio} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \hat{e}_2 \cdot \vec{M}_O^a \,=\, 0\,.$$

Nella fattispecie, si ha:

$$\hat{e}_2 \cdot \vec{M}_O^a \,=\, \hat{e}_2 \cdot [(P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2] \,=\, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ p & 0 & -p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ L & L & 0 \\ p & 2p & 0 \end{vmatrix} = 0$$

per cui la configurazione costituisce effettivamente un equilibrio.

(b) **Reazioni vincolari esterne**
Si indichino con $\vec{\Phi}_A$ e $\vec{\Phi}_O$ le reazioni vincolari esterne applicate rispettivamente nei punti A ed O dell'asse fisso. Posto

$$\vec{\Phi}_A \,=\, \Phi_1 \hat{e}_1 + \Phi_2 \hat{e}_2 + \Phi_3 \hat{e}_3\,,$$

la seconda equazione cardinale della statica, scritta rispetto al polo O, porge la relazione

$$\vec{M}_O^\phi + \vec{M}_O^a \,=\, 0$$

nella quale risulta

$$\vec{M}_O^\phi \,=\, (O-O) \wedge \vec{\Phi}_O + (A-O) \wedge \vec{\Phi}_A \,=\, \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 2L & 0 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix} \,=\, 2L\Phi_3 \hat{e}_1 - 2L\Phi_1 \hat{e}_3$$

mentre per le forze attive applicate vale

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^a \,&=\, (P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 \,= \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & L & 0 \\ p & 0 & -p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ L & L & 0 \\ p & 2p & 0 \end{vmatrix} \,=\, -Lp\,\hat{e}_1 - Lp\,\hat{e}_3 + Lp\,\hat{e}_3 \,=\, -Lp\,\hat{e}_1\,. \end{aligned}$$

Alla quiete in $\mathbb{S}$ deve aversi perciò

$$2L\Phi_3 \hat{e}_1 - 2L\Phi_1 \hat{e}_3 - Lp\,\hat{e}_1 \,=\, 0$$

ovvero

$$\begin{cases} 2L\Phi_3 - Lp \,=\, 0 \\ -2L\Phi_1 \,=\, 0 \end{cases}$$

per cui si conclude che la reazione vincolare in A deve essere del tipo

$$\vec{\Phi}_A = \Phi_2\,\hat{e}_2 + \frac{p}{2}\,\hat{e}_3$$

con $\Phi_2 \in \mathbb{R}$ arbitraria. Dalla prima equazione cardinale della statica si ottiene infine:

$$\vec{\Phi}_O + \vec{\Phi}_A + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

e quindi

$$\vec{\Phi}_O = -\vec{\Phi}_A - \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -\Phi_2\,\hat{e}_2 - \frac{p}{2}\,\hat{e}_3 - p\,\hat{e}_1 + p\,\hat{e}_3 - p\,\hat{e}_1 - 2p\,\hat{e}_2 = -2p\,\hat{e}_1 - (2p+\Phi_2)\,\hat{e}_2 + \frac{p}{2}\,\hat{e}_3.$$

In definitiva, le reazioni vincolari esterne all'equilibrio sono date da

$$\begin{aligned}
\vec{\Phi}_A &= \Phi_2\,\hat{e}_2 + \frac{p}{2}\,\hat{e}_3 \\
\vec{\Phi}_O &= -2p\,\hat{e}_1 - (2p+\Phi_2)\,\hat{e}_2 + \frac{p}{2}\,\hat{e}_3 \qquad \forall\,\Phi_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

e il problema risulta staticamente indeterminato.

Soluzione dell'esercizio 2

Il sistema è unidimensionale e soggetto unicamente a sollecitazioni posizionali, e dunque conservative: l'andamento qualitativo delle soluzioni può essere discusso per mezzo dell'analisi di Weierstrass. A questo scopo l'equazione del moto viene riscritta come

$$\ddot{s} = s^2 - 2s = \frac{d}{ds}\Big(\frac{s^3}{3} - s^2\Big)$$

in termini del potenziale

$$U(s) = \frac{s^3}{3} - s^2\,, \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

e quindi dell'energia potenziale

$$W(s) = -U(s) = -\frac{s^3}{3} + s^2$$

di cui occorre determinare il grafico. Per prima cosa si osserva che

$$\lim_{s\to+\infty} W(s) = -\infty \qquad\qquad \lim_{s\to-\infty} W(s) = +\infty$$

mentre annullando la derivata prima

$$W'(s) = -s^2 + 2s$$

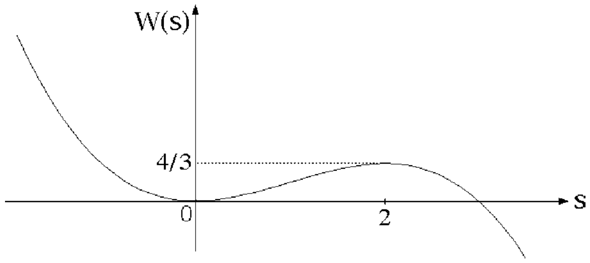
si ricavano i due soli punti critici $s = 0$ e $s = 2$. Di questi il primo è un minimo relativo proprio e il secondo un massimo relativo proprio, come si evince dal segno delle derivate seconde $W''(s) = -2s + 2$ calcolate dei punti critici:

$$W''(0) \,=\, 2 \qquad\qquad W''(2) \,=\, -2\,.$$

Un ruolo cruciale nella discussione di Weierstrass giocano i valori dell'energia potenziale nei punti critici:

$$W(0) \,=\, 0 \qquad\qquad W(2) \,=\, \frac{4}{3}\,.$$

L'energia potenziale ha così il grafico illustrato nella figura seguente:



che serve come base per la discussione di Weierstrass e la costruzione del ritratto di fase del sistema. La classificazione delle soluzioni viene ottenuta facendo uso, al solito, dell'integrale primo dell'energia meccanica:

$$H(s,\dot{s}) \,=\, T + W(s) \,=\, \frac{\dot{s}^2}{2} - \frac{s^3}{3} + s^2\;, \quad (s,\dot{s}) \in \mathbb{R}^2\,.$$

(a) **Condizioni iniziali per i moti periodici**
Per i criteri di Weierstrass i moti periodici si realizzano negli intervalli compatti di s sul cui interno la funzione di Weierstrass si mantiene strettamente positiva, presentando due zeri semplici agli estremi — punti di inversione del moto. La condizione ricorre se e soltanto se l'energia meccanica totale assume un valore compreso fra $W(0) = 0$ e $W(2) = 4/3$, sempreché la coordinata iniziale s sia minore di 2, il punto di massimo relativo di W,

$$\Big\{(s,\dot{s}) \in \mathbb{R}^2\;, \quad 0 \,<\, \frac{\dot{s}^2}{2} - \frac{s^3}{3} + s^2 \,<\, \frac{4}{3}\;, \quad s \,<\, 2\Big\}$$

in modo da escludere i moti definitivamente progressivi ottenuti per $s > 2$ — e tendenti a $s = +\infty$ nel futuro.

(b) **Condizioni iniziali per i moti a meta asintotica**
I moti a meta asintotica si realizzano soltanto per $H(s,\dot{s}) = W(2)$, allorquando il punto $s = 2$ è uno zero doppio della funzione di Weierstrass. Occorre escludere la posizione iniziale $s = 2$, ovvero la velocità iniziale $\dot{s} = 0$, che corrisponderebbe alla soluzione statica

$(s, \dot{s}) = (2, 0)$. Per $s < 2$ si ottiene una soluzione $s(t)$ con meta asintotica $s = 2$ ed **orbita omoclina**, in quanto

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) \,=\, 2 \qquad\qquad \lim_{t\to-\infty} s(t) \,=\, 2\,.$$

Nel caso si scelga una posizione iniziale $s > 2$ è necessario richiedere che la velocità iniziale sia negativa, in modo che il moto sia a meta asintotica **nel futuro** e non nel passato. Riassumendo, l'insieme delle condizioni iniziali associate ai moti asintotici è dato da

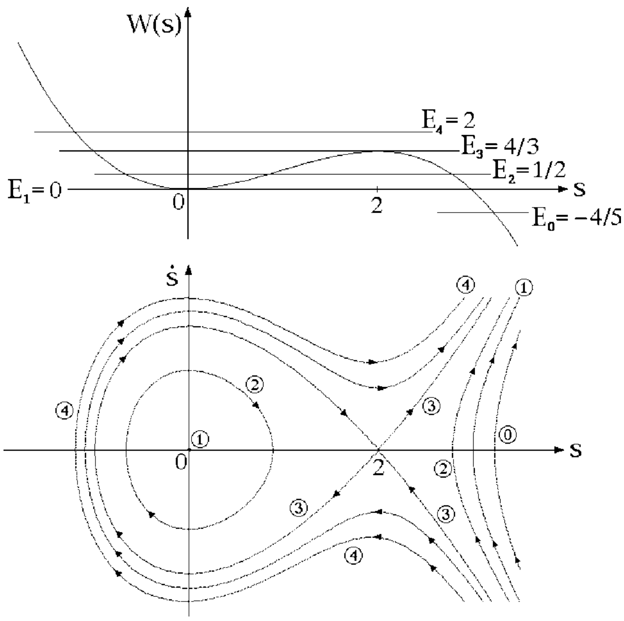
$$\left\{(s,\dot{s}) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{\dot{s}^2}{2} - \frac{s^3}{3} + s^2 = \frac{4}{3}\,,\ s \,<\, 2\right\} \cup \left\{(s,\dot{s}) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{\dot{s}^2}{2} - \frac{s^3}{3} + s^2 = \frac{4}{3}\,,\ s > 2\,,\ \dot{s} < 0\right\}.$$

(c) **Ritratto di fase**

Il ritratto di fase viene delineato tracciando qualitativamente le orbite corrispondenti a valori notevoli dell'energia meccanica, precisamente:

- $E_0 < 0$, per alcuni moti aperiodici;
- $E_1 = 0$, per la quiete in $s = 0$ ed alcuni moti aperiodici;
- $E_2 \in (0, 4/5)$, per i moti periodici ed alcuni moti aperiodici;
- $E_3 = 4/5$, per i moti a meta asintotica, la quiete in $s = 2$ ed alcuni moti aperiodici;
- $E_4 > 4/5$ per i moti aperiodici residui.

I livelli di energia sul grafico dell'energia potenziale e le relative orbite nel piano delle fasi sono riprodotti nell'illustrazione a lato.



Soluzione dell'esercizio 3

(a) **Equilibri**

Potenziale del sistema

Nella lagrangiana

$$\mathfrak{L} \,=\, T + U \,=\, \frac{3}{4}mR^2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(-x^2 + 2x\sin\theta + \cos\theta)$$

del sistema scleronomo, la forma quadratica in $(\dot{x}, \dot{\theta})$ rappresenta l'energia cinetica del sistema

$$T \,=\, \frac{3}{4}mR^2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

mentre il termine residuo, funzione delle sole coordinate generalizzate individua il relativo potenziale di sistema

$$U(x, \theta) \,=\, mgR(-x^2 + 2x\sin\theta + \cos\theta) \qquad (x, \theta) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Gli equilibri del sistema sono tutti e soli i punti critici del potenziale. Le derivate parziali prime del potenziale si scrivono

$$\frac{\partial U}{\partial x} = mgR(2\sin\theta - 2x) = 2mgR(\sin\theta - x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mgR(2x\cos\theta - \sin\theta)$$

ed eguagliate a zero porgono il sistema di equazioni algebrico-trigonometriche

$$\begin{cases} \sin\theta - x = 0 \\ 2x\cos\theta - \sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta = 0\,. \end{cases}$$

La seconda equazione individua i valori di equilibrio della coordinata angolare

$$\sin\theta\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$$

che risultano

$$\theta = 0\,, \quad \pi\,, \quad +\pi/3\,, \quad -\pi/3$$

mentre i corrispondenti valori dell'ascissa adimensionale s sono determinati dalla prima equazione. Le configurazioni di equilibrio del sistema sono pertanto:

$$(x,\theta) = (0,0)\,, \quad (0,\pi)\,, \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\right)\,, \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\pi}{3}\right).$$

(*b*) **Stabilità degli equilibri**

La natura degli equilibri viene analizzata calcolando le derivate parziali seconde di U:

$$U_{xx} = -2mgR \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = 2mgR\cos\theta \qquad U_{\theta\theta} = mgR(-2x\sin\theta - \cos\theta)$$

e considerando la relativa matrice hessiana

$$H_U(x,\theta) = mgR\begin{pmatrix} -2 & 2\cos\theta \\ 2\cos\theta & -2x\sin\theta - \cos\theta \end{pmatrix}$$

per ciascuna configurazione.

Configurazione $(x,\theta) = (0,0)$

In questo caso la matrice hessiana del potenziale vale

$$H_U(0,0) = mgR\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ed il suo determinante assume segno negativo

$$\det H_U(0,0) \;=\; (mgR)^2(2-4) \;=\; -2(mgR)^2 \;<\; 0$$

garantendo perciò che la matrice hessiana abbia un autovalore positivo ed uno negativo. L'instabilità della configurazione segue allora dal teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(x,\theta) = (0,\pi)$
Nella fattispecie l'hessiana del potenziale risulta

$$H_U(0,\pi) \;=\; mgR \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ancora con determinante negativo

$$\det H_U(0,\pi) \;=\; (mgR)^2(-2-4) \;=\; -6(mgR)^2 \;<\; 0\,.$$

L'hessiana ha quindi due autovalori di segno opposto, il positivo dei quali consente di concludere che la configurazione di equilibrio è instabile, sempre in virtù del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Configurazioni $(x,\theta) = (\sqrt{3}/2, \pi/3), (-\sqrt{3}/2, -\pi/3)$
Queste due configurazioni presentano le stesse proprietà di stabilità a causa dell'ovvia simmetria del potenziale

$$U(-x,-\theta) \;=\; U(x,\theta) \qquad \forall\,(x,\theta)\in\mathbb{R}^2$$

ed è perciò sufficiente esaminarne una sola, ad esempio la prima. Per la matrice hessiana si ha l'espressione

$$H_U\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\Big) \;=\; mgR \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \;=\; mgR \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

con determinante positivo e traccia negativa

$$\det H_U\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\Big) \;=\; 3(mgR)^2 \;>\; 0 \qquad\qquad \mathrm{tr} H_U\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\Big) \;=\; -4mgR\,.$$

Gli autovalori dell'hessiana sono dunque entrambi negativi ed individuano la configurazione di equilibrio come un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

(c) **Equazioni linearizzate del moto**
Si vogliono studiare le equazioni linearizzate del moto nell'intorno dell'equilibrio $(s,\theta) = (\sqrt{3}/2,\pi/3)$, che assieme alla configurazione simmetrica $(s,\theta) = (-\sqrt{3}/2,-\pi/3)$ è il solo

equilibrio stabile del sistema. A questo scopo si rende necessaria la matrice di rappresentazione dell'energia cinetica, che dalla relazione

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}\ \dot{\theta})mR^2\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

si deduce essere diagonale ed indipendente dalla configurazione

$$A(x,\theta) = mR^2\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per contro, la matrice hessiana del potenziale è già stata calcolata nello studio della stabilità

$$H_U\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\Big) = mgR\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Posto

$$\Delta x = x - \sqrt{3}/2 \qquad \Delta\theta = \theta - \pi/3$$

le equazioni del moto linearizzate nell'intorno della configurazione di equilibrio specificata si scrivono allora

$$A\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\Big)\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\theta \end{pmatrix} - H_U\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\Big)\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = 0$$

e diventano perciò

$$mR^2\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\theta \end{pmatrix} - mgR\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}mR^2\ddot{\Delta x} + mgR(2\Delta x - \Delta\theta) = 0 \\ mR^2\ddot{\Delta\theta} + mgR(-\Delta x + 2\Delta\theta) = 0\,. \end{cases}$$

(*d*) **Frequenze e modi normali delle piccole oscillazioni**
Si vogliono studiare le piccole oscillazioni nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile $(x,\theta) = (\sqrt{3}/2, \pi/3)$ prescelta. Il problema agli autovalori che caratterizza frequenze e modi normali di oscillazione diventa perciò

$$\Big[\omega^2 A\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\Big) + H_U\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\Big)\Big]\, a = 0 \qquad a\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

ossia

$$\Big[\omega^2\frac{1}{mR}A\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\Big) + \frac{1}{mR}H_U\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\Big)\Big]\, a = 0 \qquad a\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

e scritto esplicitamente si riduce a

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}R\omega^2 - 2g & g \\ g & R\omega^2 - 2g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,.$$

Soluzioni non banali in (a_1, a_2) dell'equazione lineare omogenea si hanno se e soltanto se ω soddisfa l'equazione caratteristica

$$\det \begin{pmatrix} \frac{3}{2}R\omega^2 - 2g & g \\ g & R\omega^2 - 2g \end{pmatrix} = \Big(\frac{3}{2}R\omega^2 - 2g\Big)(R\omega^2 - 2g) - g^2 = 0$$

ovvero l'equazione biquadratica

$$\frac{3}{2}\omega^4 - 5\frac{g}{R}\omega^2 + 3\frac{g^2}{R^2} = 0$$

che porge

$$\omega^2 = \frac{1}{3}\Big[5\frac{g}{R} \pm \sqrt{25\frac{g^2}{R^2} - 18\frac{g^2}{R^2}}\Big] = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}\frac{g}{R}$$

e quindi le soluzioni positive

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{7}}{3}}\sqrt{\frac{g}{R}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{7}}{3}}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

che costituiscono le pulsazioni normali di oscillazione. Le corrispondenti frequenze normali risultano perciò

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5-\sqrt{7}}{3}}\sqrt{\frac{g}{R}} \qquad \nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5+\sqrt{7}}{3}}\sqrt{\frac{g}{R}}\,.$$

Si procede alla determinazione dei due modi normali di oscillazione del sistema.

Modo normale di pulsazione $\omega = \omega_1$ — modo "basso"
Per $\omega = \omega_1$ l'equazione agli autovalori diventa

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\frac{5-\sqrt{7}}{3} - 2 & 1 \\ 1 & \frac{5-\sqrt{7}}{3} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{7}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{7}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

ed equivale al sistema di equazioni lineari omogenee compatibile

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{7}}{2}a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 - \frac{1+\sqrt{7}}{3}a_2 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione generale si scrive

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{3}\varepsilon_1 \qquad a_2 = \varepsilon_1 \quad , \qquad \forall\, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Il modo normale di oscillazione è quindi espresso da

$$\begin{pmatrix} x - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \theta - \dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \varepsilon_1 \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \ , \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

per costanti $\varepsilon_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\varphi_1 \in \mathbb{R}$ assegnate a piacere. Si noti che in questo modo normale, quello di frequenza minima, i parametri lagrangiani oscillano **in concordanza di fase** attorno ai valori di equilibrio: le ampiezze di oscillazione sono di eguale segno.

Modo normale di pulsazione $\omega = \omega_2$ — modo "alto"
Nel caso sia $\omega = \omega_2$ il problema agli autovalori assume la forma

$$0 = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}\dfrac{5+\sqrt{7}}{3} - 2 & 1 \\ 1 & \dfrac{5+\sqrt{7}}{3} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{7}}{2} & 1 \\ 1 & \dfrac{\sqrt{7}-1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + \dfrac{\sqrt{7}-1}{3}a_2 = 0 \end{cases}$$

di soluzione generale

$$a_1 = -\frac{\sqrt{7}-1}{3}\varepsilon_2 \qquad a_2 = \varepsilon_2 \quad , \qquad \forall\, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Per il relativo modo normale di oscillazione si ha perciò la formula

$$\begin{pmatrix} x - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \theta - \dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \varepsilon_2 \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{7}-1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \ , \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

dove $\varepsilon_2 \neq 0$ e φ_2 sono costanti reali arbitrarie. Il modo normale di frequenza massima si contraddistingue da quello precedente per il fatto che i parametri lagrangiani oscillano **in opposizione di fase** attorno ai rispettivi valori di equilibrio.