

**Esercizio 1**

I moti naturali di un sistema rigido con asse fisso privo di attrito sono descritti dall'equazione pura del moto:

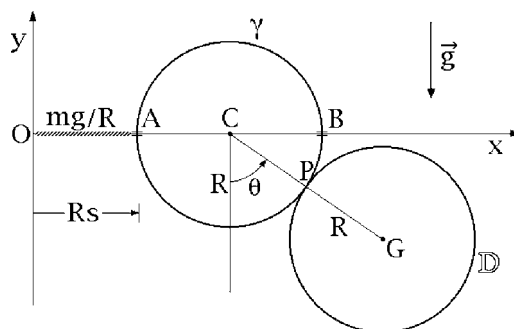
$$I\ddot{\theta} = \alpha\left(\frac{1}{2}\sin\theta - \sin\theta\cos\theta\right) - \beta\dot{\theta}$$

essendo  $\theta$  l'angolo di rotazione attorno all'asse fisso,  $I$  il momento d'inerzia del sistema rispetto allo stesso asse e  $\alpha, \beta$  due costanti positive. Determinare:

- (a) gli equilibri del sistema;
- (b) la stabilità dei predetti equilibri;
- (c) le condizioni iniziali dei moti periodici nel caso sia  $\beta = 0$ ;
- (d) il ritratto di fase del sistema per  $\beta = 0$ ;
- (e) le equazioni linearizzate del moto nell'intorno di un equilibrio stabile a scelta, verificando la stabilità mediante il teorema di analisi lineare.

## Esercizio 2

Nel piano verticale  $Oxy$  di una terna galileiana  $Oxyz$  sono vincolate a restare una circonferenza  $\gamma$  di centro  $C$  e un disco circolare  $\mathbb{D}$  di centro  $G$ , entrambi omogenei, di raggio  $R$  e massa  $m$ . Un diametro  $AB$  di  $\gamma$  è costretto a scorrere lungo l'asse orizzontale  $Ox$ , mentre  $\mathbb{D}$  rotola senza strisciare su  $\gamma$ . Il sistema è pesante e una molla di costante elastica  $mg/R$  collega  $A$  con l'origine  $O$  — vedi figura.



Assunti i vincoli ideali ed introdotti i parametri adimensionali  $s$  e  $\theta$  illustrati in figura come coordinate lagrangiane, determinare del sistema:

- l'espressione dell'energia cinetica relativa a  $Oxyz$ ;
- gli equilibri relativi a  $Oxyz$  e le loro proprietà di stabilità;
- la reazione vincolare applicata a  $\mathbb{D}$  nel punto  $P$  di contatto fra  $\mathbb{D}$  e  $\gamma$ , nonché le reazioni vincolari  $\vec{\Phi}_A = \Phi_A \hat{e}_2$ ,  $\vec{\Phi}_B = \Phi_B \hat{e}_2$  e  $\vec{\Phi}_P$  applicate a  $\gamma$  rispettivamente in  $A$ ,  $B$  e  $P$ , per uno stato di quiete a scelta;
- l'equazione delle piccole oscillazioni nell'intorno di un equilibrio stabile a scelta, con le relative frequenze normali e l'espressione dei modi normali di oscillazione;
- gli equilibri e le relative proprietà di stabilità in presenza di due ulteriori sollecitazioni  $\vec{F}_C = -\beta \dot{C}$ , agente su  $C$ , e  $\vec{F}_G = -\beta \dot{G}$ , agente su  $G$ , con  $\beta$  costante positiva.

## Soluzione dell'esercizio 1

### (a) Configurazioni di equilibrio

Il sistema è scleronomo a vincoli bilaterali e le sue configurazioni di equilibrio sono perciò individuate dalle soluzioni statiche  $\theta(t) = \theta_0$  delle equazioni del moto:

$$0 = \alpha \left( \frac{1}{2} \sin \theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0 \right)$$

ossia dell'equazione trigonometrica

$$0 = \sin \theta_0 \left( \frac{1}{2} - \cos \theta_0 \right).$$

Le configurazioni di equilibrio — tutte ordinarie — sono dunque:

$$\theta = 0, \quad \pi, \quad +\pi/3, \quad -\pi/3$$

modulo multipli interi arbitrari di  $2\pi$ .

### (b) Stabilità degli equilibri

Le sollecitazioni applicate al sistema sono in parte posizionali e in parte dissipative. Poiché il sistema è unidimensionale la sollecitazione posizionale

$$\alpha \left( \frac{1}{2} \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \right)$$

è conservativa ed ammette il potenziale

$$U(\theta) = \alpha \left( -\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right);$$

la sollecitazione residua  $D_\theta = -\beta \dot{\theta}$  ha potenza non positiva

$$\pi = D_\theta \dot{\theta} = -\beta \dot{\theta}^2 \leq 0$$

che si annulla unicamente per velocità generalizzata nulla

$$\pi = -\beta \dot{\theta}^2 = 0 \quad \iff \quad \dot{\theta} = 0$$

e caratterizza la sollecitazione come completamente dissipativa. Le configurazioni di equilibrio sono inoltre isolate, in quanto in numero finito nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ . L'analisi di stabilità degli equilibri può quindi essere condotta facendo uso dei criteri di Barbasin-Krasovskii, che permettono di riconoscere i massimi relativi propri del potenziale come configurazioni di equilibrio asintoticamente stabili e tutti gli altri punti critici come instabili. Basta calcolare la derivata seconda del potenziale

$$U''(\theta) = \alpha \left( \frac{1}{2} \cos \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right)$$

in ciascuna configurazione di equilibrio.

*Configurazione  $\theta = 0$*

La derivata seconda del potenziale è di segno negativo

$$U''(0) = \alpha \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{\alpha}{2} < 0$$

ed individua la configurazione come massimo relativo proprio del potenziale. La stabilità asintotica dell'equilibrio segue dal teorema di Barbasin-Krasovskii.

*Configurazione  $\theta = \pi$*

Anche in questo caso la derivata seconda del potenziale assume segno negativo

$$U''(\pi) = \alpha \left( -\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{3}{2}\alpha < 0$$

in modo che per Barbasin-Krasovskii la configurazione di equilibrio risulta asintoticamente stabile, in quanto massimo relativo proprio del potenziale.

*Configurazioni  $\theta = \pi/3, -\pi/3$*

Per queste configurazioni il segno positivo della derivata seconda

$$U''(\pm\pi/3) = \alpha \left( \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4}\alpha > 0$$

esclude il ricorrere di un massimo del potenziale, sicché il teorema di Barbasin-Krasovskii prova l'instabilità dei corrispondenti equilibri.

**(c) Moti periodici per  $\beta = 0$**

Per  $\beta = 0$  le sollecitazioni dissipative vengono rimosse ed il sistema risulta posizionale conservativo e ad un solo grado di libertà, con energia potenziale

$$W(\theta) = -U(\theta) = \alpha \left( \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

L'integrale primo dell'energia meccanica è definito dall'espressione

$$H(\theta, \dot{\theta}) = T + W = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{2} (\cos \theta + \sin^2 \theta)$$

e consente di analizzare l'andamento qualitativo di tutti i moti mediante la discussione di Weierstrass, nonché di tracciare il ritratto di fase del sistema. A questo scopo, i punti critici dell'energia potenziale sono già stati calcolati al punto (a):

$$\theta = 0, \quad \pi, \quad \pi/3, \quad -\pi/3$$

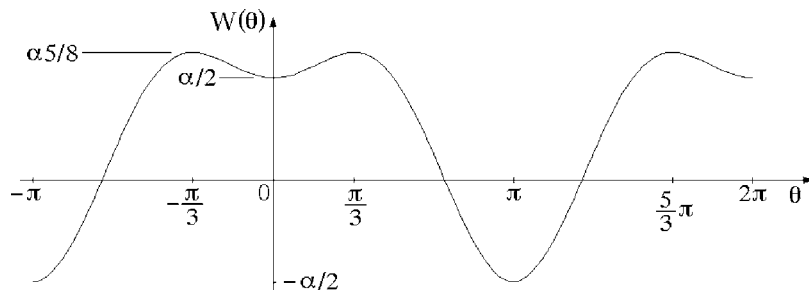
e in corrispondenza di essi l'energia potenziale assume i valori:

$$W(0) = \frac{\alpha}{2} \quad W(\pi) = -\frac{\alpha}{2} \quad W\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{8}\alpha \quad W\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{8}\alpha.$$

Il segno delle derivate seconde permette altresì di riconoscere che:

- $\theta = 0$  costituisce un minimo relativo proprio di  $W$ ;
- $\theta = \pi$  rappresenta anch'esso un minimo relativo proprio dell'energia potenziale;
- $\theta = \pi/3, -\pi/3$  sono massimi relativi propri di  $W$ .

La funzione energia potenziale ha perciò il grafico illustrato nella figura seguente



che costituisce la base per l'analisi di Weierstrass e per la costruzione del relativo ritratto di fase del sistema. In base ai criteri di Weierstrass, per un dato valore  $E$  dell'energia meccanica i moti periodici ricorrono in ogni intervallo di  $\theta$  nel cui interno la funzione di Weierstrass

$$\Phi(\theta) = \frac{2}{I}[E - W(\theta)] = \frac{2}{I}\left[E - \frac{\alpha}{2}(\cos \theta + \sin^2 \theta)\right]$$

risulta strettamente positiva, presentando zeri semplici agli estremi. Dall'esame del grafico di  $W$  è allora evidente che i moti periodici del sistema si hanno per tutte e sole le condizioni iniziali  $(\theta, \dot{\theta})$  ricomprese nell'insieme

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\alpha}{2} < \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{2}(\cos \theta + \sin^2 \theta) < \frac{5}{8}\alpha, 2\pi n + \frac{\pi}{3} < \theta < 2\pi n + \frac{5}{3}\pi \right\}$$

ed in

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\alpha}{2} < \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{2}(\cos \theta + \sin^2 \theta) < \frac{5}{8}\alpha, 2\pi n - \frac{\pi}{3} < \theta < 2\pi n + \frac{\pi}{3} \right\}.$$

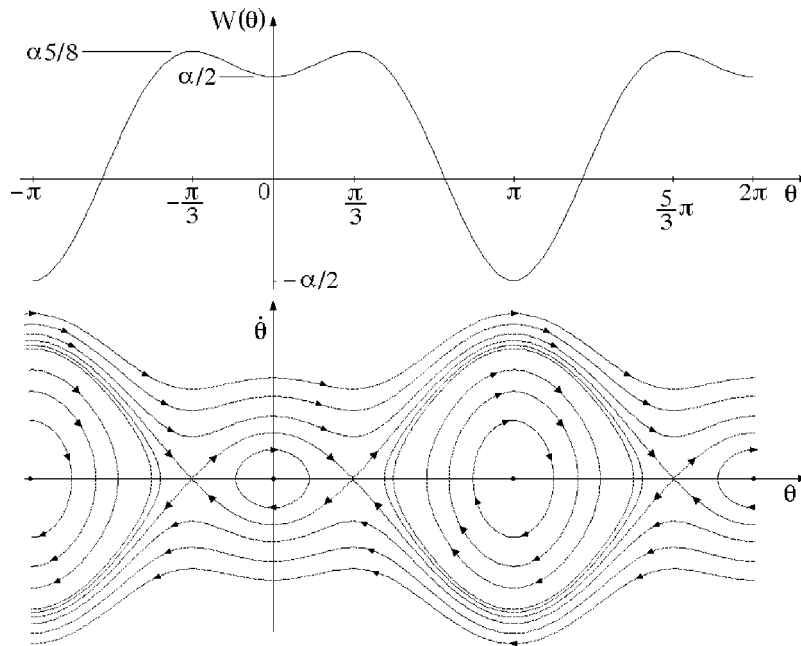
**(d) Ritratto di fase per  $\beta = 0$**

Noto il grafico della funzione energia potenziale  $W$ , il ritratto di fase del sistema può essere determinato tracciando le orbite delle soluzioni corrispondenti ad alcuni livelli notevoli dell'energia meccanica, quelli relativi ai punti critici ed alcuni valori intermedi scelti a piacere. Precisamente:

- per  $E = -\alpha/2$  si ottiene la soluzione statica di orbita  $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$ , definita a meno di multipli interi di  $2\pi$  in  $\theta$ ;
- se  $E \in (-\alpha/2, \alpha/2)$  si specificano orbite periodiche ubicate nella striscia  $\pi/3 < \theta < 5\pi/3$  del piano delle fasi — sempre modulo  $2\pi$  in  $\theta$ ;

- per  $E = \alpha/2$  si perviene ad un'orbita periodica del tipo precedente, collocata nella stessa striscia, e la soluzione statica  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  — modulo  $2\pi$  in  $\theta$ ;
- qualora sia  $E \in (\alpha/2, 5\alpha/8)$ , accanto ad un'orbita del tipo precedente nella stessa striscia, si assiste allo stabilirsi di una ulteriore orbita periodica nella striscia  $-\pi/3 < \theta < \pi/3$ ;
- se infine  $E > 5\alpha/8$ , si individua un'unica orbita corrispondente ad un moto indefinitamente progressivo se  $\dot{\theta} > 0$  all'istante iniziale, ovvero ad un moto indefinitamente retrogrado per  $\dot{\theta} < 0$ .

Il ritratto di fase ha allora l'aspetto descritto nella figura seguente:



### (e) Equazioni linearizzate

La linearizzazione delle equazioni del moto

$$I\ddot{\theta} = \alpha\left(\frac{1}{2} - \cos\theta\right) \sin\theta - \beta\dot{\theta}$$

nell'intorno della posizione di equilibrio stabile  $\theta = 0$  porge

$$I\ddot{\theta} = \alpha\left(\frac{1}{2} - 1\right)\theta - \beta\dot{\theta}$$

e conduce all'equazione lineare omogenea

$$I\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \frac{\alpha}{2}\theta = 0.$$

La corrispondente equazione caratteristica si scrive

$$I\lambda^2 + \beta\lambda + \frac{\alpha}{2} = 0$$

e da essa si calcolano gli autovalori

$$\lambda = \frac{1}{2I}(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 2\alpha I})$$

che per qualsiasi segno del discriminante hanno comunque parte reale negativa. Sono questi stessi anche gli autovalori del sistema linearizzato del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ I\dot{v} = -\frac{\alpha}{2}\theta - \beta v \end{cases}$$

che si riduce alla forma normale

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha/2I & -\beta/I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix}.$$

Dal teorema di analisi lineare della stabilità si conclude che la soluzione statica  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  è asintoticamente stabile, come già stabilito in precedenza per mezzo dei criteri di Barbasin-Krasowskii — punto (b).

## Soluzione dell'esercizio 2

### (a) Energia cinetica

L'energia cinetica del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche della circonferenza  $\gamma$  e del disco circolare  $\mathbb{D}$

$$T = T_\gamma + T_{\mathbb{D}}.$$

Poiché il diametro  $AB$  è vincolato a scorrere lungo l'asse  $Ox$ , il moto della circonferenza  $\gamma$  risulta traslatorio rettilineo con velocità  $R\dot{s}\hat{e}_1$ . L'energia cinetica di  $\gamma$  si scrive perciò

$$T_\gamma = \frac{m}{2}|R\dot{s}\hat{e}_1|^2 = \frac{mR^2}{2}\dot{s}^2.$$

Il disco omogeneo  $\mathbb{D}$  è privo di punti fissi e la sua energia cinetica può essere determinata convenientemente per mezzo del teorema di König. Per simmetria il centro  $G$  coincide con il baricentro e il teorema di König assume la forma

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{m}{2}\dot{G}^2 + \frac{1}{2}I_{Gz}^{\mathbb{D}}|\vec{\omega}_{\mathbb{D}}|^2$$

dove il vettore posizione del baricentro è dato da

$$G - O = C - O + G - C = R(s+1)\hat{e}_1 + 2R\sin\theta\hat{e}_1 - 2R\cos\theta\hat{e}_2$$

con velocità istantanea

$$\dot{G} = R(\dot{s} + 2 \cos \theta \dot{\theta}) \hat{e}_1 + 2R \sin \theta \dot{\theta} \hat{e}_2$$

di modulo quadrato

$$\dot{G}^2 = R^2(\dot{s}^2 + 4 \cos \theta \dot{s} \dot{\theta} + 4\dot{\theta}^2).$$

Il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse  $Gz$  vale

$$I_{Gz}^{\mathbb{D}} = \frac{mR^2}{2}$$

e la velocità angolare istantanea è quella di puro rotolamento di un disco circolare di raggio  $r$  lungo il bordo esterno di una circonferenza fissa di raggio  $R$ , a condizione di porre  $r = R$

$$\vec{\omega}_{\mathbb{D}} = \frac{R+r}{r} \dot{\theta} \hat{e}_3 \Big|_{r=R} = 2\dot{\theta} \hat{e}_3.$$

Pertanto:

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{mR^2}{2}(\dot{s}^2 + 4 \cos \theta \dot{s} \dot{\theta} + 4\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} 4\dot{\theta}^2 = \frac{mR^2}{2}(\dot{s}^2 + 4 \cos \theta \dot{s} \dot{\theta} + 6\dot{\theta}^2)$$

ed infine

$$T = \frac{mR^2}{2} \dot{s}^2 + \frac{mR^2}{2}(\dot{s}^2 + 4 \cos \theta \dot{s} \dot{\theta} + 6\dot{\theta}^2) = \frac{mR^2}{2}(2\dot{s}^2 + 4 \cos \theta \dot{s} \dot{\theta} + 6\dot{\theta}^2).$$

### (b) Equilibri e analisi di stabilità degli stessi

Il sistema scleronomo è a vincoli bilaterali e sottoposto esclusivamente a sollecitazioni posizionali conservative, il peso e l'interazione elastica fra il punto  $A$  e l'origine  $O$ . Le sollecitazioni attive sono dunque descritte per mezzo di un appropriato potenziale  $U$ , i cui punti critici individuano tutte le configurazioni di equilibrio del sistema. Le proprietà di stabilità di questi possono poi essere analizzate facendo ricorso ai teoremi standard di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale.

#### *Potenziale elastico*

All'interazione elastica fra  $O$  ed  $A$  è associato il potenziale

$$U_{\text{el}} = -\frac{1}{2} \frac{mg}{R} (A - O)^2 = -\frac{1}{2} \frac{mg}{R} R^2 s^2 = -\frac{1}{2} mgRs^2.$$

#### *Potenziale gravitazionale*

Il potenziale gravitazionale è la somma dei potenziali gravitazionali di circonferenza e disco:

$$U_{\text{g}} = -mg(C - O) \cdot \hat{e}_2 - mg(G - O) \cdot \hat{e}_2 = 0 - mg(-2R \cos \theta) = 2mgR \cos \theta.$$

### Potenziale del sistema

Il potenziale del sistema è costituito dalla somma dei potenziali elastico e gravitazionale. Risulta perciò:

$$U(s, \theta) = U_{\text{el}} + U_{\text{g}} = -\frac{1}{2}mgRs^2 + 2mgR \cos \theta \quad (s, \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

### Equilibri

Le derivate parziali prime del potenziale  $U$  si scrivono

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -mgRs \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -2mgR \sin \theta$$

e gli equilibri si ricavano ponendo a zero entrambe, ovvero risolvendo il sistema di equazioni disaccoppiate

$$\begin{cases} -mgRs = 0 \\ -2mgR \sin \theta = 0 \end{cases}$$

la prima delle quali porge  $s = 0$ , mentre dalla seconda si deduce  $\theta = 0, \pi$ . Le configurazioni di equilibrio sono perciò

$$(s, \theta) = (0, 0), \quad (0, \pi).$$

### Stabilità degli equilibri

Le proprietà di stabilità degli equilibri vengono analizzate con i teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo si calcolano le derivate parziali seconde del potenziale  $U$ :

$$U_{ss} = -mgR \quad U_{s\theta} = U_{\theta s} = 0 \quad U_{\theta\theta} = -2mgR \cos \theta$$

e la corrispondente matrice hessiana

$$H_U(s, \theta) = \begin{pmatrix} -mgR & 0 \\ 0 & -2mgR \cos \theta \end{pmatrix}$$

in ciascuna delle configurazioni di equilibrio precedentemente determinate.

#### Configurazione $(s, \theta) = (0, 0)$

La matrice hessiana del potenziale è in questo caso

$$H_U(0, 0) = \begin{pmatrix} -mgR & 0 \\ 0 & -2mgR \end{pmatrix}$$

e risulta chiaramente definita negativa. Ciò individua la configurazione di equilibrio come un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

#### Configurazione $(s, \theta) = (0, \pi)$

Nella fattispecie la matrice hessiana del potenziale vale

$$H_U(0,0) = \begin{pmatrix} -mgR & 0 \\ 0 & 2mgR \end{pmatrix}$$

con autovalori di segno opposto. La presenza di un autovalore positivo porta a concludere che la configurazione di equilibrio è instabile, in virtù del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

**(c) Reazioni vincolari in uno stato di quiete**

Per il calcolo delle reazioni vincolari si considera la quiete nella configurazione di equilibrio  $(s, \theta) = (0, 0)$ . In virtù del principio di azione e reazione è evidente che la reazione vincolare  $\vec{\Phi}_P$  esercitata dal disco sulla circonferenza  $\gamma$  in  $P$  è opposta alla reazione vincolare che  $\gamma$  applica al disco  $\mathbb{D}$  nella stessa posizione  $P$ , e che dunque verrà indicata con  $-\vec{\Phi}_P$ . La prima equazione cardinale della statica per il disco  $\mathbb{D}$  si scrive allora

$$0 = -mg \hat{e}_2 - \vec{\Phi}_P$$

e fornisce la reazione vincolare applicata al disco in  $P$

$$-\vec{\Phi}_P = mg \hat{e}_2.$$

Oltre a  $\vec{\Phi}_P = -mg \hat{e}_2$  in  $P$ , le reazioni vincolari agenti sulla circonferenza  $\gamma$  sono  $\vec{\Phi}_A = \Phi_A \hat{e}_2$  in  $A$  e  $\vec{\Phi}_B = \Phi_B \hat{e}_2$  in  $B$ . La prima equazione cardinale della statica per  $\gamma$  è data da

$$\Phi_A \hat{e}_2 + \Phi_B \hat{e}_2 + \vec{\Phi}_P - mg \hat{e}_2 = 0$$

e porge la relazione

$$\Phi_A + \Phi_B = mg - \vec{\Phi}_P \cdot \hat{e}_2 = mg + mg = 2mg;$$

dalla seconda equazione cardinale della statica, applicata con polo  $C$ , si ha invece

$$(C - C) \wedge (-mg \hat{e}_2) + (P - C) \wedge \vec{\Phi}_P + (A - C) \wedge \Phi_A \hat{e}_2 + (B - C) \wedge \Phi_B \hat{e}_2 = 0$$

ossia

$$-R \hat{e}_2 \wedge (-mg \hat{e}_2) + (-R \hat{e}_1) \wedge \Phi_A \hat{e}_2 + R \hat{e}_1 \wedge \Phi_B \hat{e}_2 = 0$$

in modo che risulta

$$(-R\Phi_A + R\Phi_B) \hat{e}_3 = 0$$

e quindi  $\Phi_A = \Phi_B$ . Le due equazioni cardinali statiche conducono così alle espressioni

$$\Phi_A = \Phi_B = mg$$

per cui le reazioni vincolari applicate a  $\gamma$  risultano

$$\vec{\Phi}_A = mg \hat{e}_2 \quad \vec{\Phi}_B = mg \hat{e}_2 \quad \vec{\Phi}_P = -mg \hat{e}_2.$$

(d) **Piccole oscillazioni**

Per lo studio delle piccole oscillazioni è necessario determinare la matrice dell'energia cinetica nella configurazione assegnata. L'energia cinetica si scrive nella forma

$$T = \frac{1}{2}(\dot{s} \ \dot{\theta})mR^2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \cos \theta \\ 2 \cos \theta & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

che permette di ricavare la matrice dell'energia cinetica nella generica configurazione  $(s, \theta)$

$$A(s, \theta) = mR^2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \cos \theta \\ 2 \cos \theta & 6 \end{pmatrix} = 2mR^2 \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 3 \end{pmatrix}.$$

Nella stessa configurazione la matrice hessiana del potenziale è già stata calcolata al punto (b):

$$H_U(s, \theta) = \begin{pmatrix} -kR^2 & 0 \\ 0 & -2mgR \cos \theta \end{pmatrix} = mgR \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Per la configurazione di equilibrio stabile  $(s, \theta) = (0, 0)$  si ha

$$A(0, 0) = 2mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad H_U(0, 0) = mgR \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e l'equazione delle pulsazioni normali di oscillazione diventa

$$\det[\omega^2 A(0, 0) + H_U(0, 0)] = 0$$

ossia, scritta esplicitamente,

$$\det \left[ 2mR^2 \omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + mgR \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Il determinante a primo membro si esprime nella forma

$$\det \begin{pmatrix} 2R\omega^2 - g & 2R\omega^2 \\ 2R\omega^2 & 6R\omega^2 - 2g \end{pmatrix} = (2R\omega^2 - g)(6R\omega^2 - 2g) - 4R^2\omega^4$$

per cui l'equazione delle pulsazioni normali si riduce a

$$4\omega^4 - 5\frac{g}{R}\omega^2 + \frac{g^2}{R^2} = 0$$

ed ha le soluzioni

$$\omega^2 = \frac{1}{8} \left[ 5\frac{g}{R} \pm \sqrt{25\frac{g^2}{R^2} - 16\frac{g^2}{R^2}} \right] = \frac{1}{8}(5 \pm 3)\frac{g}{R} = \begin{cases} \nearrow g/R \\ \searrow g/4R \end{cases}$$

cui corrispondono le pulsazioni normali di oscillazione

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{R}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

e le frequenze normali

$$\nu_1 = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{R}} \quad \nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Non rimane che calcolare i modi normali di oscillazione.

*Modo normale di oscillazione per  $\omega = \omega_1$  — modo “basso”*

L'equazione che caratterizza il modo normale di oscillazione di pulsazione  $\omega_1$  è

$$\left[ \frac{1}{2}mgR \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + mgR \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

ed equivale al sistema di equazioni lineari omogenee

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 = 0 \\ \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione generale —  $a_1 = a_2$  — può scriversi nella forma

$$\begin{cases} a_1 = \varepsilon_1 \\ a_2 = \varepsilon_1 \end{cases} \quad \forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}.$$

Il modo normale di oscillazione ha perciò equazione

$$\begin{pmatrix} s \\ \theta \end{pmatrix} = \varepsilon_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}t + \phi_1\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\forall \varepsilon_1 \neq 0, \phi_1 \in \mathbb{R}$  costanti assegnate.

*Modo normale di oscillazione per  $\omega = \omega_2$  — modo “alto”*

Il modo normale di oscillazione è individuato dall'equazione caratteristica

$$\left[ 2mgR \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + mgR \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero dal sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases}$$

di soluzione generale

$$\begin{cases} a_1 = -2\varepsilon_2 \\ a_2 = \varepsilon_2 \end{cases} \quad \forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}.$$

Il modo normale di oscillazione è perciò descritto da

$$\begin{pmatrix} s \\ \theta \end{pmatrix} = \varepsilon_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t + \phi_2\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\forall \varepsilon_2 \neq 0, \phi_2 \in \mathbb{R}$  costanti arbitrarie.

(e) **Equilibri e stabilità in presenza di sollecitazioni addizionali**

I punti di applicazione delle sollecitazioni addizionali  $-\beta\dot{C}$  e  $-\beta\dot{G}$  sono individuati da

$$\begin{aligned} C - O &= R(s+1)\hat{e}_1 \\ G - O &= C - O + G - C = R(s+1)\hat{e}_1 + 2R\sin\theta\hat{e}_1 - 2R\cos\theta\hat{e}_2 \end{aligned}$$

e le corrispondenti componenti generalizzate sono determinabili per mezzo delle relazioni

$$\begin{aligned} Q_s &= -\beta\dot{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial s} - \beta\dot{G} \cdot \frac{\partial G}{\partial s} \\ Q_\theta &= -\beta\dot{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta} - \beta\dot{G} \cdot \frac{\partial G}{\partial \theta} . \end{aligned}$$

Si tratta di una sollecitazione di potenza non positiva

$$\begin{aligned} \pi &= Q_s\dot{s} + Q_\theta\dot{\theta} = -\beta\dot{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial s}\dot{s} - \beta\dot{G} \cdot \frac{\partial G}{\partial s}\dot{s} - \beta\dot{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta}\dot{\theta} - \beta\dot{G} \cdot \frac{\partial G}{\partial \theta}\dot{\theta} = \\ &= -\beta\dot{C} \cdot \dot{C} - \beta\dot{G} \cdot \dot{G} = -\beta(\dot{C}^2 + \dot{G}^2) \leq 0 \end{aligned}$$

e dunque di carattere dissipativo. Si osserva inoltre che un valore nullo della potenza implica l'annullarsi delle velocità istantanee dei punti  $G$  e  $C$ :

$$\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{C} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{G} = 0 ,$$

in modo che risulta

$$\begin{cases} R\dot{s}\hat{e}_1 = 0 \\ (R\dot{s} + 2R\cos\theta\dot{\theta})\hat{e}_1 + 2R\sin\theta\dot{\theta}\hat{e}_2 = 0 . \end{cases}$$

Dalla prima equazione segue che  $\dot{s} = 0$ , per cui la seconda diventa

$$2R(\cos\theta\hat{e}_1 + \sin\theta\hat{e}_2)\dot{\theta} = 0$$

e siccome  $\cos\theta\hat{e}_1 + \sin\theta\hat{e}_2 \neq 0 \forall \theta \in \mathbb{R}$  si conclude che anche  $\dot{\theta} = 0$ . Pertanto la potenza delle sollecitazioni addizionali si annulla soltanto per valori nulli delle velocità generalizzate

$$\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad (\dot{s}, \dot{\theta}) = (0, 0)$$

sicché la sollecitazione  $(Q_s, Q_\theta)$  è completamente dissipativa. Queste sollecitazioni non alterano gli equilibri già determinati considerando le sole sollecitazioni posizionali conservative, dal momento che le sollecitazioni dissipative si annullano all'annullarsi delle velocità generalizzate. Dai criteri di Barbasin-Krasovskii, certamente applicabili dato che gli equilibri sono in numero finito e dunque isolati, si conclude infine che

- $(s, \theta) = (0, 0)$  è asintoticamente stabile perché massimo relativo proprio del potenziale;
- $(s, \theta) = (0, \pi)$  è instabile, in quanto punto di sella — il che esclude il ricorrere, nella posizione considerata, di un massimo relativo proprio del potenziale.