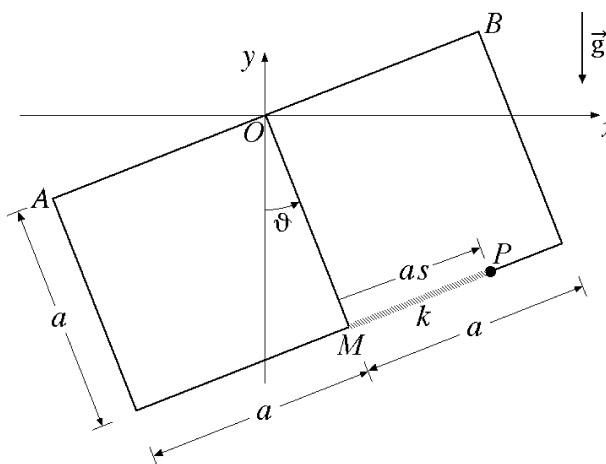


Esercizio 1

Nel piano Oxy di una terna $Oxyz$ un telaio rettangolare omogeneo di massa m e lati a e $2a$ ruota attorno al punto medio O del lato maggiore AB . Una molla ideale di costante elastica $k = mg/\sqrt{3}a$ collega il punto medio M del lato opposto ad un punto P , di massa m , libero di scorrere senza attrito lungo lo stesso lato (vedi figura). Oltre al peso, sono presenti reazioni vincolari in O , sul telaio, e in P , fra telaio e punto materiale.



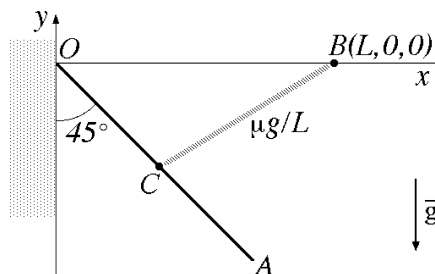
Usando le coordinate generalizzate $(s, \vartheta) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}$ in figura, determinare:

- (a) le equazioni cardinali statiche necessarie e sufficienti per l'equilibrio;
- (b) gli equilibri ordinari del sistema;
- (c) le reazioni vincolari in O e P per tutti gli stati di quiete nelle configurazioni ordinarie.

Esercizio 2

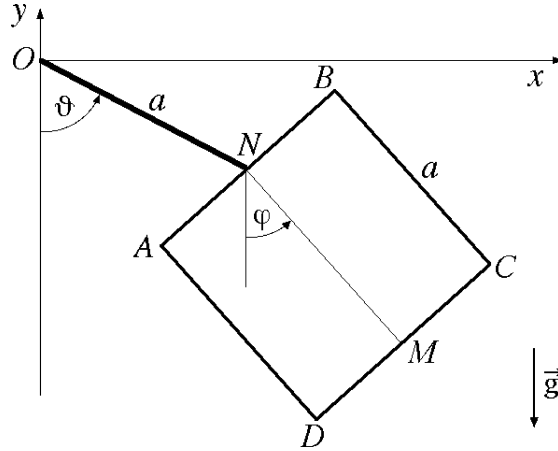
Una trave rettilinea OA , sottile, pesante e di lunghezza L , ha l'estremo O incastrato nell'origine di una terna cartesiana $Oxyz$ e l'estremo A libero. Posta nel piano Oxy , forma un angolo di 45° con il semiasse verticale negativo Oy . La sua densità si scrive $\lambda(P) = \mu|P - O|/L^2$, essendo μ una massa costante. Una molla ideale di costante elastica $\mu g/L$ collega il punto medio C di OA con il punto $B(L, 0, 0)$. Determinare, in funzione della variabile $s = |P - O|$:

- (a) gli sforzi lungo la trave;
- (b) i momenti lungo la trave;
- (c) lo sforzo normale e il momento torcente lungo la trave.



Esercizio 3

Nel piano Oxy di una terna $Oxyz$ un'asta rettilinea omogenea ON , di massa m e lunghezza a , si muove con punto fisso O . L'estremo N è incernierato al punto medio del lato AB di una piastra quadrata omogenea $ABCD$, di massa m e lato a , anch'essa vincolata al piano Oxy . Il sistema è pesante e nel punto N agisce una resistenza viscosa di costante β . Sulla piastra è infine applicato un sistema di forze con risultante $\vec{R} = -\beta a(\cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2)\dot{\varphi}$ e momento risultante $\vec{M}_N = \beta a^2[-2\dot{\varphi} + \cos(\vartheta + \varphi)\dot{\vartheta}]\hat{e}_3$ in N .



Assunti i vincoli ideali, si usino le coordinate generalizzate $\vartheta, \varphi \in \mathbb{R}$ in figura per determinare:

- le componenti lagrangiane delle sollecitazioni attive;
- gli equilibri del sistema e le loro proprietà di stabilità;
- le equazioni pure del moto del sistema.

Esercizio 4

Un sistema scleronomo a vincoli ideali posizionale e conservativo è descritto dalle coordinate generalizzate $(\xi, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$ e governato dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ma^2 \left[\dot{\xi}^2 + \left(\frac{3}{4} + 2\sin^2\vartheta \right) \dot{\vartheta}^2 \right] + ka^2 \left(-\frac{\xi^2}{2} + \xi \sin \vartheta - 2\cos^2\vartheta + 6\cos\vartheta \right),$$

dove m , a e k sono rispettivamente una massa, una lunghezza ed una costante elastica caratteristiche. Determinare:

- le equazioni delle piccole oscillazioni intorno alla configurazione $(\xi, \vartheta) = (0, 0)$, dopo aver verificato che questa è un equilibrio stabile;
- le relative frequenze normali;
- l'espressione dei modi normali delle piccole oscillazioni, nonché quella delle coordinate normali in funzione di ξ e ϑ .

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Equazioni cardinali statiche

Condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione del sistema sia di equilibrio è che in quella configurazione siano soddisfatte le equazioni cardinali statiche per il telaio e per il punto materiale P .

Forze agenti sul telaio

Il telaio è soggetto alle forze attive e reattive di seguito elencate:

- il sistema delle forze peso che equivale al peso totale $m\vec{g} = -mg\hat{e}_2$ applicato nel baricentro C del telaio, il punto medio del segmento OM ;
- una forza elastica $k(P - M)$ applicata nel punto M ed esprimibile esplicitamente nella forma:

$$k(P - M) = kas \cos \vartheta \hat{e}_1 + kas \sin \vartheta \hat{e}_2;$$

- una reazione vincolare $\vec{\Phi}_O$ agente in O . Nessuna restrizione è posta sulla forma della reazione, ma visto che tutte le forze attive agiscono nel piano Oxy è lecito assumerne nulla la componente lungo \hat{e}_3 :

$$\vec{\Phi}_O = \Phi_{Ox} \hat{e}_1 + \Phi_{Oy} \hat{e}_2,$$

con componenti reali Φ_{Ox} e Φ_{Oy} arbitrarie;

- una reazione vincolare $-\vec{\Phi}_P$ applicata sul telaio in P e dovuta all'interazione (interna al sistema) fra il telaio e P . Anche per questa reazione si può assumere nulla la componente lungo \hat{e}_3 . Vigge tuttavia l'ulteriore condizione dell'assenza di attrito, che impone l'ortogonalità di $-\vec{\Phi}_P$ rispetto al lato del telaio lungo il quale scorre P . Si ha così l'espressione generale

$$-\vec{\Phi}_P = -\Phi_P(-\sin \vartheta \hat{e}_1 + \cos \vartheta \hat{e}_2) = \Phi_P \sin \vartheta \hat{e}_1 - \Phi_P \cos \vartheta \hat{e}_2,$$

dove $-\sin \vartheta \hat{e}_1 + \cos \vartheta \hat{e}_2 = (O - M)/|O - M|$ e Φ_P può assumere qualsiasi valore reale.

Prima equazione cardinale statica per il telaio

La prima equazione cardinale della statica richiede che sia nulla la somma di tutte le forze, attive e di reazione vincolare, agenti sul telaio:

$$-mg\hat{e}_2 + kas \cos \vartheta \hat{e}_1 + kas \sin \vartheta \hat{e}_2 + \Phi_{Ox} \hat{e}_1 + \Phi_{Oy} \hat{e}_2 + \Phi_P \sin \vartheta \hat{e}_1 - \Phi_P \cos \vartheta \hat{e}_2 = 0$$

e porge pertanto le due equazioni scalari indipendenti:

$$\begin{cases} kas \cos \vartheta + \Phi_{Ox} + \Phi_P \sin \vartheta = 0 \\ -mg + kas \sin \vartheta + \Phi_{Oy} - \Phi_P \cos \vartheta = 0. \end{cases} \quad (.1)$$

Seconda equazione cardinale statica per il telaio

Conviene determinare la seconda equazione cardinale statica per il telaio rispetto al punto O , in modo da eliminare il contributo della reazione $\vec{\Phi}_O$ e le relative *due* componenti incognite:

$$(O - O) \wedge \vec{\Phi}_O + (C - O) \wedge (-mg \hat{e}_2) + (M - O) \wedge k(P - M) + (P - O) \wedge (-\vec{\Phi}_P) = 0.$$

I vettori posizione dei punti di applicazione sono:

$$\begin{aligned} C - O &= \frac{a}{2}(\sin \vartheta \hat{e}_1 - \cos \vartheta \hat{e}_2) \\ M - O &= a(\sin \vartheta \hat{e}_1 - \cos \vartheta \hat{e}_2) \\ P - O &= M - O + P - M = a \sin \vartheta \hat{e}_1 - a \cos \vartheta \hat{e}_2 + as \cos \vartheta \hat{e}_1 + as \sin \vartheta \hat{e}_2 = \\ &= a(\sin \vartheta + s \cos \vartheta) \hat{e}_1 + a(-\cos \vartheta + s \sin \vartheta) \hat{e}_2 \end{aligned}$$

e sostituendo le espressioni esplicite dei vettori posizione e delle forze nell'equazione cardinale si ottiene

$$\begin{aligned} &\frac{a}{2}(\sin \vartheta \hat{e}_1 - \cos \vartheta \hat{e}_2) \wedge (-mg \hat{e}_2) + a(\sin \vartheta \hat{e}_1 - \cos \vartheta \hat{e}_2) \wedge kas(\cos \vartheta \hat{e}_1 + \sin \vartheta \hat{e}_2) + \\ &+ a[(\sin \vartheta + s \cos \vartheta) \hat{e}_1 + (-\cos \vartheta + s \sin \vartheta) \hat{e}_2] \wedge \Phi_P(\sin \vartheta \hat{e}_1 - \cos \vartheta \hat{e}_2) = 0. \end{aligned}$$

Il calcolo dei prodotti vettoriali conduce allora a

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}mga \sin \vartheta \hat{e}_3 + ka^2s(\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) \hat{e}_3 + \\ &+ a\Phi_P[(\sin \vartheta + s \cos \vartheta)(-\cos \vartheta) - (-\cos \vartheta + s \sin \vartheta) \sin \vartheta] \hat{e}_3 = 0 \end{aligned}$$

e quindi all'unica equazione scalare

$$-\frac{1}{2}mga \sin \vartheta + ka^2s - a\Phi_Ps = 0$$

nella quale è senz'altro utile semplificare il comune fattore a :

$$-\frac{1}{2}mg \sin \vartheta + kas - \Phi_Ps = 0. \quad (.2)$$

Forze agenti sul punto materiale P

Il punto P è soggetto:

- alla forza peso $-mg \hat{e}_2$;
- alla forza elastica $k(M - P)$, ossia

$$k(M - P) = -kas \cos \vartheta \hat{e}_1 - kas \sin \vartheta \hat{e}_2;$$

- alla reazione vincolare $\vec{\Phi}_P$, dovuta all'azione del telaio sul punto materiale (e quindi opposta alla reazione $-\vec{\Phi}_P$ considerata in precedenza, conformemente al principio di azione e reazione):

$$\vec{\Phi}_P = -\Phi_P \sin \vartheta \hat{e}_1 + \Phi_P \cos \vartheta \hat{e}_2 .$$

Prima equazione cardinale della statica per il punto P

La prima equazione cardinale della statica per il punto P prescrive semplicemente che sia nulla la somma delle forze applicate al punto:

$$-mg \hat{e}_2 - kas \cos \vartheta \hat{e}_1 - kas \sin \vartheta \hat{e}_2 - \Phi_P \sin \vartheta \hat{e}_1 + \Phi_P \cos \vartheta \hat{e}_2 = 0$$

e che debba quindi essere soddisfatto il sistema di due equazioni indipendenti

$$\begin{cases} -kas \cos \vartheta - \Phi_P \sin \vartheta = 0 \\ -mg - kas \sin \vartheta + \Phi_P \cos \vartheta = 0 . \end{cases} \quad (.3)$$

Seconda equazione cardinale della statica per il punto P

La seconda equazione cardinale della statica è identicamente soddisfatta in virtù della prima, per via del fatto che tutte le sollecitazioni agiscono nello stesso punto. L'equazione scritta rispetto al polo O risulta infatti

$$(P - O) \wedge (-mg \hat{e}_2) + (P - O) \wedge k(M - P) + (P - O) \wedge \vec{\Phi}_P = 0$$

ed equivale all'identità

$$(P - O) \wedge [-mg \hat{e}_2 + k(M - P) + \vec{\Phi}_P] = (P - O) \wedge 0 = 0 .$$

Da questa equazione cardinale non seguono perciò equazioni scalari utili per la determinazione degli equilibri.

Equazioni di equilibrio

La condizione necessaria e sufficiente per il sussistere dell'equilibrio ordinario in una configurazione (s, ϑ) è espressa dalle equazioni (.1), (.2) e (.3):

$$\begin{cases} kas \cos \vartheta + \Phi_{Ox} + \Phi_P \sin \vartheta = 0 \\ -mg + kas \sin \vartheta + \Phi_{Oy} - \Phi_P \cos \vartheta = 0 \\ -\frac{1}{2}mg \sin \vartheta + kas - \Phi_{Ps} = 0 \\ -kas \cos \vartheta - \Phi_P \sin \vartheta = 0 \\ -mg - kas \sin \vartheta + \Phi_P \cos \vartheta = 0 , \end{cases} \quad (.4)$$

che devono ammettere *almeno* una soluzione reale (o una soltanto nel caso l'equilibrio sia staticamente determinato) rispetto alle componenti incognite di reazione vincolare Φ_{Ox} , Φ_{Oy} e Φ_P .

(b) **Equilibri ordinari**

Per determinare gli equilibri ordinari del sistema occorre eliminare dalle equazioni (.4) tutti i termini di reazione vincolare Φ_{Ox} , Φ_{Oy} e Φ_P , in modo da ottenere un sistema di due equazioni *pure* di equilibrio nelle due variabili lagrangiane (s, ϑ) . A questo scopo, si scrive il sistema nella forma equivalente

$$\Phi_{Ox} = -kas \cos \vartheta - \Phi_P \sin \vartheta \quad (.5a)$$

$$\Phi_{Oy} = mg - kas \sin \vartheta + \Phi_P \cos \vartheta \quad (.5b)$$

$$\Phi_{Ps} = -\frac{1}{2}mg \sin \vartheta + kas \quad (.5c)$$

$$\Phi_P \sin \vartheta + kas \cos \vartheta = 0 \quad (.5d)$$

$$\Phi_P \cos \vartheta - mg - kas \sin \vartheta = 0. \quad (.5e)$$

Equazioni pure di equilibrio

Sommando membro a membro l'equazione (.5d) moltiplicata per $\sin \vartheta$ e l'equazione (.5e) moltiplicata per $\cos \vartheta$, si ottiene

$$\Phi_P \sin^2 \vartheta + kas \sin \vartheta \cos \vartheta + \Phi_P \cos^2 \vartheta - mg \cos \vartheta - kas \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$$

e quindi l'espressione di Φ_P

$$\Phi_P = mg \cos \vartheta, \quad (.6)$$

che sostituita in (.5c) porge l'equazione pura di equilibrio:

$$s mg \cos \vartheta = -\frac{1}{2}mg \sin \vartheta + kas. \quad (.7)$$

In modo analogo, se si moltiplicano le equazioni (.5d) e (.5e) rispettivamente per $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$ e si sottraggono membro a membro le equazioni così ottenute si perviene alla relazione

$$\Phi_P \sin \vartheta \cos \vartheta + kas \cos^2 \vartheta - \Phi_P \sin \vartheta \cos \vartheta + mg \sin \vartheta + kas \sin^2 \vartheta = 0$$

ossia

$$kas + mg \sin \vartheta = 0$$

che consente di esprimere il valore di equilibrio della variabile s in funzione del corrispondente valore di equilibrio dell'angolo ϑ :

$$s = -\frac{mg}{ka} \sin \vartheta. \quad (.8)$$

Le equazioni pure di equilibrio sono pertanto:

$$\begin{cases} s = -\frac{mg}{ka} \sin \vartheta \\ mgs \cos \vartheta + \frac{1}{2}mg \sin \vartheta - kas = 0. \end{cases} \quad (.9)$$

Configurazioni di equilibrio ordinarie

Sostituendo la prima delle equazioni (.9) nella seconda si ricava l'equazione di equilibrio nella sola variabile angolare:

$$-mg \frac{mg}{ka} \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{1}{2} mg \sin \vartheta + mg \sin \vartheta = 0$$

vale a dire

$$\frac{3}{2} mg \sin \vartheta - mg \sin \vartheta \frac{mg}{ka} \cos \vartheta = 0$$

e quindi

$$\sin \vartheta \left(\frac{3}{2} \frac{ka}{mg} - \cos \vartheta \right) = 0.$$

Ricordando che $k = mg/\sqrt{3}a$, quest'ultima equazione si riduce a

$$\sin \vartheta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \vartheta \right) = 0$$

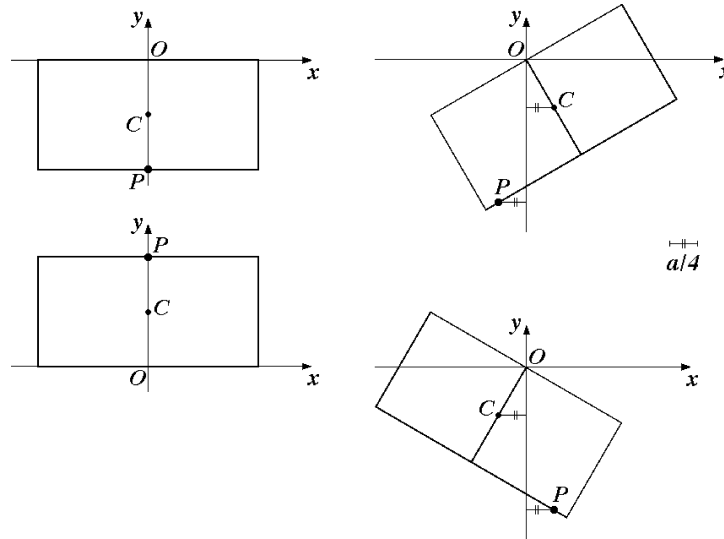
e porge le ovvie soluzioni:

$$\vartheta = 0 \quad , \quad \vartheta = \pi \quad , \quad \vartheta = \pi/6 \quad , \quad \vartheta = -\pi/6,$$

definite a meno di multipli interi di 2π , fisicamente irrilevanti. L'equazione (.8) conduce infine agli equilibri ordinari cercati:

$$(s, \vartheta) = (0, 0) \quad , \quad (s, \vartheta) = (0, \pi) \quad , \quad (s, \vartheta) = (-\sqrt{3}/2, \pi/6) \quad , \quad (s, \vartheta) = (\sqrt{3}/2, -\pi/6)$$

— da notare che tutti gli equilibri sono definiti, in quanto le componenti s risultano comunque ricomprese entro l'intervallo $(-1, 1)$. Gli equilibri sono rappresentati nella figura seguente:



(c) **Reazioni vincolari per tutti gli stati di quiete**

Per un qualsiasi stato di quiete in una configurazione di equilibrio ordinaria le reazioni vincolari sono determinate dalle equazioni cardinali della statica (.5). Più precisamente, sostituendo la (.6) nelle prime due equazioni (.5) si ottengono le relazioni

$$\begin{aligned}\Phi_{Ox} &= -kas \cos \vartheta - mg \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \Phi_{Oy} &= mg - kas \sin \vartheta + mg \cos^2 \vartheta\end{aligned}$$

che equivalgono a

$$\begin{aligned}\Phi_{Ox} &= -ka \cos \vartheta \left(s + \frac{mg}{ka} \sin \vartheta \right) \\ \Phi_{Oy} &= mg - kas \sin \vartheta + mg \cos^2 \vartheta\end{aligned}$$

ed in virtù della (.8) si riducono a:

$$\begin{aligned}\Phi_{Ox} &= -ka \cos \vartheta \cdot 0 = 0 \\ \Phi_{Oy} &= mg + mg \sin^2 \vartheta + mg \cos^2 \vartheta = 2mg.\end{aligned}$$

Queste relazioni, unitamente a $\Phi_P = mg \cos \vartheta$, porgono pertanto:

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_O &= 2mg \hat{e}_2 \\ \vec{\Phi}_P &= \Phi_P (-\sin \vartheta \hat{e}_1 + \cos \vartheta \hat{e}_2) = mg \cos \vartheta (-\sin \vartheta \hat{e}_1 + \cos \vartheta \hat{e}_2).\end{aligned}$$

Si possono così passare in rassegna le quattro configurazioni di equilibrio determinate in precedenza:

- *quiete in* $(s, \vartheta) = (0, 0)$
$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_O &= 2mg \hat{e}_2 \\ \vec{\Phi}_P &= mg \hat{e}_2\end{aligned}$$
- *quiete in* $(s, \vartheta) = (0, \pi)$
$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_O &= 2mg \hat{e}_2 \\ \vec{\Phi}_P &= mg \hat{e}_2\end{aligned}$$
- *quiete in* $(s, \vartheta) = (-\sqrt{3}/2, \pi/6)$
$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_O &= 2mg \hat{e}_2 \\ \vec{\Phi}_P &= mg \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2} \hat{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{e}_2 \right) = mg \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \hat{e}_1 + \frac{3}{4} \hat{e}_2 \right)\end{aligned}$$
- *quiete in* $(s, \vartheta) = (\sqrt{3}/2, -\pi/6)$
$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_O &= 2mg \hat{e}_2 \\ \vec{\Phi}_P &= mg \frac{\sqrt{3}}{2} \left(+\frac{1}{2} \hat{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{e}_2 \right) = mg \left(+\frac{\sqrt{3}}{4} \hat{e}_1 + \frac{3}{4} \hat{e}_2 \right).\end{aligned}$$

Si osservi che $\vec{\Phi}_O$ costituisce l'unica reazione vincolare esterna al sistema, mentre il peso totale $-2mg \hat{e}_2$ rappresenta l'unica forza attiva esterna. Non meraviglia pertanto che, in un qualsiasi stato di quiete, debba aversi $\vec{\Phi}_O = 2mg \hat{e}_2$.

Soluzione dell'esercizio 2

In termini dell'ascissa curvilinea $s = |P - O|$ la trave si parametrizza nella forma

$$P(s) - O = s \cos(\pi/4) \hat{e}_1 - s \sin(\pi/4) \hat{e}_2 = \frac{s}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 - \frac{s}{\sqrt{2}} \hat{e}_2, \quad s \in [0, L],$$

e la sua densità lineare è data da

$$\lambda(s) = \frac{\mu}{L^2} |P(s) - O| = \frac{\mu}{L^2} s, \quad s \in [0, L].$$

Le sollecitazioni distribuite sono rappresentate dalle sole forze peso, che sulla porzione infinitesima di trave compresa fra i punti $P(s)$ e $P(s+ds)$, di massa $\lambda(s) ds$, hanno risultante

$$\lambda(s) ds (-g \hat{e}_2) = -g \lambda(s) \hat{e}_2 ds = -\frac{\mu g}{L^2} s \hat{e}_2 ds, \quad s \in [0, L],$$

e sono perciò descritte per mezzo della densità di forza per unità di lunghezza — o forza unitaria —

$$\vec{f}(s) = -\frac{\mu g}{L^2} s \hat{e}_2, \quad s \in [0, L]. \quad (.10)$$

Nel punto medio C della trave è applicata una forza concentrata di natura elastica

$$\vec{F} = k(B - C) = \frac{\mu g}{L}(B - C)$$

dove

$$C - O = P(L/2) - O = \frac{L}{2\sqrt{2}} \hat{e}_1 - \frac{L}{2\sqrt{2}} \hat{e}_2$$

e

$$B - O = L \hat{e}_1,$$

per cui

$$B - C = L \hat{e}_1 - \frac{L}{2\sqrt{2}} \hat{e}_1 + \frac{L}{2\sqrt{2}} \hat{e}_2 = L \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \hat{e}_1 + \frac{L}{2\sqrt{2}} \hat{e}_2$$

e di conseguenza

$$\vec{F} = \mu g \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \hat{e}_1 + \mu g \frac{1}{2\sqrt{2}} \hat{e}_2. \quad (.11)$$

(a) Campo degli sforzi

Nello stato di quiete, la continuità della densità di forza (.10) e la presenza della sola forza concentrata \vec{F} nel punto C di ascissa curvilinea $s = L/2$ autorizzano ad affermare che il campo degli sforzi $\vec{R}(s)$ deve risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{d\vec{R}}{ds}(s) = -\vec{f}(s) = \frac{\mu g}{L^2} s \hat{e}_2 \quad \forall s \in [0, L] \setminus \{L/2\} \quad (.12)$$

e la condizione di raccordo in $s = L/2$

$$-\vec{R}(L/2 - 0) + \vec{F} + \vec{R}(L/2 + 0) = 0 \quad (.13)$$

in cui si sono introdotte le usuali notazioni per il limite sinistro e destro dello sforzo

$$\vec{R}(L/2 - 0) = \lim_{s \rightarrow L/2^-} \vec{R}(s) \quad \text{e} \quad \vec{R}(L/2 + 0) = \lim_{s \rightarrow L/2^+} \vec{R}(s).$$

L'essere A estremo libero implica peraltro l'ovvia condizione al contorno

$$\vec{R}(L) = 0, \quad (.14)$$

che suggerisce di integrare la (.12) fra L ed $s \in (L/2, L]$, assumendo $s = L$ come dato iniziale del problema di Cauchy:

$$\vec{R}(s) - \vec{R}(L) = \int_L^s \frac{\mu g}{L^2} s \hat{e}_2 ds = \frac{\mu g}{L^2} \left[\frac{s^2}{2} \right]_L^s \hat{e}_2 = \frac{\mu g}{2L^2} (s^2 - L^2) \hat{e}_2 \quad \forall s \in (L/2, L]$$

e ottenendo così

$$\vec{R}(s) = \frac{\mu g}{2L^2} (s^2 - L^2) \hat{e}_2 \quad \forall s \in (L/2, L]. \quad (.15)$$

La relazione così determinata permette di ricavare il limite destro dello sforzo in $s = L/2$:

$$\vec{R}(L/2 + 0) = \lim_{s \rightarrow L/2^+} \vec{R}(s) = \lim_{s \rightarrow L/2^+} \frac{\mu g}{2L^2} (s^2 - L^2) \hat{e}_2 = \frac{\mu g}{2L^2} \left(\frac{L^2}{4} - L^2 \right) \hat{e}_2 = -\frac{3}{8} \mu g \hat{e}_2$$

e attraverso la condizione di raccordo (.13) anche il corrispondente limite sinistro:

$$\begin{aligned} \vec{R}(L/2 - 0) &= \vec{F} + \vec{R}(L/2 + 0) = \mu g \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \hat{e}_1 + \mu g \frac{1}{2\sqrt{2}} \hat{e}_2 - \frac{3}{8} \mu g \hat{e}_2 = \\ &= \mu g \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \hat{e}_1 + \mu g \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{8} \right) \hat{e}_2. \end{aligned}$$

Non rimane che integrare la (.12) fra $L/2$ ed $s \in [0, L/2)$, deducendo la relazione

$$\vec{R}(s) - \vec{R}(L/2 - 0) = \int_{L/2}^s \frac{\mu g}{L^2} s \hat{e}_2 ds = \frac{\mu g}{2L^2} \left(s^2 - \frac{L^2}{4} \right) \hat{e}_2 \quad \forall s \in [0, L/2)$$

e pertanto

$$\begin{aligned} \vec{R}(s) &= \vec{R}(L/2 - 0) + \frac{\mu g}{2L^2} \left(s^2 - \frac{L^2}{4} \right) \hat{e}_2 = \\ &= \mu g \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \hat{e}_1 + \mu g \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{8} \right) \hat{e}_2 + \frac{\mu g}{2L^2} \left(s^2 - \frac{L^2}{4} \right) \hat{e}_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu g \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \hat{e}_1 + \mu g \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{8} + \frac{s^2}{2L^2} - \frac{1}{8}\right) \hat{e}_2 = \\
&= \mu g \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \hat{e}_1 + \mu g \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{s^2}{2L^2}\right) \hat{e}_2 \quad \forall s \in [0, L/2].
\end{aligned}$$

In conclusione, il campo degli sforzi lungo la trave è descritto dalla funzione polinomiale a tratti:

$$\vec{R}(s) = \begin{cases} \mu g \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \hat{e}_1 + \mu g \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{s^2}{2L^2}\right) \hat{e}_2 & s \in [0, L/2) \\ \mu g \left(\frac{s^2}{2L^2} - \frac{1}{2}\right) \hat{e}_2 & s \in (L/2, L], \end{cases} \quad (.16)$$

che presenta in $s = L/2$ una discontinuità finita.

(b) Campo dei momenti

Trattandosi di trave sottile non soggetta ad alcun momento concentrato, la seconda equazione cardinale della statica scritta in forma differenziale si riduce a

$$\frac{d\vec{M}}{ds}(s) = -\frac{dP}{ds}(s) \wedge \vec{R}(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2) \wedge \vec{R}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \wedge \vec{R}(s) \quad (.17)$$

e deve essere verificata $\forall s \in [0, L] \setminus \{L/2\}$ — lo stesso insieme su cui è definito il secondo membro dell'equazione differenziale. La doppia determinazione della (.16) costringe a considerare due distinti casi.

Per $s \in [0, L/2)$ l'equazione (.17) diventa

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{M}}{ds}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \wedge \left[\mu g \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \hat{e}_1 + \mu g \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{s^2}{2L^2}\right) \hat{e}_2 \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left[-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{s^2}{2L^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \right] \hat{e}_3 = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{s^2}{2L^2} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(-\frac{1}{2} - \frac{s^2}{2L^2}\right) \hat{e}_3
\end{aligned} \quad (.18)$$

mentre per $s \in (L/2, L]$ si ha

$$\frac{d\vec{M}}{ds}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \wedge \mu g \left(\frac{s^2}{2L^2} - \frac{1}{2}\right) \hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(\frac{1}{2} - \frac{s^2}{2L^2}\right) \hat{e}_3. \quad (.19)$$

Si osservi inoltre che, data la mancanza di momenti concentrati, il momento $\vec{M}(s)$ è una funzione continua anche in $s = L/2$:

$$-\vec{M}(L/2 - 0) + \vec{M}(L/2 + 0) = 0$$

in modo che è senz'altro lecito porre

$$\vec{M}(L/2) = \vec{M}(L/2 - 0) = \vec{M}(L/2 + 0). \quad (.20)$$

L'ipotesi dell'estremo libero $A = P(L)$ assicura che

$$\vec{M}(L) = 0$$

e induce ad integrare la (.19) fra L ed $s \in (L/2, L]$, per ottenere

$$\begin{aligned} \vec{M}(s) - \vec{M}(L) &= \int_L^s \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(\frac{1}{2} - \frac{s^2}{2L^2} \right) \hat{e}_3 ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left[\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6L^2} \right]_L^s \hat{e}_3 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6L^2} - \frac{L}{2} + \frac{L}{6} \right) \hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6L^2} - \frac{L}{3} \right) \hat{e}_3 \end{aligned}$$

ovvero

$$\vec{M}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6L^2} - \frac{L}{3} \right) \hat{e}_3 \quad \forall s \in (L/2, L]. \quad (.21)$$

Si può così calcolare il valore del momento in $P(L/2)$ tramite la (.20):

$$\begin{aligned} \vec{M}(L/2) = \vec{M}(L/2 + 0) &= \lim_{s \rightarrow L/2+} \vec{M}(s) = \lim_{s \rightarrow L/2+} \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6L^2} - \frac{L}{3} \right) \hat{e}_3 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(\frac{L}{4} - \frac{L}{48} - \frac{L}{3} \right) \hat{e}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{5}{48} \mu g L \hat{e}_3. \end{aligned}$$

Diventa allora possibile l'integrazione della (.18) fra $L/2$ e $s \in [0, L/2)$, che porge

$$\begin{aligned} \vec{M}(s) - \vec{M}(L/2) &= \int_{L/2}^s \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(-\frac{1}{2} - \frac{s^2}{2L^2} \right) \hat{e}_3 ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left[-\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6L^2} \right]_{L/2}^s \hat{e}_3 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(-\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6L^2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{48} \right) \hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(-\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6L^2} + \frac{13}{48} L \right) \hat{e}_3 \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \vec{M}(s) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{5}{48} \mu g L \hat{e}_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(-\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6L^2} + \frac{13}{48} L \right) \hat{e}_3 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(-\frac{5}{48} L - \frac{s}{2} - \frac{s^3}{6L^2} + \frac{13}{48} L \right) \hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g \left(-\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6L^2} + \frac{L}{6} \right) \hat{e}_3 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mu g L \left(-\frac{s}{2L} - \frac{s^3}{6L^3} + \frac{1}{6} \right) \hat{e}_3 \quad \forall s \in [0, L/2). \end{aligned} \quad (.22)$$

Si conclude pertanto che il campo dei momenti lungo la trave sottile è descritto dalla funzione polinomiale a tratti:

$$\vec{M}(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\mu g L \left(\frac{1}{6} - \frac{s}{2L} - \frac{s^3}{6L^3} \right) \hat{e}_3 & s \in [0, L/2] \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mu g L \left(-\frac{1}{3} + \frac{s}{2L} - \frac{s^3}{6L^3} \right) \hat{e}_3 & s \in [L/2, L]. \end{cases} \quad (.23)$$

(c) **Sforzo normale e momento torcente**

Sforzo normale

Per definizione, lo sforzo normale è la componente dello sforzo $\vec{R}(s)$ lungo il versore tangente alla direttrice della trave:

$$\hat{\tau}(s) = \frac{dP}{ds}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2). \quad (.24)$$

Ricordando l'espressione (.16), per $s \in [0, L/2)$ si ha perciò

$$\begin{aligned} \vec{R}(s) \cdot \hat{\tau}(s) &= \mu g \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} - \mu g \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{s^2}{2L^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mu g \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{s^2}{2L^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mu g \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{s^2}{2L^2} \right) \end{aligned}$$

mentre per $s \in (L/2, L]$ risulta

$$\vec{R}(s) \cdot \hat{\tau}(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mu g \left(\frac{s^2}{2L^2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mu g \left(\frac{1}{2} - \frac{s^2}{2L^2} \right).$$

Compendiando le due determinazioni in un'unica funzione si ottiene così:

$$\vec{R}(s) \cdot \hat{\tau}(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\mu g \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{s^2}{2L^2} \right) & s \in [0, L/2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mu g \left(\frac{1}{2} - \frac{s^2}{2L^2} \right) & s \in (L/2, L]. \end{cases}$$

Si ribadisce che per $s = L/2$ lo sforzo normale non è definito a causa della discontinuità di $\vec{R}(s)$ — sono però ovviamente definiti i limiti destro e sinistro nello stesso punto.

Momento torcente

Il momento torcente è la componente del momento $\vec{M}(s)$ lungo la tangente alla direttrice:

$$\vec{M}(s) \cdot \hat{\tau}(s).$$

Dalle relazioni (.23) e (.24) appare evidente che i due vettori sono sempre ortogonali fra loro, per cui il momento torcente risulta nullo lungo l'intero corpo della trave:

$$\vec{M}(s) \cdot \hat{\tau}(s) = \vec{M}(s) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2) = 0 \quad \forall s \in [0, L].$$

Soluzione dell'esercizio 3

(a) Componenti lagrangiane delle sollecitazioni attive

Le sollecitazioni attive che agiscono sul sistema sono:

- il peso;
- la resistenza viscosa in N , con costante di frizione β ;
- il sistema di forze applicate alla piastra, con risultante \vec{R} e momento risultante \vec{M}_N in N noti. Quest'ultimo sistema verrà indicato, per brevità, come sistema S .

Si tratta di ricavare le componenti generalizzate di ognuna di queste diverse sollecitazioni: la somma delle componenti calcolate fornirà le componenti generalizzate del sistema.

Componenti generalizzate delle forze peso

Quello delle forze peso è notoriamente un sistema posizionale conservativo, che può rappresentarsi mediante l'appropriato potenziale. Il potenziale gravitazionale consta della somma di due contributi, l'uno relativo alla sbarra ON e l'altro associato alla piastra $ABCD$. Il baricentro della sbarra omogenea ON coincide con il punto medio di questa, per cui il potenziale gravitazionale è dato dall'espressione

$$U_g^{ON} = -mg \hat{e}_2 \cdot \frac{N - O}{2} = -mg \hat{e}_2 \cdot \frac{a \sin \vartheta \hat{e}_1 - a \cos \vartheta \hat{e}_2}{2} = \frac{1}{2} m g a \cos \vartheta .$$

Il baricentro G della piastra omogenea $ABCD$ deve identificarsi invece con il centro geometrico (e di simmetria) del quadrato $ABCD$, ed il suo vettore posizione si scrive perciò

$$\begin{aligned} G - O &= N - O + \frac{M - N}{2} = a \sin \vartheta \hat{e}_1 - a \cos \vartheta \hat{e}_2 + \frac{a}{2} \sin \varphi \hat{e}_1 - \frac{a}{2} \cos \varphi \hat{e}_2 = \\ &= a \left(\sin \vartheta + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \hat{e}_1 - a \left(\cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos \varphi \right) \hat{e}_2 \end{aligned} \quad (.25)$$

in modo che il potenziale gravitazionale assume la forma

$$U_g^{ABCD} = -mg \hat{e}_2 \cdot (G - O) = m g a \left(\cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos \varphi \right) .$$

Per il potenziale gravitazionale del sistema si ha perciò la formula:

$$U(\vartheta, \varphi) = U_g^{ON} + U_g^{ABCD} = m g a \left(\frac{3}{2} \cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos \varphi \right)$$

dalla quale si deducono le corrispondenti componenti generalizzate delle forze peso:

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -\frac{3}{2} m g a \sin \vartheta \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} m g a \sin \varphi . \quad (.26)$$

Componenti generalizzate della resistenza viscosa in N

Le componenti generalizzate della resistenza viscosa $-\beta \dot{B}$ applicata in B sono definite dalle relazioni:

$$Q_{\vartheta}^{rv} = -\beta \dot{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \vartheta} \quad Q_{\varphi}^{rv} = -\beta \dot{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \varphi}$$

nelle quali risulta:

$$\begin{aligned} N - O &= a(\sin \vartheta \hat{e}_1 - \cos \vartheta \hat{e}_2) \\ \frac{\partial N}{\partial \vartheta} &= a(\cos \vartheta \hat{e}_1 - \sin \vartheta \hat{e}_2) & \frac{\partial N}{\partial \varphi} &= 0 \\ \dot{N} &= \frac{\partial N}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial N}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \frac{\partial N}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} \end{aligned}$$

per cui

$$Q_{\vartheta}^{rv} = -\beta \left| \frac{\partial N}{\partial \vartheta} \right|^2 \dot{\vartheta} = -\beta a^2 \dot{\vartheta} \quad Q_{\varphi}^{rv} = -\beta \dot{N} \cdot 0 = 0. \quad (.27)$$

Componenti generalizzate del sistema S

Il sistema S di forze è applicato ad una lastra rigida che si muove nel piano coordinato Oxy , e dunque necessariamente di moto rigido piano. Il punto N rispetto al quale è espresso il momento risultante di S costituisce un punto della piastra, ovvero dello spazio a questa solidale. Infine, l'angolo φ rappresenta l'angolo compreso fra una direzione fissa nel riferimento assoluto (la verticale condotta da N verso il basso) e una direzione fissa sulla piastra (quella del vettore $M - N$), per cui può interpretarsi come *angolo di rotazione* della piastra stessa. Poichè in mancanza di diversa indicazione la terna $Oxyz$ deve intendersi ortogonale *destra*, è facile convincersi che il versore \hat{e}_3 — ortogonale al piano del moto — e l'angolo φ sono orientati l'uno rispetto all'altro conformemente alla regola della mano destra. Ricorrono così i presupposti per calcolare le componenti generalizzate di S tramite le formule:

$$Q_{\vartheta}^S = \frac{\partial N}{\partial \vartheta} \cdot \vec{R} + \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_N \quad Q_{\varphi}^S = \frac{\partial N}{\partial \varphi} \cdot \vec{R} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_N$$

che essendo $N - O = a(\sin \vartheta \hat{e}_1 - \cos \vartheta \hat{e}_2)$, e le variabili ϑ, φ indipendenti, si riducono a:

$$Q_{\vartheta}^S = a(\cos \vartheta \hat{e}_1 + \sin \vartheta \hat{e}_2) \cdot \vec{R} \quad Q_{\varphi}^S = \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_N.$$

Per determinare le componenti richieste non resta che sostituire le espressioni di $\vec{R} = -\beta a(\cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2) \dot{\varphi}$ e $\vec{M}_N = \beta a^2[-2\dot{\varphi} + \cos(\vartheta + \varphi)\dot{\vartheta}] \hat{e}_3$, che forniscono:

$$\begin{aligned} Q_{\vartheta}^S &= a(\cos \vartheta \hat{e}_1 + \sin \vartheta \hat{e}_2) \cdot (-\beta a)(\cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2) \dot{\varphi} = \\ &= -\beta a^2(\cos \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi) \dot{\varphi} = -\beta a^2 \cos(\vartheta - \varphi) \dot{\varphi} \\ Q_{\varphi}^S &= \beta a^2[-2\dot{\varphi} + \cos(\vartheta + \varphi)\dot{\vartheta}]. \end{aligned} \quad (.28)$$

Componenti generalizzate delle sollecitazioni attive

Per ottenere le componenti generalizzate del sistema delle sollecitazioni attive si devono utilizzare le relazioni (.26), (.27), (.28), sfruttando l'additività della definizione:

$$\begin{aligned} Q_{\vartheta} &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta} + Q_{\vartheta}^{rv} + Q_{\vartheta}^S = -\frac{3}{2} m g a \sin \vartheta - \beta a^2 \dot{\vartheta} - \beta a^2 \cos(\vartheta - \varphi) \dot{\varphi} \\ Q_{\varphi} &= \frac{\partial U}{\partial \varphi} + Q_{\varphi}^{rv} + Q_{\varphi}^S = -\frac{1}{2} m g a \sin \varphi + 0 - \beta a^2 [2\dot{\varphi} - \cos(\vartheta + \varphi)\dot{\vartheta}]. \end{aligned} \quad (.29)$$

(b) Equilibri e loro stabilità

Equilibri

Dalle espressioni (.29) appare evidente che le sollecitazioni attive constano di termini posizionali conservativi

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta}(\vartheta, \varphi) = -\frac{3}{2}mga \sin \vartheta \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{2}mga \sin \varphi,$$

il cui potenziale coincide con quello gravitazionale (che dunque è anche il potenziale del sistema), e di termini non posizionali:

$$D_{\vartheta}(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = -\beta a^2[\dot{\vartheta} + \cos(\vartheta - \varphi)\dot{\varphi}] \quad D_{\varphi}(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = -\beta a^2[2\dot{\varphi} - \cos(\vartheta + \varphi)\dot{\vartheta}]$$

che chiaramente si annullano per $(\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = (0, 0)$ e dunque non concorrono in alcun modo alla determinazione degli equilibri. Ne deriva che gli equilibri del sistema sono i punti critici del potenziale e si identificano con tutte e soltanto le soluzioni del sistema di equazioni disaccoppiate:

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta}(\vartheta, \varphi) = -\frac{3}{2}mga \sin \vartheta = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{2}mga \sin \varphi = 0$$

che porge:

$$(\vartheta, \varphi) = (0, 0), \quad (\vartheta, \varphi) = (0, \pi), \quad (\vartheta, \varphi) = (\pi, 0), \quad (\vartheta, \varphi) = (\pi, \pi).$$

Natura delle sollecitazioni non posizionali

La potenza delle sollecitazioni non posizionali è data dall'espressione

$$\begin{aligned} \pi_D(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) &= D_{\vartheta}\dot{\vartheta} + D_{\varphi}\dot{\varphi} = \\ &= -\beta a^2[\dot{\vartheta}^2 + \cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + 2\dot{\varphi}^2 - \cos(\vartheta + \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}] = \\ &= -\beta a^2(\dot{\vartheta} \ \dot{\varphi}) \Gamma(\vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove $\forall(\vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ la matrice

$$\Gamma(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos(\vartheta - \varphi) - \cos(\vartheta + \varphi)}{2} \\ \frac{\cos(\vartheta - \varphi) - \cos(\vartheta + \varphi)}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

è reale, simmetrica e definita positiva in quanto

$$\det \Gamma(\vartheta, \varphi) = 2 - \frac{1}{4}[\cos(\vartheta - \varphi) - \cos(\vartheta + \varphi)]^2 \geq 2 - 1 = 1 > 0$$

e $\text{tr} \Gamma(\vartheta, \varphi) = 3 > 0$. Si ha dunque:

$$\pi_D(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) \leq 0 \quad \forall(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) \in \mathbb{R}^4$$

ed inoltre

$$\pi_D(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = (0, 0),$$

per cui la sollecitazione non posizionale ha natura *completamente dissipativa*.

Stabilità degli equilibri

Le configurazioni di equilibrio sono in numero finito, dunque necessariamente isolate. Le sollecitazioni attive sono in parte posizionali conservative ed in parte completamente dissipative. Per ciascun equilibrio è quindi dato analizzare le proprietà di stabilità ricorrendo alla forma forte del teorema di Lagrange-Dirichlet, basata sui criteri di Barbasin-Krasovskii. Dalla matrice hessiana del potenziale

$$H_U(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}(\vartheta, \varphi) & \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial \varphi}(\vartheta, \varphi) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \vartheta}(\vartheta, \varphi) & \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}mga \cos \vartheta & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}mga \cos \varphi \end{pmatrix}$$

è immediato verificare che $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$ costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, mentre $(\vartheta, \varphi) = (\pi, \pi)$ è un minimo e $(\vartheta, \varphi) = (0, \pi)$, $(\vartheta, \varphi) = (\pi, 0)$ sono punti di sella. Dai criteri di Barbasin-Krasovskii segue allora che l'equilibrio $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$ è asintoticamente stabile in quanto massimo relativo proprio del potenziale. In tutti gli altri casi, l'esclusione del massimo relativo assicura l'instabilità dell'equilibrio.

(c) **Equazioni pure del moto**

Il sistema olonomo è per ipotesi a vincoli ideali e le sue equazioni del moto possono esprimersi nella seconda forma di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = Q_{\vartheta} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi} \quad (.30)$$

in termini dell'energia cinetica T del sistema — le componenti generalizzate Q_{ϑ} , Q_{φ} delle forze attive sono già state ricavate in (.29).

Energia cinetica dell'asta ON

L'asta si muove nel piano Oxy ruotando attorno all'asse fisso Oz secondo l'angolo di rotazione ϑ , con velocità angolare $\dot{\vartheta} \hat{e}_3$. La sua energia cinetica viene quindi espressa per mezzo della relazione

$$T_{ON} = \frac{1}{2} I_{Oz}^{ON} |\dot{\vartheta} \hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2} \frac{ma^2}{3} \dot{\vartheta}^2 = \frac{ma^2}{6} \dot{\vartheta}^2. \quad (.31)$$

Energia cinetica della piastra ABCD

Anche la piastra si muove nel piano Oxy , ma è priva di punti fissi. La relativa energia cinetica è quindi data dal teorema di König:

$$T_{ABCD} = \frac{m}{2} \dot{G}^2 + \frac{1}{2} I_{Gz}^{ABCD} |\dot{\varphi} \hat{e}_3|^2$$

dove il momento d'inerzia della piastra rispetto all'asse Gz vale $I_{Gz}^{ABCD} = ma^2/6$ e il vettore posizione del baricentro risulta

$$G - O = a\left(\sin\vartheta + \frac{1}{2}\sin\varphi\right)\hat{e}_1 - a\left(\cos\vartheta + \frac{1}{2}\cos\varphi\right)\hat{e}_2$$

per cui la velocità istantanea di G lungo un qualsiasi moto possibile del sistema assume la forma

$$\dot{G} = a\left(\cos\vartheta\dot{\vartheta} + \frac{1}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}\right)\hat{e}_1 + a\left(\sin\vartheta\dot{\vartheta} + \frac{1}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}\right)\hat{e}_2$$

ed ha modulo quadrato

$$\begin{aligned} \dot{G}^2 &= a^2\left(\cos^2\vartheta\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + \cos\vartheta\cos\varphi\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\vartheta\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4}\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 + \sin\vartheta\sin\varphi\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right) = a^2\left[\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4}\dot{\varphi}^2 + \cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right]. \end{aligned}$$

L'energia cinetica della piastra diventa pertanto

$$T_{ABCD} = \frac{ma^2}{2}\left[\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4}\dot{\varphi}^2 + \cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right] + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{6}\dot{\varphi}^2 = \frac{ma^2}{2}\left[\dot{\vartheta}^2 + \frac{5}{12}\dot{\varphi}^2 + \cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right].$$

Energia cinetica del sistema

La somma delle energie cinetiche di asta e piastra definisce l'energia cinetica del sistema

$$T = T_{ON} + T_{ABCD} = \frac{ma^2}{2}\left[\frac{4}{3}\dot{\vartheta}^2 + \frac{5}{12}\dot{\varphi}^2 + \cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right]. \quad (.32)$$

Binomi di Lagrange per l'energia cinetica

Dall'espressione (.32) dell'energia cinetica del sistema si deducono le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} &= ma^2\left[\frac{4}{3}\dot{\vartheta} + \frac{1}{2}\cos(\vartheta - \varphi)\dot{\varphi}\right] \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right) &= ma^2\left[\frac{4}{3}\ddot{\vartheta} + \frac{1}{2}\cos(\vartheta - \varphi)\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\sin(\vartheta - \varphi)(\dot{\vartheta}\dot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)\right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= -\frac{1}{2}ma^2\sin(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi} \end{aligned}$$

che consentono di scrivere il binomio di Lagrange dell'energia cinetica relativo alla coordinata ϑ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = ma^2\left[\frac{4}{3}\ddot{\vartheta} + \frac{1}{2}\cos(\vartheta - \varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\sin(\vartheta - \varphi)\dot{\varphi}^2\right]. \quad (.33)$$

In modo analogo si ricavano le espressioni:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= ma^2 \left[\frac{5}{12} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \cos(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta} \right] \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= ma^2 \left[\frac{5}{12} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cos(\vartheta - \varphi) \ddot{\vartheta} - \frac{1}{2} \sin(\vartheta - \varphi) (\dot{\vartheta}^2 - \dot{\vartheta} \dot{\varphi}) \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} ma^2 \sin(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta} \dot{\varphi}\end{aligned}$$

dalle quali segue il binomio di Lagrange di T per la variabile φ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = ma^2 \left[\frac{5}{12} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cos(\vartheta - \varphi) \ddot{\vartheta} - \frac{1}{2} \sin(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta}^2 \right]. \quad (.34)$$

Equazioni di Lagrange

Le equazioni di Lagrange si ottengono sostituendo nelle (.30) le espressioni (.33), (.34) dei binomi di Lagrange e le relazioni (.29) per le componenti generalizzate delle sollecitazioni attive:

$$\begin{aligned}ma^2 \left[\frac{4}{3} \ddot{\vartheta} + \frac{1}{2} \cos(\vartheta - \varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \sin(\vartheta - \varphi) \dot{\varphi}^2 \right] &= -\frac{3}{2} mga \sin \vartheta - \beta a^2 [\dot{\vartheta} + \cos(\vartheta - \varphi) \dot{\varphi}] \\ ma^2 \left[\frac{5}{12} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cos(\vartheta - \varphi) \ddot{\vartheta} - \frac{1}{2} \sin(\vartheta - \varphi) \dot{\vartheta}^2 \right] &= -\frac{1}{2} mga \sin \varphi - \beta a^2 [2\dot{\varphi} - \cos(\vartheta + \varphi) \dot{\vartheta}].\end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 4

(a) **Equilibrio stabile** $(\xi, \vartheta) = (0, 0)$. **Equazioni delle piccole oscillazioni**

La lagrangiana del sistema deve consistere di una parte quadratica, rappresentativa dell'energia cinetica del sistema, e di una parte dipendente dai soli parametri lagrangiani, che va identificata con il potenziale delle sollecitazioni posizionali conservative. Ciò premesso, è evidente che l'energia cinetica del sistema deve essere data da

$$T = \frac{1}{2} ma^2 \left[\dot{\xi}^2 + \left(\frac{3}{4} + 2 \sin^2 \vartheta \right) \dot{\vartheta}^2 \right] \quad (.35)$$

mentre il termine residuo $\mathcal{L} - T$ della lagrangiana rappresenta il potenziale del sistema:

$$U(\xi, \vartheta) = ka^2 \left(-\frac{\xi^2}{2} + \xi \sin \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta + 6 \cos \vartheta \right). \quad (.36)$$

All'energia cinetica (.35) è associata la matrice di rappresentazione diagonale

$$A(\xi, \vartheta) = ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} + 2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

che consente di esprimere T nella forma

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\xi} \quad \dot{\vartheta}) A(\xi, \vartheta) \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix},$$

mentre dal potenziale (.36) si deducono le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi, \vartheta) = ka^2(-\xi + \sin \vartheta) \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta}(\xi, \vartheta) = ka^2(\xi \cos \vartheta + 4 \cos \vartheta \sin \vartheta - 6 \sin \vartheta)$$

e con una ulteriore derivazione le derivate parziali seconde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(\xi, \vartheta) &= -ka^2 & \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial \xi}(\xi, \vartheta) &= ka^2 \cos \vartheta \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \vartheta}(\xi, \vartheta) &= ka^2 \cos \vartheta & \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}(\xi, \vartheta) &= ka^2(-\xi \sin \vartheta + 4 \cos 2\vartheta - 6 \cos \vartheta). \end{aligned}$$

È allora immediato verificare che la configurazione $(\xi, \vartheta) = (0, 0)$ costituisce un equilibrio ordinario del sistema, in quanto punto stazionario del potenziale:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta}(0, 0) = 0.$$

In tale configurazione la matrice hessiana del potenziale diventa

$$H_U(0, 0) = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e risulta chiaramente definita negativa, per via del segno positivo del determinante

$$\det H_U(0, 0) = k^2 a^4 > 0$$

e di quello negativo della traccia

$$\text{tr} H_U(0, 0) = -3ka^2 < 0.$$

La configurazione rappresenta perciò un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet. Il carattere definito negativo dell'hessiana permette di affermare che *allo studio dei piccoli moti attorno a* $(\xi, \vartheta) = (0, 0)$ *è applicabile la teoria canonica delle piccole oscillazioni*. Per l'analisi di queste si richiede, in particolare, il calcolo della matrice dell'energia cinetica nella configurazione di equilibrio individuata:

$$A(0, 0) = ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Posto $(\xi, \vartheta) = (\delta\xi, \delta\vartheta)$, le equazioni delle piccole oscillazioni attorno a $(\xi, \vartheta) = (0, 0)$ si scrivono

$$A(0, 0) \begin{pmatrix} \ddot{\delta\xi} \\ \ddot{\delta\vartheta} \end{pmatrix} - H_U(0, 0) \begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\vartheta \end{pmatrix} = 0$$

vale a dire, sostituendo le espressioni esplicite delle matrici,

$$ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\delta\xi} \\ \ddot{\delta\vartheta} \end{pmatrix} - ka^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\vartheta \end{pmatrix} = 0$$

e quindi

$$\begin{cases} ma^2 \ddot{\delta\xi} + ka^2(\delta\xi - \delta\vartheta) = 0 \\ \frac{3}{4}ma^2 \ddot{\delta\vartheta} + ka^2(-\delta\xi + 2\delta\vartheta) = 0. \end{cases}$$

(b) Frequenze normali delle piccole oscillazioni

Le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile $(\xi, \vartheta) = (0, 0)$ sono le soluzioni $\omega > 0$ dell'equazione caratteristica

$$\det[\omega^2 A(0, 0) + H_U(0, 0)] = 0$$

ossia

$$\det \left[ma^2 \omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} + ka^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

od anche, equivalentemente,

$$\det \left[\frac{m\omega^2}{k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Posto $m\omega^2/k = \lambda$, si ha allora

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4}\lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1) \left(\frac{3}{4}\lambda - 2 \right) - 1 = \frac{3}{4}\lambda^2 - \frac{11}{4}\lambda + 1$$

e pertanto

$$3\lambda^2 - 11\lambda + 4 = 0.$$

Ne seguono le radici reali positive

$$\lambda_1 = \frac{11 - \sqrt{121 - 4 \cdot 12}}{6} = \frac{11 - \sqrt{73}}{6} \quad \lambda_2 = \frac{11 + \sqrt{73}}{6}$$

cui corrispondono le pulsazioni normali $\omega_i = \sqrt{\lambda_i} \sqrt{k/m}$:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{11 - \sqrt{73}}{6}} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{11 + \sqrt{73}}{6}} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e le relative frequenze:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{11 - \sqrt{73}}{6}} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{11 + \sqrt{73}}{6}} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

(c) **Modi normali delle piccole oscillazioni e coordinate normali**

Per caratterizzare completamente ciascuno dei due modi normali di oscillazione occorre e basta determinare il relativo vettore delle ampiezze. Questo si ricava risolvendo per $i = 1, 2$ il problema agli autovalori generalizzato

$$[\omega_i^2 A(0, 0) + H_U(0, 0)] \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia l'equivalente problema in forma adimensionale

$$\begin{pmatrix} \lambda_i - 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4}\lambda_i - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (.37)$$

Modo basso, di pulsazione ω_1

Per $i = 1$ la matrice quadrata a primo membro nella (.37) diventa

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4}\lambda_1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11 - \sqrt{73}}{6} - 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4} \frac{11 - \sqrt{73}}{6} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 - \sqrt{73}}{6} & 1 \\ 1 & \frac{-5 - \sqrt{73}}{8} \end{pmatrix}$$

e il sistema (.37) che specifica le ampiezze del modo normale basso si riduce a

$$\begin{cases} \frac{5 - \sqrt{73}}{6} a_1 + b_1 = 0 \\ a_1 - \frac{5 + \sqrt{73}}{8} b_1 = 0. \end{cases}$$

La prima equazione porge immediatamente

$$b_1 = \frac{-5 + \sqrt{73}}{6} a_1$$

e lo stesso risultato si ottiene anche dalla seconda, che dunque è linearmente dipendente dalla prima, come richiesto:

$$b_1 = \frac{8}{5 + \sqrt{73}} a_1 = 8 \frac{5 - \sqrt{73}}{25 - 73} a_1 = 8 \frac{5 - \sqrt{73}}{-48} a_1 = \frac{-5 + \sqrt{73}}{6} a_1.$$

Per il modo normale di oscillazione si ha così l'espressione generale

$$\begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\vartheta \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 6 \\ -5 + \sqrt{73} \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{11 - \sqrt{73}}{6}} \sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_1\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (.38)$$

dove $\alpha_1 \neq 0$ e φ_1 sono costanti reali assegnate a piacere.

Modo alto, di pulsazione ω_2

I calcoli per la determinazione del modo normale di pulsazione maggiore, ω_2 , sono analoghi a quelli svolti per il modo basso e coincidono con questi a meno della sostituzione:

$$-\sqrt{73} \longrightarrow +\sqrt{73}.$$

Per $i = 2$ si ha infatti:

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4}\lambda_2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 + \sqrt{73}}{6} & 1 \\ 1 & \frac{-5 + \sqrt{73}}{8} \end{pmatrix}$$

e l'equazione delle ampiezze diventa

$$\begin{cases} \frac{5 + \sqrt{73}}{6} a_2 + b_2 = 0 \\ a_2 + \frac{-5 + \sqrt{73}}{8} b_2 = 0, \end{cases}$$

porgendo l'unica equazione indipendente:

$$b_2 = -\frac{5 + \sqrt{73}}{6} a_2.$$

Il risultato è l'espressione cercata del modo normale alto:

$$\begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\vartheta \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 5 + \sqrt{73} \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{11 + \sqrt{73}}{6}} \sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_2\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (.39)$$

nella quale $\alpha_2 \neq 0$ e $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

Coordinate normali

La teoria canonica delle piccole oscillazioni definisce le coordinate normali del sistema, z_1 e z_2 , attraverso una trasformazione lineare delle variabili lagrangiane $\delta\xi$ e $\delta\vartheta$:

$$\begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\vartheta \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

essendo S un'opportuna matrice 2×2 non singolare. Più precisamente, in coordinate normali il modo basso deve ridursi a

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

per cui

$$\begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\vartheta \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

e confrontando con la (.38) si conclude che

$$S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 + \sqrt{73} \end{pmatrix}.$$

Analogamente, il modo alto deve assumere la forma

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

dalla quale si deduce

$$\begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\vartheta \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

e per confronto con la (.39) segue

$$S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 + \sqrt{73} \end{pmatrix}.$$

La matrice di trasformazione S è quindi data da

$$S = S\mathbb{I} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -5 + \sqrt{73} & 5 + \sqrt{73} \end{pmatrix}$$

e la trasformazione che lega le coordinate lagrangiane $(\xi, \vartheta) = (\delta\xi, \delta\vartheta)$ alle variabili normali si esprime come

$$\begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -5 + \sqrt{73} & 5 + \sqrt{73} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

vale a dire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -5 + \sqrt{73} & 5 + \sqrt{73} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\vartheta \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{30 + 6\sqrt{73} + 6\sqrt{73} - 30} \begin{pmatrix} 5 + \sqrt{73} & 6 \\ 5 - \sqrt{73} & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\vartheta \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{12\sqrt{73}} \begin{pmatrix} 5 + \sqrt{73} & 6 \\ 5 - \sqrt{73} & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In conclusione, le variabili normali si esprimono in termini delle coordinate lagrangiane $(\delta\xi, \delta\vartheta)$ per mezzo delle relazioni:

$$z_1 = \frac{(5 + \sqrt{73}) \delta\xi + 6 \delta\vartheta}{12\sqrt{73}} \quad z_2 = \frac{(5 - \sqrt{73}) \delta\xi + 6 \delta\vartheta}{12\sqrt{73}}.$$