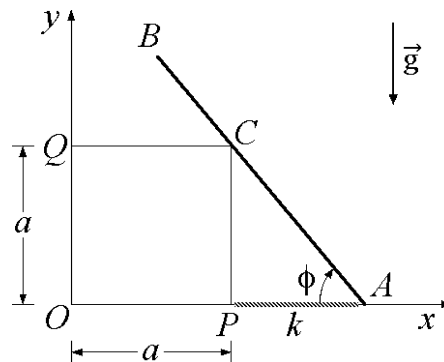


Esercizio 1

Un quadrato $OPCQ$ di lato a è fisso nel piano verticale Oxy di una terna inerziale $Oxyz$, con i lati OP e OQ posti lungo i semiassi positivi Ox e Oy , rispettivamente. Un'asta rettilinea omogenea pesante AB , di lunghezza $2a$ e massa m , scorre con l'estremo A lungo l'asse orizzontale Ox mantenendosi appoggiata al vertice C del quadrato. Una molla ideale di costante elastica k collega A con il vertice P . Reazioni vincolari esterne sono applicate all'asta in A e in C , con attriti radenti trascurabili. Si usi l'angolo $\phi \in (\pi/6, \pi/2)$ in figura per determinare del sistema:



- (a) le equazioni cardinali statiche;
- (b) gli equilibri mediante le equazioni cardinali statiche;
- (c) le forze reattive in A e in C per tutti gli stati di quiete;
- (d) quale sarebbe la condizione di equilibrio qualora il coefficiente di attrito statico in C fosse non nullo.

Esercizio 2

Nel piano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si consideri il sistema di equazioni differenziali:

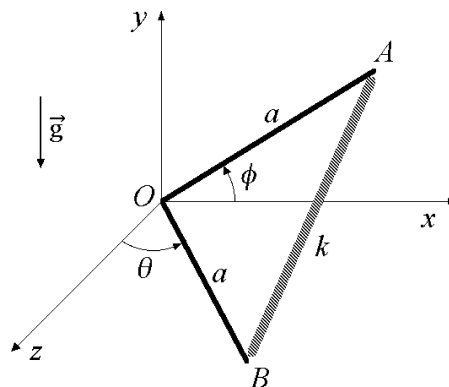
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 5x - 2xy + 3x^2 + y^2 + 3/4 \end{cases}$$

e se ne determinino:

- (a) i punti fissi;
- (b) le caratteristiche di stabilità dei punti fissi.

Esercizio 3

In una terna cartesiana ortogonale $Oxyz = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$, con l'asse Oy diretto verso l'alto, due aste omogenee pesanti uguali OA e OB , di massa m e lunghezza a , sono vincolate a muoversi con punto fisso O rispettivamente nel piano Oxy e nel piano Ozx . Una molla ideale di costante elastica k congiunge gli estremi A e B , sui quali agiscono inoltre forze viscose di uguale costante di frizione β . Assunti i vincoli ideali, usare le coordinate libere $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$ in figura per determinare del sistema:



- gli equilibri;
- le caratteristiche di stabilità degli equilibri;
- l'espressione dell'energia cinetica;
- le equazioni pure del moto;
- i modi normali delle piccole oscillazioni, per $\beta = 0$, attorno ad un equilibrio stabile a scelta.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Equazioni cardinali della statica

Le forze agenti sull'asta sono le seguenti:

- il peso $-mg\hat{e}_2$, applicato nel baricentro G ;
- la forza elastica $k(P - A)$ agente in A ;
- la reazione vincolare $\vec{\Phi}_A = \Phi_{Ay}\hat{e}_2$, pure applicata in A ;
- la reazione vincolare $\vec{\Phi}_C = \Phi_{Cx}\hat{e}_1 + \Phi_{Cy}\hat{e}_2$, con punto di applicazione C . Causa l'ipotesi di assenza di attrito, la reazione deve risultare ortogonale al segmento AB .

Il baricentro G coincide con il punto medio dell'asta omogenea, che costituisce un ovvio centro di simmetria. Rispetto ad A la posizione di G si individua per mezzo del vettore:

$$G - A = \frac{B - A}{2} = \frac{-a \cos \phi \hat{e}_1 + a \sin \phi \hat{e}_2}{2} = -\frac{a}{2} \cos \phi \hat{e}_1 + \frac{a}{2} \sin \phi \hat{e}_2.$$

Essendo però $A - O = a\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \phi}\right)\hat{e}_1$, la posizione assoluta di G è data da:

$$G - O = A - O + G - A = a\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} - \frac{1}{2} \cos \phi\right)\hat{e}_1 + \frac{a}{2} \sin \phi \hat{e}_2.$$

I vettori posizione dei punti P e C sono invece immediati, e indipendenti dal parametro lagrangiano:

$$P - O = a\hat{e}_1 \quad C - O = a\hat{e}_1 + a\hat{e}_2.$$

Dalle relazioni precedenti si ricava agevolmente l'espressione esplicita della forza elastica:

$$k(P - A) = -\frac{ka}{\operatorname{tg} \phi} \hat{e}_1.$$

Prima equazione cardinale statica

L'equazione impone che la somma delle forze esterne, attive e reattive, agenti sull'asta sia uguale a zero:

$$-mg\hat{e}_2 + k(P - A) + \Phi_{Ay}\hat{e}_2 + \Phi_{Cx}\hat{e}_1 + \Phi_{Cy}\hat{e}_2 = 0$$

ossia:

$$-mg\hat{e}_2 - \frac{ka}{\operatorname{tg} \phi} \hat{e}_1 + \Phi_{Ay}\hat{e}_2 + \Phi_{Cx}\hat{e}_1 + \Phi_{Cy}\hat{e}_2 = 0.$$

L'equazione equivale al sistema di equazioni scalari:

$$\begin{cases} -\frac{ka}{\operatorname{tg} \phi} + \Phi_{Cx} = 0 \\ -mg + \Phi_{Ay} + \Phi_{Cy} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \Phi_{Cx} = \frac{ka}{\operatorname{tg} \phi} \\ \Phi_{Ay} + \Phi_{Cy} = mg. \end{cases} \quad (1)$$

Seconda equazione cardinale statica in C

Conviene scrivere la seconda equazione cardinale statica rispetto al polo C , in modo da eliminare le reazioni vincolari $\vec{\Phi}_C$, che presenta due componenti incognite. Si ha così l'equazione:

$$(G - C) \wedge (-mg\hat{e}_2) + (A - C) \wedge \left(-\frac{ka}{\operatorname{tg} \phi} \hat{e}_1 + \Phi_{Ay} \hat{e}_2 \right) = 0$$

dove i vettori posizione rispetto a C sono dati da:

$$G - C = (G - O) - (C - O) = a \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \phi} - \frac{1}{2} \cos \phi \right) \hat{e}_1 + a \left(\frac{1}{2} \sin \phi - 1 \right) \hat{e}_2$$

$$A - C = (A - O) - (C - O) = a \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \phi} \hat{e}_1 - \hat{e}_2 \right)$$

e sostituiti nella relazione precedente porgono:

$$a \left[\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \phi} - \frac{1}{2} \cos \phi \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{1}{2} \sin \phi - 1 \right) \hat{e}_2 \right] \wedge (-mg\hat{e}_2) + a \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \phi} \hat{e}_1 - \hat{e}_2 \right) \wedge \left(-\frac{ka}{\operatorname{tg} \phi} \hat{e}_1 + \Phi_{Ay} \hat{e}_2 \right) = 0.$$

Con l'esecuzione dei prodotti si ottiene un'unica equazione scalare non banale, quella lungo \hat{e}_3 :

$$-mga \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} + \frac{1}{2} mga \cos \phi + \frac{a}{\operatorname{tg} \phi} \Phi_{Ay} - \frac{ka^2}{\operatorname{tg} \phi} = 0 \quad (2)$$

dalla quale segue:

$$\frac{a}{\operatorname{tg} \phi} \Phi_{Ay} = mga \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} + \frac{ka^2}{\operatorname{tg} \phi} - \frac{1}{2} mga \cos \phi$$

e si ricava quindi la componente verticale di $\vec{\Phi}_A$

$$\Phi_{Ay} = mg + ka - \frac{1}{2} mg \sin \phi. \quad (3)$$

Condizione di vincolo liscio in C

Poichè l'attrito radente in C deve assumersi trascurabile, la reazione vincolare $\vec{\Phi}_C$ è ortogonale all'asta. Il versore tangente ad AB vale:

$$\hat{\tau}(\phi) = \frac{B - A}{|B - A|} = -\cos \phi \hat{e}_1 + \sin \phi \hat{e}_2$$

per cui deve aversi:

$$0 = \vec{\Phi}_C \cdot \hat{\tau}(\phi) = -\cos \phi \Phi_{Cx} + \sin \phi \Phi_{Cy}. \quad (4)$$

(b) **Equilibri**

Non essendosi espressamente assunta l'ipotesi dei vincoli ideali, gli equilibri del sistema sono caratterizzati dalle equazioni cardinali statiche (1) e (2), corredate dalla condizione di vincolo liscio (4):

$$\begin{cases} \Phi_{Cx} = \frac{ka}{\operatorname{tg} \phi} \\ \Phi_{Ay} + \Phi_{Cy} = mg \\ \Phi_{Ay} = mg + ka - \frac{1}{2}mg \sin \phi \\ -\cos \phi \Phi_{Cx} + \sin \phi \Phi_{Cy} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Dalla seconda e dalla terza equazione si deduce la componente verticale della forza reattiva in C :

$$\Phi_{Cy} = mg - \Phi_{Ay} = mg - mg - ka + \frac{1}{2}mg \sin \phi = -ka + \frac{1}{2}mg \sin \phi.$$

Sostituite nell'ultima equazione (5), le componenti Φ_{Cx} e Φ_{Cy} forniscono l'equazione pura di equilibrio:

$$-\cos \phi \frac{ka}{\operatorname{tg} \phi} + \sin \phi \left(-ka + \frac{1}{2}mg \sin \phi \right) = 0$$

che eseguendo i prodotti diventa:

$$-ka \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} - ka \sin \phi + \frac{1}{2}mg \sin^2 \phi = 0$$

ed equivale a:

$$\sin^3 \phi = \frac{2ka}{mg}.$$

L'unica soluzione si scrive:

$$\phi = \arcsin \left(\frac{2ka}{mg} \right)^{1/3} := \phi^*$$

ed è definita nell'intervallo $\phi \in (\pi/6, \pi/2)$ se e soltanto se:

$$\sin(\pi/6) < \left(\frac{2ka}{mg} \right)^{1/3} < \sin(\pi/2)$$

ossia:

$$\frac{1}{8} < \frac{2ka}{mg} < 1.$$

(c) **Reazioni vincolari in A e C per gli stati di quiete**

Le reazioni vincolari nell'unico stato di quiete sono determinate dalle relazioni:

$$\Phi_{Ay} = mg + ka - \frac{1}{2}mg \sin \phi^* \quad \Phi_{Cx} = \frac{ka}{\operatorname{tg} \phi^*} \quad \Phi_{Cy} = -ka + \frac{1}{2}mg \sin \phi^*$$

e valgono dunque:

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_A &= \left(mg + ka - \frac{1}{2}mg \sin \phi^* \right) \hat{e}_2 \\ \vec{\Phi}_C &= \frac{ka}{\operatorname{tg} \phi^*} \hat{e}_1 + \left(-ka + \frac{1}{2}mg \sin \phi^* \right) \hat{e}_2\end{aligned}$$

con $\phi^* = \arcsin(2ka/mg)^{1/3}$.

(d) Condizione di equilibrio in caso di attrito in C

In presenza di attrito la condizione necessaria e sufficiente affinché la reazione vincolare $\vec{\Phi}_C$ sia effettivamente esplicabile dai vincoli è fornita dalla legge di Coulomb-Morin dell'attrito radente statico:

$$|\vec{\Phi}_C \cdot \hat{\tau}(\phi)| \leq \mu_s |\vec{\Phi}_C \cdot \hat{n}(\phi)|$$

dove μ_s indica il coefficiente di attrito radente statico ed $\hat{n}(\phi)$ il versore normale all'asta AB , che può esprimersi nella forma:

$$\hat{n}(\phi) = \frac{d\hat{\tau}(\phi)}{d\phi} = \sin \phi \hat{e}_1 + \cos \phi \hat{e}_2,$$

mentre la reazione vincolare $\vec{\Phi}_C$ vale:

$$\vec{\Phi}_C = \frac{ka}{\operatorname{tg} \phi} \hat{e}_1 + \left(-ka + \frac{1}{2}mg \sin \phi \right) \hat{e}_2.$$

Per la componente della reazione tangente all'asta si ha l'espressione:

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_C \cdot \hat{\tau}(\phi) &= -\cos \phi \frac{ka}{\operatorname{tg} \phi} + \sin \phi \left(-ka + \frac{1}{2}mg \sin \phi \right) = \\ &= -ka \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} - ka \sin \phi + \frac{1}{2}mg \sin^2 \phi = -\frac{ka}{\sin \phi} + \frac{1}{2}mg \sin^2 \phi\end{aligned}$$

mentre la componente normale risulta:

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_C \cdot \hat{n}(\phi) &= \sin \phi \frac{ka}{\operatorname{tg} \phi} + \cos \phi \left(-ka + \frac{1}{2}mg \sin \phi \right) = \\ &= ka \cos \phi - ka \cos \phi + \frac{1}{2}mg \sin \phi \cos \phi = \frac{1}{2}mg \sin \phi \cos \phi.\end{aligned}$$

La condizione di equilibrio diventa così:

$$\left| -\frac{ka}{\sin \phi} + \frac{1}{2}mg \sin^2 \phi \right| \leq \mu_s \left| \frac{1}{2}mg \sin \phi \cos \phi \right|$$

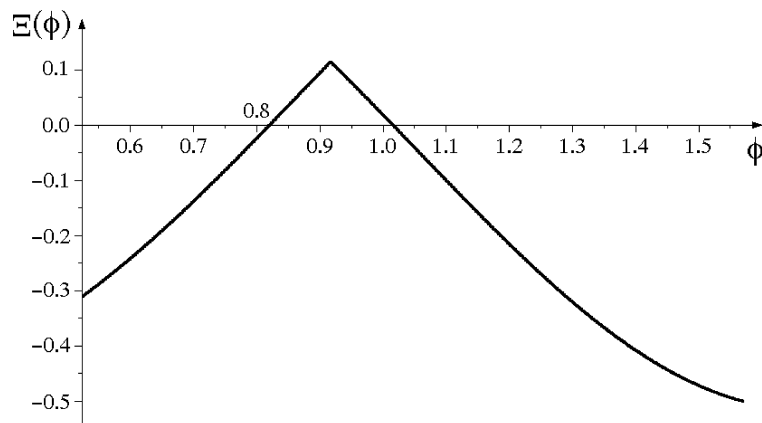
ovvero, equivalentemente:

$$\left| \sin^3 \phi - \frac{2ka}{mg} \right| \leq \mu_s \sin^2 \phi |\cos \phi| \quad \phi \in (\pi/6, \pi/2). \quad (6)$$

La disequazione non può essere risolta esplicitamente. Conformemente al principio di sicurezza, si nota che essa è certamente soddisfatta per $\phi = \phi^*$ nel caso $1/8 < 2ka/mg < 1$, quando il primo membro della (6) risulta nullo. Per $2ka/mg$, la regione di equilibrio cresce di ampiezza all'aumentare del coefficiente di attrito radente statico μ_s . In pratica, conviene determinare numericamente i valori di $\phi \in (\pi/6, \pi/2)$ per i quali la funzione ausiliaria:

$$\Xi(\phi) = \mu_s \sin^2 \phi |\cos \phi| - \left| \sin^3 \phi - \frac{2ka}{mg} \right|$$

risulta non negativa. Il grafico seguente illustra il caso di $2ka/mg = 0.5$ e $\mu_s = 0.3$:



I limiti dell'intervallo di definizione degli equilibri sono facilmente determinabili per via numerica:

$$0.8197789326 \leq \phi \leq 1.016031851.$$

L'intervallo ricomprende il valore di equilibrio $\phi^* = \arcsin(0.5)^{1/3} = 0.916883843$ relativo al caso di vincolo liscio.

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Punti fissi

I punti fissi sono le soluzioni costanti del sistema di equazioni differenziali e si ottengono risolvendo il sistema di equazioni algebriche:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 2xy + 5x + \frac{3}{4} = 0. \end{cases}$$

La prima equazione consente di ricavare il valore di equilibrio di y in termini di quello della variabile x :

$$y = 2x,$$

relazione che sostituita nella seconda equazione fornisce la condizione di equilibrio per x :

$$3x^2 + 5x + \frac{3}{4} = 0.$$

Di qui seguono le radici:

$$x = \frac{1}{6} \left(-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4}} \right) = \frac{1}{6} (-5 \pm 4) = \begin{array}{l} \nearrow -1/6 \\ \searrow -3/2 \end{array}$$

e i punti fissi richiesti:

$$(x, y) = (-1/6, -1/3) \quad (x, y) = (-3/2, -3).$$

(b) Proprietà di stabilità dei punti fissi

La stabilità dei punti fissi può essere analizzata ricorrendo al teorema di Liapunov di analisi lineare. Posto per brevità:

$$f(x, y) = 2x - y \quad g(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2xy + 5x + \frac{3}{4},$$

si calcolano le derivate parziali prime:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 6x - 2y + 5 & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y - 2x \end{array}$$

e la corrispondente matrice jacobiana:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \partial f(x, y)/\partial x & \partial f(x, y)/\partial y \\ \partial g(x, y)/\partial x & \partial g(x, y)/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6x - 2y + 5 & 2(y - x) \end{pmatrix}$$

in ciascun punto fisso.

Punto fisso $(x, y) = (-1/6, -1/3)$

La matrice rappresentativa del sistema linearizzato attorno a questo punto fisso vale:

$$J(-1/6, -1/3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 14/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

e i relativi autovalori si calcolano risolvendo l'equazione caratteristica:

$$0 = \det [J(-1/6, -1/3) - \lambda \mathbb{I}] = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 14/3 & -1/3 - \lambda \end{pmatrix}$$

ossia:

$$0 = (\lambda - 2) \left(\lambda + \frac{1}{3} \right) + \frac{14}{3} = \lambda^2 - \frac{5}{3} \lambda + 4$$

che porge le soluzioni:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - 4 \cdot 4} \right) = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 144}}{6} = \frac{5 \pm i\sqrt{119}}{6}.$$

Si tratta di due radici complesse coniugate con parte reale positiva, che assicurano l'instabilità del punto fisso in forza del teorema di analisi lineare.

Punto fisso $(x, y) = (-3/2, -3)$

Nella fattispecie il sistema delle equazioni linearizzate attorno al punto fisso ha la matrice di rappresentazione:

$$J(-3/2, -3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

con equazione caratteristica:

$$0 = [J(-3/2, -3) - \lambda \mathbb{I}] = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 2 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 3) + 2$$

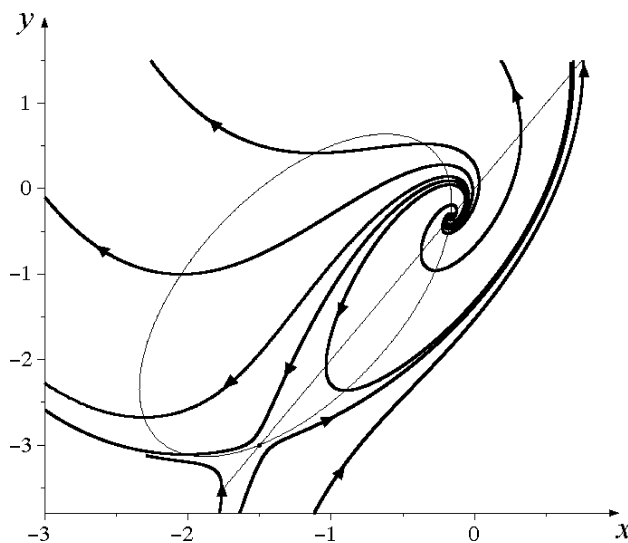
che eseguendo i prodotti e semplificando i termini simili si riduce a:

$$\lambda^2 + \lambda - 4 = 0.$$

Le radici dell'equazione sono reali e di segno opposto:

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-4)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

La presenza dell'autovalore positivo $(-1 + \sqrt{17})/2$ implica l'instabilità del punto fisso per il teorema di analisi lineare. La figura seguente illustra l'aspetto qualitativo del ritratto di fase:



dove per completezza sono riportate, in tratto sottile, anche le nullocline del sistema — la retta $f(x, y) = 0$ e l'ellisse $g(x, y) = 0$. Si osservi che a destra della retta risulta $\dot{x} > 0$, mentre a sinistra vale $\dot{x} < 0$; analogamente, si ha \dot{y} entro la porzione di piano delimitata dall'ellisse, mentre all'esterno della curva è $\dot{y} > 0$.

Soluzione dell'esercizio 3

(a) Equilibri

Le sollecitazioni attive applicate al sistema consistono nel peso, nell'interazione elastica fra gli estremi A e B , e nelle resistenze viscosse agenti sugli stessi estremi. Di tutte queste sollecitazioni è necessario calcolare le componenti generalizzate in termini delle coordinate lagrangiane θ, ϕ e, laddove necessario, delle velocità generalizzate $\dot{\theta}, \dot{\phi}$. A tale scopo sono fondamentali i vettori posizione degli estremi A e B in funzione delle coordinate generalizzate, la cui determinazione è immediata:

$$A - O = a \cos \phi \hat{e}_1 + a \sin \phi \hat{e}_2 \qquad B - O = a \sin \theta \hat{e}_1 + a \cos \theta \hat{e}_3. \quad (7)$$

Forze peso

Le forze peso sono descritte dall'appropriato potenziale gravitazionale, somma dei contributi relativi a ciascuna asta omogenea. I baricentri delle aste si identificano con i rispettivi punti medi, per cui il potenziale gravitazionale risulta:

$$\begin{aligned} U_g &= -mg \hat{e}_2 \cdot \frac{A - O}{2} - mg \hat{e}_2 \cdot \frac{B - O}{2} = \\ &= -mg \hat{e}_2 \cdot \frac{a \cos \phi \hat{e}_1 + a \sin \phi \hat{e}_2}{2} - mg \hat{e}_2 \cdot \frac{a \sin \theta \hat{e}_1 + a \cos \theta \hat{e}_3}{2} = -\frac{1}{2} m g a \sin \phi. \end{aligned}$$

Da notare che l'asta OB non concorre in alcun modo al potenziale gravitazionale, essendo vincolata a muoversi nel piano orizzontale Ozx .

Forze elastiche

All'interazione elastica fra i punti A e B è associato il potenziale:

$$U_{el} = -\frac{k}{2} |A - B|^2$$

in cui figura il vettore posizione di un estremo relativamente all'altro:

$$B - A = a(\sin \theta - \cos \phi) \hat{e}_1 - a \sin \phi \hat{e}_2 + a \cos \theta \hat{e}_3.$$

Si ha pertanto l'espressione:

$$\begin{aligned} U_{el} &= -\frac{k}{2} |a(\sin \theta - \cos \phi) \hat{e}_1 - a \sin \phi \hat{e}_2 + a \cos \theta \hat{e}_3|^2 = \\ &= -\frac{k a^2}{2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \phi - 2 \sin \theta \cos \phi + \sin^2 \phi + \cos^2 \theta) = \\ &= -\frac{k a^2}{2} (2 - 2 \sin \theta \cos \phi) = k a^2 (-1 + \sin \theta \cos \phi). \end{aligned}$$

Forze di resistenza viscosa

Le forze di resistenza viscosa agenti su A e B sono date dai vettori:

$$\vec{F}_A = -\beta\dot{A} \quad \vec{F}_B = -\beta\dot{B}$$

dove le velocità istantanee si ottengono derivando in t i vettori posizione (7):

$$\dot{A} = a(-\sin\phi\hat{e}_1 + \cos\phi\hat{e}_2)\dot{\phi} \quad \dot{B} = a(\cos\theta\hat{e}_1 - \sin\theta\hat{e}_3)\dot{\theta}.$$

Dagli stessi vettori si hanno le derivate parziali prime:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial\theta} &= 0 & \frac{\partial A}{\partial\phi} &= a(-\sin\phi\hat{e}_1 + \cos\phi\hat{e}_2) \\ \frac{\partial B}{\partial\theta} &= a(\cos\theta\hat{e}_1 - \sin\theta\hat{e}_3) & \frac{\partial B}{\partial\phi} &= 0 \end{aligned}$$

che consentono di calcolare le componenti generalizzate delle resistenze viscosse:

$$\begin{aligned} Q_\theta^{rv} &= -\beta\dot{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial\theta} - \beta\dot{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial\theta} = -\beta\dot{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial\theta} = -\beta a^2 \dot{\theta} \\ Q_\phi^{rv} &= -\beta\dot{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial\phi} - \beta\dot{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial\phi} = -\beta\dot{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial\phi} = -\beta a^2 \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (8)$$

Potenziale del sistema

Al sistema si associa un potenziale che è la somma dei potenziali parziali gravitazionale ed elastico:

$$U(\theta, \phi) = -\frac{1}{2}mga \sin\phi + ka^2 \sin\theta \cos\phi \quad (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2.$$

Equilibri

Poichè le forze viscosse (8) sono nulle alla quiete, gli equilibri vanno identificati con tutti e soli i punti critici del potenziale e si ottengono imponendo l'annullarsi simultaneo delle derivate parziali prime:

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = ka^2 \cos\theta \cos\phi \quad \frac{\partial U}{\partial\phi} = -\frac{1}{2}mga \cos\phi - ka^2 \sin\theta \sin\phi$$

ovvero risolvendo il sistema di equazioni trigonometriche:

$$\begin{cases} ka^2 \cos\theta \cos\phi = 0 \\ -\frac{1}{2}mga \cos\phi - ka^2 \sin\theta \sin\phi = 0 \end{cases}$$

che si pone peraltro nella forma adimensionale equivalente:

$$\begin{cases} \cos\theta \cos\phi = 0 \\ \lambda \cos\phi + \sin\theta \sin\phi = 0 \end{cases} \quad (9)$$

dopo avere introdotto il parametro d'ordine:

$$\lambda = \frac{mg}{2ka}.$$

Dalla prima equazione (9) seguono due possibili casi.

- (i) Per $\cos \phi = 0$ la seconda equazione di equilibrio impone che si abbia anche $\sin \theta = 0$, porgendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \cos \phi = 0 \\ \sin \theta = 0 \end{cases}$$

cui corrispondono le soluzioni distinte — e definite incondizionatamente —

$$(\theta, \phi) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\theta, \phi) = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right) \quad (\theta, \phi) = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\theta, \phi) = \left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right).$$

- (ii) Per $\cos \theta = 0$ si hanno le radici $\theta = \pi/2$ e $\theta = -\pi/2$, che obbligano a considerare due ulteriori sottocasi:

- per $\theta = \pi/2$ la seconda equazione (9) diventa $\lambda \cos \phi + \sin \phi = 0$ e fornisce le soluzioni fisicamente distinte:

$$\phi = \arctg(-\lambda) = -\arctg \lambda := -\phi^* \quad \phi = \pi - \phi^*,$$

che corrispondono perciò agli equilibri:

$$(\theta, \phi) = \left(\frac{\pi}{2}, -\phi^*\right) \quad (\theta, \phi) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \phi^*\right);$$

- se invece $\theta = -\pi/2$, la seconda equazione (9) si riduce a $\lambda \cos \phi - \sin \phi = 0$ e porge le radici:

$$\phi = \arctg \lambda = \phi^* \quad \phi = \pi + \phi^*$$

da cui seguono le posizioni di equilibrio:

$$(\theta, \phi) = \left(-\frac{\pi}{2}, \phi^*\right) \quad (\theta, \phi) = \left(-\frac{\pi}{2}, \pi + \phi^*\right)$$

Si osservi che anche questi equilibri sono definiti incondizionatamente, con:

$$\phi^* = \arctg \lambda \in (0, \pi/2).$$

(b) Stabilità degli equilibri

Si verifica facilmente che le sollecitazioni non posizionali (8) hanno natura completamente dissipativa. La potenza di tali sollecitazioni vale infatti:

$$\pi = Q_{\theta}^{rv} \dot{\theta} + Q_{\phi}^{rv} \dot{\phi} = -\beta a^2 \dot{\theta}^2 - \beta a^2 \dot{\phi}^2 = -\beta a^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \leq 0$$

e si annulla unicamente per $(\dot{\theta}, \dot{\phi}) = (0, 0)$. Appare del resto evidente che tutti gli equilibri ordinari del sistema sono isolati, dal momento che il loro numero è finito. L'analisi di stabilità degli equilibri può quindi essere condotta in modo completo ricorrendo alla forma forte del teorema di Lagrange-Dirichlet, basata sui criteri di Barbasin-Krasovskii. A questo scopo si rende necessario il calcolo delle derivate parziali seconde del potenziale U :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta, \phi) &= -ka^2 \sin \theta \cos \phi & \frac{\partial^2 U}{\partial \phi \partial \theta}(\theta, \phi) &= -ka^2 \cos \theta \sin \phi \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \phi}(\theta, \phi) &= -ka^2 \cos \theta \sin \phi & \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}(\theta, \phi) &= \frac{1}{2}mga \sin \phi - ka^2 \sin \theta \cos \phi \end{aligned}$$

e l'analisi spettrale della relativa matrice hessiana:

$$H_U(\theta, \phi) = ka^2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi + \lambda \sin \phi \end{pmatrix}$$

in ciascuna configurazione di equilibrio. Per semplicità conviene rimuovere il fattore costante positivo ka^2 e considerare l'hessiana adimensionalizzata:

$$h_U(\theta, \phi) = \frac{1}{ka^2} H_U(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi + \lambda \sin \phi \end{pmatrix}.$$

Configurazione $(\theta, \phi) = (0, \pi/2)$

In questo caso la matrice hessiana si riduce a:

$$h_U(0, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

e ha determinante negativo:

$$\det h_U(0, \pi/2) = -1,$$

circostanza che esclude il ricorrere di un massimo relativo proprio del potenziale in questa posizione. Si conclude quindi che l'equilibrio è instabile per la forma forte del teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(\theta, \phi) = (0, -\pi/2)$

La matrice hessiana vale:

$$h_U(0, -\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

ancora con determinante negativo:

$$\det h_U(0, -\pi/2) = -1$$

e conseguente instabilità della configurazione.

Configurazione $(\theta, \phi) = (\pi, \pi/2)$

Nella fattispecie l'hessiana è identica a quella considerata nel caso precedente:

$$h_U(\pi, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

e l'equilibrio risulta, del pari, instabile.

Configurazione $(\theta, \phi) = (\pi, -\pi/2)$

Per questa configurazione il calcolo esplicito della matrice hessiana porge:

$$h_U(\pi, -\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

La matrice è indefinita, come nei casi precedenti, escludendo che la configurazione in esame possa costituire un massimo relativo proprio del potenziale. Ne segue, come prima, l'instabilità dell'equilibrio.

Configurazione $(\theta, \phi) = (\pi/2, -\phi^*)$

In questo caso la matrice hessiana assume la forma diagonale:

$$h_U(\pi/2, -\phi^*) = \begin{pmatrix} -\cos \phi^* & 0 \\ 0 & -\cos \phi^* - \lambda \sin \phi^* \end{pmatrix}$$

con entrambi gli autovalori negativi. La configurazione rappresenta perciò un massimo relativo proprio del potenziale, asintoticamente stabile.

Configurazione $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi - \phi^*)$

La matrice hessiana si scrive ancora in forma diagonale:

$$h_U(\pi/2, \pi - \phi^*) = \begin{pmatrix} \cos \phi^* & 0 \\ 0 & \cos \phi^* + \lambda \sin \phi^* \end{pmatrix}$$

ma con entrambi gli autovalori positivi, individuando l'equilibrio come un minimo relativo proprio del potenziale. L'instabilità segue dal teorema forte di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(\theta, \phi) = (-\pi/2, \phi^*)$

In questo caso la matrice hessiana è identica a quella precedente:

$$h_U(-\pi/2, \phi^*) = \begin{pmatrix} \cos \phi^* & 0 \\ 0 & \cos \phi^* + \lambda \sin \phi^* \end{pmatrix}$$

e porta a concludere che anche questo equilibrio è instabile.

Configurazione $(\theta, \phi) = (-\pi/2, \pi + \phi^*)$

Questo punto critico risulta un massimo relativo proprio del potenziale, dato il carattere definito negativo della matrice hessiana:

$$h_U(-\pi/2, \pi + \phi^*) = \begin{pmatrix} -\cos \phi^* & 0 \\ 0 & -\cos \phi^* - \lambda \sin \phi^* \end{pmatrix}.$$

L'equilibrio si dimostra quindi asintoticamente stabile per l'enunciato forte del teorema di Lagrange-Dirichlet.

(c) Energia cinetica

L'energia cinetica del sistema è la somma delle energie cinetiche delle due aste OA e OB . La prima si muove nel piano Oxy con velocità angolare $\dot{\phi}\hat{e}_3$ attorno all'asse Oz , e la sua energia cinetica si scrive perciò:

$$T_{OA} = \frac{1}{2}I_{Oz}^{OA}|\dot{\phi}\hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2}\frac{ma^2}{3}\dot{\phi}^2 = \frac{ma^2}{6}\dot{\phi}^2.$$

Per l'asta OB il moto avviene nel piano coordinato Ozx attorno all'asse Oy , con velocità angolare $\dot{\theta}\hat{e}_2$:

$$T_{OB} = \frac{1}{2}I_{Oy}^{OB}|\dot{\theta}\hat{e}_2|^2 = \frac{1}{2}\frac{ma^2}{3}\dot{\theta}^2 = \frac{ma^2}{6}\dot{\theta}^2.$$

L'energia cinetica del sistema vale pertanto:

$$T = T_{OA} + T_{OB} = \frac{ma^2}{6}\dot{\phi}^2 + \frac{ma^2}{6}\dot{\theta}^2.$$

(d) Equazioni pure del moto

Le equazioni pure del moto sono quelle di Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \frac{\partial U}{\partial \theta} + Q_{\theta}^{rv} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= \frac{\partial U}{\partial \phi} + Q_{\phi}^{rv} \end{aligned}$$

con i binomi lagrangiani:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{ma^2}{3}\ddot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{ma^2}{3}\ddot{\phi}$$

le derivate parziali del potenziale:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = ka^2 \cos \theta \cos \phi \qquad \frac{\partial U}{\partial \phi} = -\frac{1}{2}mga \cos \phi - ka^2 \sin \theta \sin \phi$$

e le componenti generalizzate (8) delle forze dissipative:

$$Q_{\theta}^{rv} = -\beta a^2 \dot{\theta} \qquad Q_{\phi}^{rv} = -\beta a^2 \dot{\phi}.$$

Si hanno così le equazioni del moto:

$$\begin{cases} \frac{ma^2}{3}\ddot{\theta} = ka^2 \cos \theta \cos \phi - \beta a^2 \dot{\theta} \\ \frac{ma^2}{3}\ddot{\phi} = -\frac{1}{2}mga \cos \phi - ka^2 \sin \theta \sin \phi - \beta a^2 \dot{\phi}. \end{cases}$$

(e) Modi normali delle piccole oscillazioni

Qualora sia $\beta = 0$ le forze dissipative vengono rimosse dal sistema, che quindi diventa posizionale conservativo. Gli equilibri rimangono invariati, ma cambiano le loro caratteristiche di stabilità. Più precisamente, i massimi relativi propri di U risultano ora stabili per il teorema classico di Lagrange-Dirichlet. Gli stessi massimi perdono il carattere dell'attrattività a causa della conservazione dell'energia meccanica, per cui la stabilità è semplice e non più asintotica. Per contro, tutti gli altri equilibri sono contraddistinti da una matrice hessiana con almeno un autovalore positivo, e questa circostanza basta a garantirne ancora l'instabilità; il risultato segue ora però dal teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet. In definitiva, i soli equilibri stabili del sistema sono:

$$(\theta, \phi) = (\pi/2, -\phi^*) \qquad (\theta, \phi) = (-\pi/2, \pi + \phi^*)$$

e condividono la matrice hessiana del potenziale:

$$H_U(\pi/2, -\phi^*) = H_U(-\pi/2, \pi + \phi^*) = ka^2 \begin{pmatrix} -\cos \phi^* & 0 \\ 0 & -\cos \phi^* - \lambda \sin \phi^* \end{pmatrix}$$

oltre a quella dell'energia cinetica, che è costante:

$$A = A(\theta, \phi) = ma^2 \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

I modi normali di oscillazione sono quindi identici, salvo che per la diversa ubicazione della posizione di equilibrio. Degli elementi diagonali della matrice hessiana si può dare una espressione più esplicita:

$$\begin{aligned} -\cos \phi^* &= -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi^*}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \\ -\cos \phi^* - \lambda \sin \phi^* &= -\cos \phi^* (1 + \lambda \operatorname{tg} \phi^*) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} (1 + \lambda^2) = -\sqrt{1 + \lambda^2} \end{aligned}$$

in modo che:

$$\omega^2 A + H_U(\pi/2, -\phi^*) = ma^2 \omega^2 \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} + ka^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{1 + \lambda^2} \end{pmatrix}$$

e l'equazione caratteristica $\det[\omega^2 A + H_U(\pi/2, -\phi^*)] = 0$ diventa:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{m\omega^2}{3k} - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 \\ 0 & \frac{m\omega^2}{3k} - \sqrt{1+\lambda^2} \end{pmatrix} = 0$$

ossia:

$$\left(\frac{m\omega^2}{3k} - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \right) \left(\frac{m\omega^2}{3k} - \sqrt{1+\lambda^2} \right) = 0.$$

Se ne deducono le soluzioni in ω^2 :

$$\omega^2 = \frac{3}{\sqrt{1+\lambda^2}} \frac{k}{m} \qquad \omega^2 = 3\sqrt{1+\lambda^2} \frac{k}{m}$$

e le pulsazioni normali richieste:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{1+\lambda^2}}} \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{3\sqrt{1+\lambda^2}} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

con $\lambda = mg/2ka > 0$ e $\omega_1 < \omega_2$. La prima pulsazione caratterizza il modo normale “basso”, mentre la seconda è associata a quello “alto”. I vettori delle ampiezze sono banali, dato la natura diagonale delle matrici A e $H_U(\pi/2, -\phi^*)$. Per fissare le idee si scrivono esplicitamente i modi normali relativi alla configurazione $(\theta, \phi) = (\pi/2, -\phi^*)$.

Modo normale basso

Il modo normale di oscillazione è espresso da:

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ -\phi^* \end{pmatrix} + A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

con $A_1 \neq 0$ e φ_1 costanti reali arbitrarie. L'asta OB oscilla attorno alla posizione di equilibrio che la vede allineata lungo il semiasse Ox positivo, mentre OA si mantiene in quiete nel piano Oxy formando un angolo costante $-\phi^*$ con lo stesso semiasse.

Modo normale alto

Questo modo normale di oscillazione si scrive:

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ -\phi^* \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

essendo $A_2 \neq 0$ e φ_2 costanti reali assegnate a piacere. Nella fattispecie è l'asta OB a rimanere in quiete nella sua posizione allineata con il semiasse Ox positivo, mentre OA oscilla nel piano verticale Oxy con una inclinazione media $-\phi^*$ rispetto allo stesso semiasse.