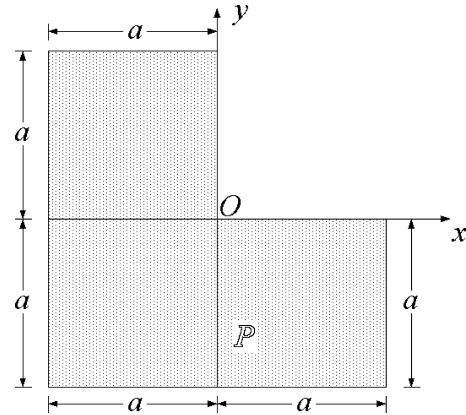


Esercizio 1

Una piastra \mathbb{P} giace nel piano coordinato Oxy di una terna ortogonale $Oxyz$, come mostrato in figura. La densità della lamina è espressa da:

$$\sigma(Q) = \frac{\mu}{a^4}|Q - O|^2 \quad \forall Q \in \mathbb{P}$$

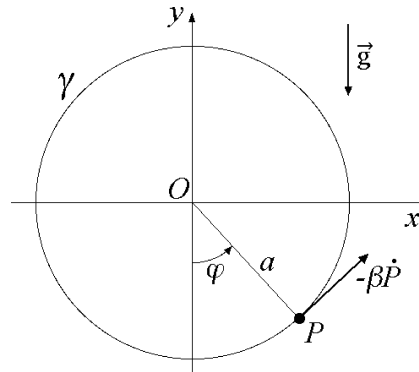
dove μ ed a indicano una massa e una lunghezza caratteristiche. Si determinino del sistema:



- (a) la massa e la posizione del baricentro rispetto a $Oxyz$;
- (b) la matrice d'inerzia in $Oxyz$ e i momenti principali d'inerzia relativi ad O .

Esercizio 2

Un punto materiale P , di massa m , scorre lungo una guida circolare γ di centro O e raggio a fissa nel piano Oxy di una terna ortogonale $Oxyz = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$, con asse Oy verticale. Oltre al peso, sul punto agisce anche una resistenza $-\beta\dot{P}$, essendo \dot{P} la velocità di P relativa a $Oxyz$. Rispetto a un riferimento inerziale Ωxyz (non in figura), la terna $Oxyz$ trasla secondo la legge $O - \Omega = \varepsilon \cos(\omega t)\hat{e}_1$, con ε e ω costanti positive. Usando l'angolo $\varphi \in \mathbb{R}$ come coordinata generalizzata, determinare nel riferimento $Oxyz$:

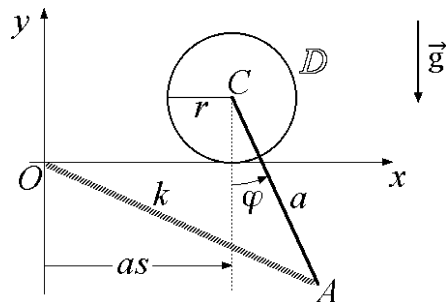


- (a) le equazioni pure del moto di P nel caso la guida γ sia liscia;
- (b) la soluzione stazionaria di tali equazioni per $\varphi \sim 0$, assumendo quindi $\sin \varphi \sim \varphi$ e $\cos \varphi \sim 1$;
- (c) la condizione su ω affinché il sistema descritto nell'approssimazione $\varphi \sim 0$ del punto (b) sia risonante;
- (d) la condizione di equilibrio qualora γ abbia un coefficiente di attrito statico $\mu_s > 0$.

Esercizio 3

Nel piano verticale Oxy di una terna inerziale $Oxyz$ un disco circolare omogeneo \mathbb{D} , di centro C , raggio r e massa m , rotola senza strisciare lungo l'asse orizzontale Ox . Un'asta omogenea AC , di massa m e lunghezza $a > r$ è incernierata a \mathbb{D} in C . Sul sistema agiscono il peso ed una interazione elastica di costante k fra i punti A ed O . Supposti i vincoli ideali ed introdotti i parametri lagrangiani $s \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in \mathbb{R}$ in figura, determinare del sistema:

- (a) gli equilibri;
- (b) le proprietà di stabilità degli equilibri;
- (c) l'espressione dell'energia cinetica;
- (d) le equazioni pure del moto;
- (e) l'espressione della quantità di moto;
- (f) le frequenze normali delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile per $r = a/2$ e $k = 3mg/5a$.



Soluzione dell'esercizio 1

Si può considerare la piastra \mathbb{P} come l'unione $\mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$ delle parti seguenti:

- il rettangolo $\mathbb{P}_1 = \{(x, y) \in [-a, 0] \times [-a, a]\}$;
- il quadrato $\mathbb{P}_2 = \{(x, y) \in [0, a] \times [-a, 0]\}$,

su ciascuna delle quali la densità areale di massa assume la medesima forma esplicita:

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{a^4}(x^2 + y^2) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{P}.$$

(a) Massa e baricentro

Massa della piastra \mathbb{P}_1

La massa della piastra rettangolare si ottiene integrando la densità areale sul dominio \mathbb{P}_1 :

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_{\mathbb{P}_1} \sigma dA = \int_{-a}^0 dx \int_{-a}^a dy \frac{\mu}{a^4}(x^2 + y^2) = \frac{\mu}{a^4} \int_{-a}^0 dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=-a}^a = \\ &= \frac{\mu}{a^4} \int_{-a}^0 \left(2ax^2 + \frac{2}{3}a^3 \right) dx = \frac{\mu}{a^4} \left[2a \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}a^3 x \right]_{-a}^0 = \frac{\mu}{a^4} \left(\frac{2a}{3}a^3 + \frac{2}{3}a^3 a \right) = \frac{4}{3}\mu. \end{aligned}$$

Massa della piastra \mathbb{P}_2

L'integrazione della densità sul quadrato \mathbb{P}_2 fornisce la relativa massa:

$$\begin{aligned} m_2 &= \int_{\mathbb{P}_2} \sigma dA = \int_0^a dx \int_{-a}^0 dy \frac{\mu}{a^4}(x^2 + y^2) = \frac{\mu}{a^4} \int_0^a dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=-a}^0 = \\ &= \frac{\mu}{a^4} \int_0^a \left(x^2 a + \frac{a^3}{3} \right) dx = \frac{\mu}{a^4} \left[\frac{x^3}{3} a + \frac{a^3}{3} x \right]_0^a = \frac{\mu}{a^4} \left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3} \right) = \frac{2}{3}\mu. \end{aligned}$$

Massa del sistema

La massa del sistema è la somma delle masse parziali di \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 :

$$m = m_1 + m_2 = \frac{4}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu = 2\mu.$$

Baricentro della piastra \mathbb{P}_1

L'asse Ox costituisce un evidente asse di simmetria per la piastra \mathbb{P}_1 , il cui baricentro è quindi individuato da un vettore posizione della forma:

$$G_1 - O = x_1 \hat{e}_1$$

con ascissa:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{m_1} \int_{\mathbb{P}_1} x \sigma \, dA = \frac{3}{4\mu} \int_{-a}^0 dx \int_{-a}^a dy \frac{\mu}{a^4} (x^2 + y^2) x = \frac{3}{4a^4} \int_{-a}^0 dx \left[x^3 y + x \frac{y^3}{3} \right]_{y=-a}^a = \\ &= \frac{3}{4a^4} \int_{-a}^0 \left(2ax^3 + \frac{2}{3}a^3x \right) dx = \frac{3}{4a^4} \left[2a \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}a^3 \frac{x^2}{2} \right]_{-a}^0 = \frac{3}{4a^4} \left(-\frac{a^5}{2} - \frac{a^5}{3} \right) = -\frac{5}{8}a. \end{aligned}$$

Si conclude così che:

$$G_1 - O = -\frac{5}{8}a \hat{e}_1.$$

Baricentro della piastra \mathbb{P}_2

Per il quadrato \mathbb{P}_2 un asse di simmetria è costituito dalla retta $y = -x$: i punti simmetrici rispetto ad essa si collocano infatti alla stessa distanza dall'origine O e presentano perciò lo stesso valore della densità areale, che esclusivamente di tale distanza è funzione. Il vettore posizione del baricentro G_2 della piastra \mathbb{P}_2 si scrive perciò:

$$G_2 - O = x_2 \hat{e}_1 - x_2 \hat{e}_2$$

dove l'ascissa viene calcolata direttamente dalla definizione:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{m_2} \int_{\mathbb{P}_2} x \sigma \, dA = \frac{3}{2\mu} \int_0^a dx \int_{-a}^0 dy \frac{\mu}{a^4} (x^2 + y^2) x = \frac{3}{2a^4} \int_0^a dx \left[x^3 y + x \frac{y^3}{3} \right]_{y=-a}^0 = \\ &= \frac{3}{2a^4} \int_0^a \left(x^3 a + x \frac{a^3}{3} \right) dx = \frac{3}{2a^4} \left[\frac{x^4}{4} a + \frac{x^2}{2} \frac{a^3}{3} \right]_0^a = \frac{3}{2a^4} \left(\frac{a^5}{4} + \frac{a^5}{6} \right) = \frac{5}{8}a \end{aligned}$$

per cui:

$$G_2 - O = \frac{5}{8}a \hat{e}_1 - \frac{5}{8}a \hat{e}_2.$$

Baricentro del sistema

La misura nulla dell'intersezione $\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2$, che non contribuisce in alcun modo agli integrali di superficie calcolati per le masse e i baricentri parziali, autorizza a determinare il baricentro G del sistema ricorrendo al teorema distributivo. Si ha così:

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_1(G_1 - O) + m_2(G_2 - O)}{m} = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{4}{3}\mu \left(-\frac{5}{8}a \hat{e}_1 \right) + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{5}{8}a \hat{e}_1 - \frac{5}{8}a \hat{e}_2 \right) \right] = \\ &= \frac{2}{3} \left(-\frac{5}{8}a \hat{e}_1 \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{5}{8}a \hat{e}_1 - \frac{5}{8}a \hat{e}_2 \right) = -\frac{5}{24}a \hat{e}_1 - \frac{5}{24}a \hat{e}_2. \end{aligned}$$

Da notare che il baricentro risulta collocato lungo la retta $y = x$, che è immediato riconoscere come asse di simmetria della piastra \mathbb{P} .

(b) **Matrice d'inerzia in $Oxyz$ e momenti principali d'inerzia in O**

Matrice d'inerzia in $Oxyz$ del sistema

La piastra è collocata nel piano coordinato Oxy e quindi la matrice d'inerzia relativa alla terna $Oxyz$ deve assumere la forma generale:

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, la presenza dell'asse di simmetria $y = x$ porta a concludere che $L_{xx} = L_{yy}$, per cui la matrice precedente si riduce a:

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 2L_{xx} \end{pmatrix}$$

e richiede il calcolo del solo momento L_{xx} e del solo prodotto d'inerzia L_{xy} . Il primo può intendersi come somma dei momenti d'inerzia rispetto all'asse Ox di \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 , e risulta

$$L_{xx} = L_{xx}^{\mathbb{P}_1} + L_{xx}^{\mathbb{P}_2} = \frac{28}{45}\mu a^2 + \frac{14}{45}\mu a^2 = \frac{14}{15}\mu a^2$$

essendo:

$$\begin{aligned} L_{xx}^{\mathbb{P}_1} &= \int_{\mathbb{P}_1} y^2 \sigma dA = \int_{-a}^0 dx \int_{-a}^a dy y^2 \frac{\mu}{a^4} (x^2 + y^2) = \frac{\mu}{a^4} \int_{-a}^0 dx \int_{-a}^a dy (x^2 y^2 + y^4) = \\ &= \frac{\mu}{a^4} \int_{-a}^0 dx \left[x^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{y=-a}^a = \frac{\mu}{a^4} \int_{-a}^0 \left(\frac{2}{3} a^3 x^2 + \frac{2}{5} a^5 \right) dx = \frac{\mu}{a^4} \left(\frac{2}{3} a^3 \frac{a^3}{3} + \frac{2}{5} a^5 a \right) = \frac{28}{45} \mu a^2 \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} L_{xx}^{\mathbb{P}_2} &= \int_{\mathbb{P}_2} y^2 \sigma dA = \frac{\mu}{a^4} \int_0^a dx \int_{-a}^0 dy (x^2 y^2 + y^4) = \frac{\mu}{a^4} \int_0^a dx \left[x^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{y=-a}^0 = \\ &= \frac{\mu}{a^4} \int_0^a \left(x^2 \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} \right) dx = \frac{\mu}{a^4} \left[\frac{x^3}{3} \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} x \right]_0^a = \frac{\mu}{a^4} \left(\frac{a^6}{9} + \frac{a^6}{5} \right) = \frac{14}{45} \mu a^2. \end{aligned}$$

Per il prodotto d'inerzia vale invece:

$$L_{xy} = L_{xy}^{\mathbb{P}_1} + L_{xy}^{\mathbb{P}_2} = \frac{1}{4} \mu a^2$$

con $L_{xy}^{\mathbb{P}_1} = 0$ in quanto Ox è un asse di simmetria per \mathbb{P}_1 , mentre:

$$L_{xy}^{\mathbb{P}_2} = - \int_{\mathbb{P}_2} xy \sigma dA = - \int_0^a dx \int_{-a}^0 dy \frac{\mu}{a^4} (x^2 + y^2) xy = - \frac{\mu}{a^4} \int_0^a dx \int_{-a}^0 dy (x^3 y + xy^3) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\mu}{a^4} \int_0^a dx \left[x^3 \frac{y^2}{2} + x \frac{y^4}{4} \right]_{y=-a}^0 = -\frac{\mu}{a^4} \int_0^a \left(-x^3 \frac{a^2}{2} - x \frac{a^4}{4} \right) dx = \\
&= -\frac{\mu}{a^4} \left[-\frac{x^4}{4} \frac{a^2}{2} - \frac{x^2}{2} \frac{a^4}{4} \right]_0^a = \frac{\mu}{a^4} \left(\frac{a^6}{8} + \frac{a^6}{8} \right) = \frac{1}{4} \mu a^2.
\end{aligned}$$

La matrice d'inerzia della piastra risulta pertanto:

$$[L_O] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 14/15 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 14/15 & 0 \\ 0 & 0 & 28/15 \end{pmatrix}.$$

Momenti principali d'inerzia in O

I momenti principali d'inerzia in O della piastra sono, per definizione, gli autovalori della matrice d'inerzia relativa alla terna $Oxyz$. Si tratta dunque di risolvere in λ il problema agli autovalori:

$$\det([L_O] - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

che con la sostituzione $\lambda = \mu a^2 \mathcal{X}$ si riduce alla forma adimensionale:

$$\det\left(\frac{1}{\mu a^2} [L_O] - \mathcal{X} \mathbb{I}\right) = 0$$

ossia, esplicitamente:

$$\det \begin{pmatrix} 14/15 - \mathcal{X} & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 14/15 - \mathcal{X} & 0 \\ 0 & 0 & 28/15 - \mathcal{X} \end{pmatrix} = 0.$$

Ne deriva l'equazione caratteristica:

$$\left[\left(\mathcal{X} - \frac{14}{15} \right)^2 - \frac{1}{16} \right] \left(\frac{28}{15} - \mathcal{X} \right) = 0$$

vale a dire:

$$\left(\mathcal{X} - \frac{14}{15} - \frac{1}{4} \right) \left(\mathcal{X} - \frac{14}{15} + \frac{1}{4} \right) \left(\frac{28}{15} - \mathcal{X} \right) = 0$$

e quindi:

$$\left(\mathcal{X} - \frac{71}{60} \right) \left(\mathcal{X} - \frac{41}{60} \right) \left(\frac{28}{15} - \mathcal{X} \right) = 0.$$

Ne derivano le radici:

$$\mathcal{X} = \frac{71}{60} \qquad \mathcal{X} = \frac{41}{60} \qquad \mathcal{X} = \frac{28}{15}$$

per cui i momenti principali d'inerzia in O risultano:

$$A_1 = \frac{71}{60} \mu a^2 \qquad A_2 = \frac{41}{60} \mu a^2 \qquad A_3 = \frac{28}{15} \mu a^2.$$

Soluzione dell'esercizio 2

Rispetto alla terna $Oxyz$, non inerziale, il punto si muove sulla guida circolare fissa γ e la sua configurazione è individuata dalla parametrizzazione indipendente dal tempo:

$$P(\varphi) - O = a \sin \varphi \hat{e}_1 - a \cos \varphi \hat{e}_2$$

con derivata:

$$P'(\varphi) = \frac{\partial P}{\partial \varphi}(\varphi) = a(\cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2).$$

I versori tangente e normale alla curva sono dati dalle relazioni:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(\varphi) &= \frac{P'(\varphi)}{|P'(\varphi)|} = \cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2 \\ \hat{n}(\varphi) &= \frac{d\hat{\tau}}{d\varphi}(\varphi) \Big/ \left| \frac{d\hat{\tau}}{d\varphi}(\varphi) \right| = \frac{-\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2}{|-\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2|} = -\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2 \end{aligned} \quad (1)$$

che torneranno utili nella determinazione sia delle equazioni del moto che della condizione di equilibrio in presenza di attrito.

(a) Equazioni del moto per il caso di guida liscia

Nella terna $Oxyz$, che si muove di moto traslatorio rispetto ad una terna galileiana Ωxyz , il punto P risulta soggetto alle seguenti sollecitazioni:

- il peso $-mg\hat{e}_2$;
- la resistenza viscosa $-\beta\dot{P}$, essendo \dot{P} la velocità di P relativa a $Oxyz$, la cui espressione esplicita risulta quindi

$$-\beta\dot{P} = -\beta \frac{\partial P}{\partial \varphi}(\varphi) \dot{\varphi} = -\beta a(\cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2) \dot{\varphi} = -\beta a \dot{\varphi} \hat{\tau};$$

- la forza di trascinamento $-m\ddot{O}$, essendo \ddot{O} l'accelerazione dell'origine rispetto alla terna inerziale Ωxyz , esprimibile esplicitamente come:

$$-m\ddot{O} = -m(-\omega^2 \varepsilon) \cos(\omega t) \hat{e}_1 = m\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t) \hat{e}_1;$$

- la reazione vincolare $\vec{\Phi}$ esercitata dalla guida liscia γ , ortogonale a questa.

Da notare l'assenza della forza di Coriolis, che non sussiste in una terna di riferimento in semplice moto traslatorio, per la quale la velocità angolare di trascinamento è costantemente nulla. Il postulato delle reazioni vincolari porge allora l'equazione:

$$m\ddot{P} = -mg\hat{e}_2 - \beta\dot{P} - m\ddot{O} + \vec{\Phi}$$

che proiettata lungo il versore tangente conduce all'equazione pura del moto:

$$m\ddot{P} \cdot \hat{\tau} = (-mg\hat{e}_2 - \beta\dot{P} - m\ddot{O}) \cdot \hat{\tau}.$$

Il primo membro risulta:

$$m\ddot{P} \cdot \hat{\tau} = m \frac{d}{dt} [\dot{\varphi} a \hat{\tau}] \cdot \hat{\tau} = m [\ddot{\varphi} a \hat{\tau} + \dot{\varphi}^2 a \hat{n}] \cdot \hat{\tau} = ma\ddot{\varphi}$$

mentre per le sollecitazioni a secondo membro si ha:

$$\begin{aligned} (-mg\hat{e}_2 - \beta\dot{P} - m\ddot{O}) \cdot \hat{\tau} &= (-mg\hat{e}_2 - \beta a \dot{\varphi} \hat{\tau} + m\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t) \hat{e}_1) \cdot \hat{\tau} = \\ &= -mg\hat{e}_2 \cdot \hat{\tau} - \beta a \dot{\varphi} + m\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t) \hat{e}_1 \cdot \hat{\tau} = \\ &= -mg \sin \varphi - \beta a \dot{\varphi} + m\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t) \cos \varphi. \end{aligned}$$

L'equazione del moto del sistema è pertanto:

$$ma\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi - \beta a \dot{\varphi} + m\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t) \cos \varphi. \quad (2)$$

Vale la pena di osservare che l'equazione precedente non ammette alcun equilibrio, a causa del termine di trascinamento che dipende sinusoidalmente dal tempo. Si può però ritenere che, *per ε piccolo*, moti che partono con velocità $\dot{\varphi} \sim 0$ da una posizione $\varphi \sim 0$ si mantengano prossimi a $\varphi = 0$.

(b) Soluzione stazionaria per le piccole oscillazioni

Nel limite di piccoli moti attorno a $\varphi = 0$ l'equazione (2) si linearizza ponendo $\sin \varphi = \varphi$ e $\cos \varphi = 1$:

$$ma\ddot{\varphi} + \beta a \dot{\varphi} + mg\varphi = m\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t)$$

ed è identificabile con l'equazione di un oscillatore armonico smorzato soggetto ad una forzante sinusoidale. Come ben noto, l'equazione ammette un'unica soluzione stazionaria, della forma:

$$\varphi = A \cos(\omega t + \alpha)$$

dove A e α sono un'ampiezza e una fase costanti. È più semplice, tuttavia, scrivere la stessa soluzione come combinazione di un termine cosinusoidale e di uno sinusoidale:

$$\varphi = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \quad (3)$$

con c_1 e c_2 costanti opportune, che l'Analisi Matematica assicura essere determinate univocamente. Le derivate prima e seconda di (3) valgono:

$$\dot{\varphi} = -\omega c_1 \sin(\omega t) + \omega c_2 \cos(\omega t) \quad \ddot{\varphi} = -\omega^2 c_1 \cos(\omega t) - \omega^2 c_2 \sin(\omega t)$$

e sostituite nella (2) porgono:

$$\begin{aligned} -m\omega^2 c_1 \cos(\omega t) - m\omega^2 c_2 \sin(\omega t) - \beta a \omega c_1 \sin(\omega t) + \beta a \omega c_2 \cos(\omega t) + \\ + mgc_1 \cos(\omega t) + mgc_2 \sin(\omega t) = m\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t) \end{aligned}$$

ossia, raccogliendo i termini simili in seno e coseno:

$$(-m\omega^2 c_1 + \beta a \omega c_2 + mgc_1 - m\omega^2 \varepsilon) \cos(\omega t) + (-m\omega^2 c_2 - \beta a \omega c_1 + mgc_2) \sin(\omega t) = 0.$$

I coefficienti costanti delle due funzioni linearmente indipendenti devono essere nulli:

$$-maw^2c_1 + \beta awc_2 + mgc_1 - m\omega^2\varepsilon = 0 \quad -maw^2c_2 - \beta awc_1 + mgc_2 = 0$$

e consentono di scrivere il sistema di equazioni lineari non omogenee:

$$\begin{cases} m(g - a\omega^2)c_1 + \beta awc_2 = m\omega^2\varepsilon \\ -\beta awc_1 + m(g - a\omega^2)c_2 = 0 \end{cases}$$

da cui si traggono le costanti c_1 e c_2 richieste:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} m\omega^2\varepsilon & \beta aw \\ 0 & m(g - a\omega^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m(g - a\omega^2) & \beta aw \\ -\beta aw & m(g - a\omega^2) \end{vmatrix}} = m\omega^2\varepsilon \frac{m(g - a\omega^2)}{m^2(g - a\omega^2)^2 + \beta^2 a^2 \omega^2}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} m(g - a\omega^2) & m\omega^2\varepsilon \\ -\beta aw & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m(g - a\omega^2) & \beta aw \\ -\beta aw & m(g - a\omega^2) \end{vmatrix}} = m\omega^2\varepsilon \frac{\beta aw}{m^2(g - a\omega^2)^2 + \beta^2 a^2 \omega^2} .$$

La soluzione stazionaria per l'equazione dei piccoli moti attorno a $\varphi = 0$ risulta pertanto:

$$\varphi = \frac{m\omega^2\varepsilon}{m^2(g - a\omega^2)^2 + \beta^2 a^2 \omega^2} [m(g - a\omega^2) \cos(\omega t) + \beta aw \sin(\omega t)] \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

(c) **Condizione di risonanza su ω**

Seguendo la ben nota procedura, è immediato verificare che l'ampiezza della soluzione stazionaria (4) vale:

$$A(\omega) = \frac{m\omega^2\varepsilon}{\sqrt{m^2(g - a\omega^2)^2 + \beta^2 a^2 \omega^2}} = \frac{\omega^2\varepsilon/a}{\sqrt{\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{m^2}\omega^2}}$$

mentre la fase α viene individuata univocamente in $[0, 2\pi)$ dalle relazioni:

$$\cos \alpha = \frac{m(g - a\omega^2)}{\sqrt{m^2(g - a\omega^2)^2 + \beta^2 a^2 \omega^2}} \quad \sin \alpha = \frac{-\beta aw}{\sqrt{m^2(g - a\omega^2)^2 + \beta^2 a^2 \omega^2}} .$$

Per definizione, la pulsazione di risonanza corrisponde al valore di ω per il quale l'ampiezza $A(\omega)$ del moto stazionario risulta massima. Per semplicità conviene ricercare il massimo di $A(\omega)^2$, in modo da eliminare l'ingombrante radice quadrata a denominatore e ridurre il problema allo studio di una semplice funzione razionale. L'irrilevante fattore costante

ε^2/a^2 può essere inoltre ignorato. Si tratta così di individuare, per $\omega > 0$, il massimo assoluto della funzione ausiliaria:

$$\Xi(\omega) = \frac{a^2}{\varepsilon^2} A(\omega)^2 = \frac{\omega^4}{\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{m^2} \omega^2}.$$

A questo scopo si calcola la derivata prima:

$$\begin{aligned} \Xi'(\omega) &= \frac{4\omega^3 \left[\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{m^2} \omega^2 \right] - \omega^4 \left[2\left(\omega^2 - \frac{g}{a}\right) 2\omega + 2\frac{\beta^2}{m^2} \omega \right]}{\left[\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{m^2} \omega^2 \right]^2} = \\ &= \frac{4\omega^3 \left[\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{2m^2} \omega^2 - \omega^2 \left(\omega^2 - \frac{g}{a}\right) \right]}{\left[\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{m^2} \omega^2 \right]^2} = \frac{4\omega^3 \left(\frac{g^2}{a^2} - \frac{g}{a} \omega^2 + \frac{\beta^2}{2m^2} \omega^2 \right)}{\left[\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{m^2} \omega^2 \right]^2} \end{aligned}$$

e la si eguaglia a zero per ricavare gli eventuali punti critici di $\Xi(\omega)$:

$$4\omega^3 \left(\frac{g^2}{a^2} - \frac{g}{a} \omega^2 + \frac{\beta^2}{2m^2} \omega^2 \right) = 0.$$

Per $\omega > 0$ l'equazione equivale alla seguente:

$$\frac{g^2}{a^2} - \frac{g}{a} \omega^2 + \frac{\beta^2}{2m^2} \omega^2 = 0$$

ovvero:

$$\left(\frac{g}{a} - \frac{\beta^2}{2m^2} \right) \omega^2 = \frac{g^2}{a^2}.$$

La funzione ausiliaria ammette dunque un unico punto critico positivo:

$$\omega = \omega_{cr} = \frac{g}{a} \left(\frac{g}{a} - \frac{\beta^2}{2m^2} \right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{g}{a}} \left(1 - \frac{\beta^2 a}{2m^2 g} \right)^{-1/2}$$

a condizione che si abbia $\beta < m\sqrt{2g/a}$. Per verificare che si tratta effettivamente di un massimo basta osservare che la derivata seconda di Ξ nel punto critico vale semplicemente:

$$\Xi''(\omega_{cr}) = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{4\omega^3 \left(\frac{g^2}{a^2} - \frac{g}{a} \omega^2 + \frac{\beta^2}{2m^2} \omega^2 \right)}{\left[\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{m^2} \omega^2 \right]^2} \right] \Bigg|_{\omega=\omega_{cr}}$$

ed il suo segno coincide perciò con quello del solo numeratore:

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{d}{d\omega} \left[4\omega^3 \left(\frac{g^2}{a^2} - \frac{g}{a}\omega^2 + \frac{\beta^2}{2m^2}\omega^2 \right) \right] \right|_{\omega=\omega_{cr}} = \\
& = 12\omega^2 \left(\frac{g^2}{a^2} - \frac{g}{a}\omega^2 + \frac{\beta^2}{2m^2}\omega^2 \right) \Big|_{\omega=\omega_{cr}} + 8\omega^4 \left(\frac{\beta^2}{2m^2} - \frac{g}{a} \right) \Big|_{\omega=\omega_{cr}} = \\
& = 8\omega^4 \left(\frac{\beta^2}{2m^2} - \frac{g}{a} \right) \Big|_{\omega=\omega_{cr}} = -8\omega_{cr}^4 \frac{g}{a} \left(1 - \frac{\beta^2 a}{2m^2 g} \right) < 0.
\end{aligned}$$

Per $\beta \geq m\sqrt{2g/a}$, quando cioè il coefficiente di frizione risulta sufficientemente grande, la funzione $\Xi(\omega)$ non presenta alcun punto critico $\omega > 0$ ed è monotona crescente su tutta la semiretta dei reali positivi, in quanto:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Xi(\omega) = 0 \qquad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \Xi(\omega) = +1.$$

Ciò significa che l'ampiezza del moto stazionario cresce monotonamente con la pulsazione, tendendo al limite finito $A(+\infty) = \varepsilon/a\sqrt{\Xi(+\infty)} = \varepsilon/a$, e non presenta alcun massimo. La pulsazione di risonanza vale pertanto:

$$\omega = \omega_{cr} = \sqrt{\frac{g}{a}} \left(1 - \frac{\beta^2 a}{2m^2 g} \right)^{-1/2}$$

ed è definita se e soltanto se $\beta < m\sqrt{2g/a}$. Si osservi che per $\beta \sim 0$ si ha $\omega_{cr} \sim \sqrt{g/a}$, e la pulsazione di risonanza si identifica di fatto con la pulsazione dell'oscillatore armonico libero — di equazione $ma\ddot{\varphi} + mg\varphi = 0$.

(d) Condizione per l'equilibrio in presenza di attrito

La legge di Coulomb-Morin dell'attrito radente statico prescrive che una configurazione φ del sistema sia di equilibrio se e soltanto se:

$$|\vec{F}(t, \varphi, 0) \cdot \hat{\tau}(\varphi)| \leq \mu_s |\vec{F}(t, \varphi, 0) \cdot \hat{n}(\varphi)| \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

dove $\vec{F}(t, \varphi, 0)$ indica il risultante delle forze attive *calcolate in condizioni statiche*. In questo caso la resistenza viscosa è dunque nulla, e il predetto risultante si riduce ai soli contributi gravitazionale e inerziale:

$$\vec{F}(t, \varphi, 0) = -mg \hat{e}_2 + m\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t) \hat{e}_1$$

il secondo dei quali dipende esplicitamente dal tempo. Ricordate le espressioni (1) si ha allora:

$$\begin{aligned}
\vec{F}(t, \varphi, 0) \cdot \hat{\tau}(\varphi) &= m\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t) \cos \varphi - mg \sin \varphi \\
\vec{F}(t, \varphi, 0) \cdot \hat{n}(\varphi) &= -m\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t) \sin \varphi - mg \cos \varphi
\end{aligned}$$

e la condizione di equilibrio diventa:

$$|m\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t) \cos \varphi - mg \sin \varphi| \leq \mu_s |-m\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t) \sin \varphi - mg \cos \varphi| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ovvero, dividendo membro a membro per la costante positiva mg :

$$\left| \sin \varphi - \frac{\varepsilon \omega^2}{g} \cos \varphi \cos(\omega t) \right| \leq \mu_s \left| \cos \varphi + \frac{\varepsilon \omega^2}{g} \sin \varphi \cos(\omega t) \right| \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ad una forma più compatta della stessa condizione si perviene introducendo il parametro adimensionale:

$$\lambda = \varepsilon \omega^2 / g$$

in modo che risulta:

$$|\sin \varphi - \lambda \cos \varphi \cos(\omega t)| \leq \mu_s |\cos \varphi + \lambda \sin \varphi \cos(\omega t)| \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

La determinazione esplicita delle soluzioni in φ non è del tutto immediata — né peraltro è richiesta. Si può però notare che (5), dovendo essere valida anche all'annullarsi di $\cos(\omega t)$, implica senz'altro la relazione:

$$|\sin \varphi| \leq \mu_s |\cos \varphi|$$

che è proprio la condizione di equilibrio in presenza della sola forza peso e si riesprime quindi nella semplice forma:

$$|\operatorname{tg} \varphi| \leq \mu_s.$$

L'insieme delle configurazioni di equilibrio in presenza delle forze di trascinamento costituisce quindi un sottoinsieme di $\{\varphi \in \mathbb{R} : |\operatorname{tg} \varphi| \leq \mu_s\}$. La forza fittizia può solo rimuovere, in tutto o in parte, le posizioni di equilibrio che sussisterebbero per effetto della sola gravità.

Complemento. Determinazione esplicita degli equilibri

Si osserva preliminarmente che in una configurazione di equilibrio non può aversi $\cos \varphi = 0$, poichè se così fosse ne deriverebbe l'assurdo:

$$1 \leq \mu_s \lambda |\cos(\omega t)| \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La condizione (5) equivale quindi alla seguente:

$$|\operatorname{tg} \varphi - \lambda \cos(\omega t)| \leq \mu_s |1 + \lambda \operatorname{tg} \varphi \cos(\omega t)| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

che introdotta la funzione ausiliaria $\zeta(t) = \operatorname{arctg}[\lambda \cos(\omega t)] \in (-\pi/2, \pi/2)$ diventa:

$$|\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \zeta(t)| \leq \mu_s |1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \zeta(t)| \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

In effetti non esistono valori di φ e di t per i quali la disequazione sia soddisfatta con il secondo membro nullo:

$$\begin{cases} |\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \zeta(t)| \leq \mu_s |1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \zeta(t)| \\ 1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \zeta(t) = 0 \end{cases}$$

poichè ne seguirebbe il sistema incompatibile:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\zeta(t) = 0 \\ 1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\zeta(t) = 0 \end{cases} \implies 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 0.$$

È così lecito dividere la (6) membro a membro per $|1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\zeta(t)|$ ed ottenere la caratterizzazione degli equilibri nella forma:

$$\left| \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\zeta(t)}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\zeta(t)} \right| \leq \mu_s \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ossia, grazie alla nota identità trigonometrica per la tangente della differenza di due angoli:

$$|\operatorname{tg}[\varphi - \zeta(t)]| \leq \mu_s \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dal momento che

$$\{\zeta = \zeta(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{\zeta = \operatorname{arctg}[\lambda \cos(\omega t)](t) : t \in \mathbb{R}\} = [-\operatorname{arctg}\lambda, \operatorname{arctg}\lambda],$$

l'ultima relazione equivale a:

$$|\operatorname{tg}[\varphi - \zeta]| \leq \mu_s \quad \forall \zeta \in [-\operatorname{arctg}\lambda, \operatorname{arctg}\lambda] \quad (7)$$

e consente di ricavare esplicitamente le configurazioni di equilibrio. Per ζ fissato la disequazione ammette infatti infinite soluzioni φ , costituite dalla seguente unione numerabile di intervalli aperti disgiunti:

$$\Omega_\zeta := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (-\operatorname{arctg}\mu_s + \zeta + n\pi, \operatorname{arctg}\mu_s + \zeta + n\pi)$$

e gli equilibri sono i punti dell'intersezione su $\zeta \in [-\operatorname{arctg}\lambda, \operatorname{arctg}\lambda]$ di tali insiemi:

$$\Omega := \bigcap_{\zeta \in [-\operatorname{arctg}\lambda, \operatorname{arctg}\lambda]} \Omega_\zeta.$$

L'intersezione è non vuota se e solo se $\lambda \leq \mu_s$, ed in tal caso risulta:

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (-\operatorname{arctg}\mu_s + \operatorname{arctg}\lambda + n\pi, \operatorname{arctg}\mu_s - \operatorname{arctg}\lambda + n\pi)$$

per cui, limitandosi al solo intervallo $\varphi \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ di ampiezza 2π , i valori di equilibrio di φ sono ricompresi negli intervalli disgiunti:

$$\begin{aligned} &(-\operatorname{arctg}\mu_s + \operatorname{arctg}\lambda, \operatorname{arctg}\mu_s - \operatorname{arctg}\lambda) \\ &(-\operatorname{arctg}\mu_s + \operatorname{arctg}\lambda + \pi, \operatorname{arctg}\mu_s - \operatorname{arctg}\lambda + \pi). \end{aligned}$$

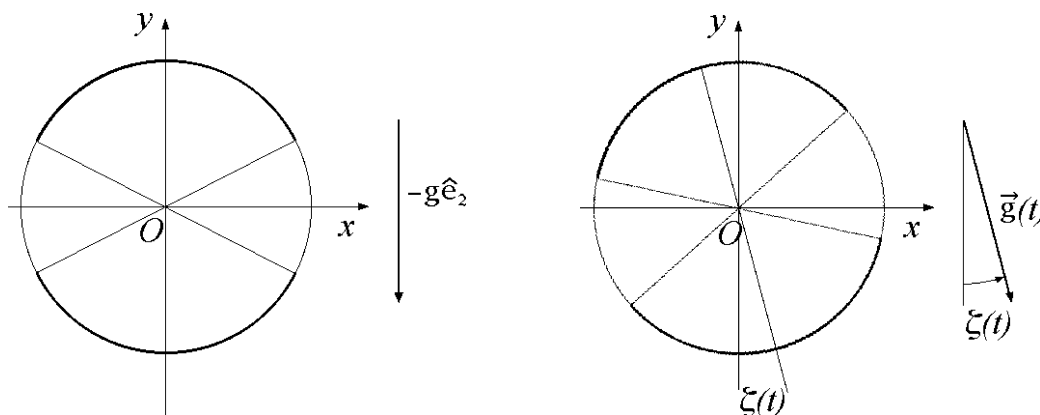
Sono esattamente gli intervalli angolari degli equilibri che si sarebbero ottenuti nel caso puramente gravitazionale, ma ridotti ad ambo gli estremi di un tratto $\arctg \lambda \leq \arctg \mu_s$. Nonostante i calcoli un po' involuti, l'interpretazione del risultato è relativamente semplice. Il punto è che la forza di trascinamento, al pari della forza peso, risulta proporzionale alla massa inerziale di P . Nella terna $Oxyz$ tutto va come se, di fatto, l'accelerazione gravitazionale della Terra fosse soggetta ad una variazione orizzontale variabile nel tempo; l'accelerazione effettiva risulta perciò:

$$\vec{g}(t) = \varepsilon\omega^2 \cos(\omega t)\hat{e}_1 - g\hat{e}_2$$

ed è inclinata rispetto alla verticale di un angolo:

$$\arctg\left[\frac{\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t)}{g}\right] = \arctg[\lambda \cos(\omega t)] = \zeta(t).$$

Se il vettore $\vec{g}(t)$ si mantenesse costante, le configurazioni compatibili con la condizione di Coulomb-Morin sarebbero quelle calcolate per il caso di g verticale, *ma ruotate dell'angolo* $\zeta(t)$, come evidenziato in neretto nella figura seguente:



Poichè la condizione di compatibilità va verificata a tutti i tempi, tuttavia, solo l'intersezione di tutte le zone di compatibilità corrisponde agli effettivi equilibri del sistema: ciò equivale a rimuovere gli archi di ampiezza massima $\arctg \lambda$ agli estremi. Appare del tutto evidente che se $\lambda > \mu_s$ non può sussistere alcun equilibrio.

Soluzione dell'esercizio 3

(a) Equilibri

Il sistema in esame è scleronomo e a vincoli bilaterali ideali, soggetto unicamente a sollecitazioni posizionali conservative. Gli equilibri del sistema, tutti ordinari, si identificano quindi con tutti e soli i punti critici del potenziale. Questo consta di un contributo gravitazionale e di uno elastico associato alla molla ideale.

Potenziale gravitazionale

Il baricentro del disco omogeneo coincide con il centro geometrico (e di simmetria) di questo, ed è quindi individuato dal vettore posizione:

$$C - O = as\hat{e}_1 + r\hat{e}_2.$$

Il baricentro G dell'asta omogenea AC va invece identificato con il relativo punto medio:

$$\begin{aligned} G - O &= C - O + \frac{A - C}{2} = as\hat{e}_1 + r\hat{e}_2 + \frac{1}{2}(a \sin \varphi \hat{e}_1 - a \cos \varphi \hat{e}_2) = \\ &= a\left(s + \frac{1}{2} \sin \varphi\right)\hat{e}_1 + \left(r - \frac{a}{2} \cos \varphi\right)\hat{e}_2. \end{aligned}$$

Per il potenziale gravitazionale del sistema si ha così l'espressione:

$$\begin{aligned} U_g &= -mg\hat{e}_2 \cdot (C - O) - mg\hat{e}_2 \cdot (G - O) = \\ &= -mgr - mg\left(r - \frac{a}{2} \cos \varphi\right) = \frac{1}{2}mga \cos \varphi + \text{costante}. \end{aligned}$$

Potenziale elastico

L'estremo A dell'asta è individuato dal vettore posizione:

$$A - O = C - O + A - C = a(s + \sin \varphi)\hat{e}_1 + (r - a \cos \varphi)\hat{e}_2$$

di modulo quadrato:

$$\begin{aligned} |A - O|^2 &= a^2(s + \sin \varphi)^2 + (r - a \cos \varphi)^2 = \\ &= a^2(s^2 + \sin^2 \varphi + 2s \sin \varphi) + r^2 + a^2 \cos^2 \varphi - 2ra \cos \varphi = \\ &= a^2 s^2 + 2a^2 s \sin \varphi + a^2 + r^2 - 2ra \cos \varphi. \end{aligned}$$

Il potenziale elastico associato alla molla ideale vale pertanto:

$$U_{el} = -\frac{k}{2}|A - O|^2 = -\frac{k}{2}(a^2 s^2 + 2a^2 s \sin \varphi - 2ra \cos \varphi) + \text{costante}.$$

Potenziale del sistema

Il potenziale del sistema è la somma dei potenziali gravitazionale ed elastico. Omesse le costanti additive, irrilevanti, esso risulta pertanto:

$$U(s, \varphi) = U_g + U_{el} = \frac{1}{2}mga \cos \varphi - \frac{k}{2}(a^2 s^2 + 2a^2 s \sin \varphi - 2ra \cos \varphi), \quad (s, \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

Equilibri

Le configurazioni di equilibrio si ricavano imponendo il simultaneo annullarsi delle derivate parziali prime del potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s}(s, \varphi) &= -k(a^2 s + a^2 \sin \varphi) \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi}(s, \varphi) &= -\frac{1}{2}mga \sin \varphi - k(a^2 s \cos \varphi + ra \sin \varphi) \end{aligned}$$

ossia risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -ka^2(s + \sin \varphi) = 0 \\ -\frac{1}{2}mga \sin \varphi - ka(as \cos \varphi + r \sin \varphi) = 0 \end{cases}$$

che, semplificando alcuni fattori costanti, equivale a:

$$\begin{cases} s = -\sin \varphi \\ \frac{mg}{2ka} \sin \varphi + s \cos \varphi + \frac{r}{a} \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione per s in termini di φ ottenuta dalla prima, la seconda equazione di equilibrio si riduce a:

$$\frac{mg}{2ka} \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi + \frac{r}{a} \sin \varphi = 0$$

vale a dire:

$$\sin \varphi \left(\frac{mg}{2ka} - \cos \varphi + \frac{r}{a} \right) = 0.$$

Due radici definite incondizionatamente ricorrono per $\sin \varphi = 0$:

$$\varphi = 0 \quad \varphi = \pi,$$

mentre per $\frac{mg}{2ka} - \cos \varphi + \frac{r}{a} = 0$ si hanno le due ulteriori soluzioni:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{mg}{2ka} + \frac{r}{a}\right) := \varphi^* \quad \varphi = -\varphi^*,$$

definite e distinte dalle precedenti per

$$\lambda := \frac{mg}{2ka} + \frac{r}{a} < 1.$$

Il sistema ammette pertanto i due equilibri definiti incondizionatamente:

$$(s, \varphi) = (0, 0) \quad , \quad (s, \varphi) = (0, \pi)$$

e i due ulteriori equilibri:

$$(s, \varphi) = (-\sin \varphi^*, \varphi^*) \quad , \quad (s, \varphi) = (\sin \varphi^*, -\varphi^*)$$

definiti e distinti rispetto ai precedenti per $\lambda < 1$, essendo $\varphi^* = \arccos \lambda \in (0, \pi/2)$.

(b) Stabilità degli equilibri

L'analisi di stabilità degli equilibri può essere basata sui teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale, data la natura posizionale conservativa delle sollecitazioni applicate al sistema scleronomo. Necessaria premessa è il calcolo delle derivate parziali seconde del potenziale, che risultano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}(s, \varphi) &= -ka^2 & \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial s}(s, \varphi) &= -ka^2 \cos \varphi \\ \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \varphi}(s, \varphi) &= -ka^2 \cos \varphi & \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}(s, \varphi) &= -\frac{1}{2}mga \cos \varphi - k(-a^2 s \sin \varphi + ra \cos \varphi)\end{aligned}$$

e porgono per la matrice hessiana del potenziale l'espressione:

$$H_U(s, \varphi) = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & -\lambda \cos \varphi + s \sin \varphi \end{pmatrix}$$

che va determinata in ciascuna configurazione di equilibrio.

Configurazione $(s, \varphi) = (0, 0)$

In questo caso la matrice hessiana si riduce a:

$$H_U(0, 0) = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

con traccia negativa:

$$\text{tr}H_U(0, 0) = -ka^2(1 + \lambda) < 0$$

e determinante di segno non definito:

$$\det H_U(0, 0) = (ka^2)^2(\lambda - 1).$$

Si devono quindi distinguere tre casi:

- per $\lambda > 1$ il determinante della matrice è positivo. La matrice risulta quindi definita negativa e caratterizza la configurazione di equilibrio come un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet;
- se $\lambda < 1$ si ha invece $\det H_U(0, 0) < 0$. Gli autovalori dell'hessiana sono di segno opposto. La presenza di un autovalore positivo implica l'instabilità dell'equilibrio grazie al teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- per $\lambda = 1$ la matrice hessiana ha determinante nullo. Gli autovalori della matrice risultano uno negativo e uno nullo, per cui non è possibile applicare il teorema di inversione parziale. Al tempo stesso non è tuttavia evidente che l'equilibrio costituisca un massimo relativo proprio del potenziale, per cui neppure l'applicabilità del teorema

di Lagrange-Dirichlet appare ovvia. In effetti, una semplice riscrittura del potenziale consente di riconoscere che l'equilibrio è un massimo relativo proprio della funzione:

$$\begin{aligned}
 U(s, \varphi) &= \frac{ka^2}{2}(-s^2 - 2s \sin \varphi + 2 \cos \varphi) = \frac{ka^2}{2} [-(s + \sin \varphi)^2 + \sin^2 \varphi + 2 \cos \varphi] = \\
 &= \frac{ka^2}{2} \left[-(s + \sin \varphi)^2 + \sin^2 \varphi + 2 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right] = \\
 &= \frac{ka^2}{2} \left[-(s + \sin \varphi)^2 + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right] = \\
 &= \frac{ka^2}{2} \left[2 - (s + \sin \varphi)^2 - 4 \sin^4 \frac{\varphi}{2} \right].
 \end{aligned}$$

L'equilibrio è quindi stabile per Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(s, \varphi) = (0, \pi)$

Nella fattispecie la matrice hessiana del potenziale diventa:

$$H_U(0, \pi) = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

e ha determinante negativo:

$$\det H_U(0, \pi) = -(ka^2)^2(\lambda + 1) < 0$$

risultando così indefinita. Il ricorrere di un autovalore positivo comporta l'instabilità dell'equilibrio in virtù del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(s, \varphi) = (-\sin \varphi^*, \varphi^*)$

Per questa configurazione la matrice hessiana del potenziale assume la forma:

$$H_U(-\sin \varphi^*, \varphi^*) = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -\cos \varphi^* \\ -\cos \varphi^* & -\lambda \cos \varphi^* - \sin^2 \varphi^* \end{pmatrix} = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -\cos \varphi^* \\ -\cos \varphi^* & -1 \end{pmatrix}$$

in quanto $\lambda = \cos \varphi^*$. È evidente che la matrice ha sempre traccia negativa:

$$\text{tr} H_U(-\sin \varphi^*, \varphi^*) = -2ka^2 < 0$$

mentre il determinante risulta strettamente positivo:

$$\det H_U(-\sin \varphi^*, \varphi^*) = (ka^2)^2(1 - \cos^2 \varphi^*) = (ka^2)^2 \sin^2 \varphi^* > 0,$$

essendo $\varphi^* \in (0, \pi/2)$. La matrice hessiana risulta così definita positiva e qualifica l'equilibrio come massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(s, \varphi) = (\sin \varphi^*, -\varphi^*)$

In questo caso la matrice hessiana è identica a quella già calcolata per l'equilibrio simmetrico precedente:

$$H_U(\sin \varphi^*, -\varphi^*) = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -\cos \varphi^* \\ -\cos \varphi^* & -1 \end{pmatrix}$$

e conduce alla medesima conclusione.

(c) **Energia cinetica**

La proprietà additiva consente di esprimere l'energia cinetica del sistema come somma delle energie cinetiche relative al disco e all'asta.

Energia cinetica del disco

Il disco appare privo di punti fissi. La sua energia cinetica può essere espressa convenientemente ricorrendo al teorema di König:

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{m}{2} \dot{C}^2 + \frac{1}{2} I_{Cz}^{\mathbb{D}} |\vec{\omega}_{\mathbb{D}}|^2$$

dove la velocità del baricentro e il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse Cz sono rispettivamente dati da:

$$\dot{C} = a\dot{s}\hat{e}_1 \quad I_{Cz}^{\mathbb{D}} = \frac{mr^2}{2}$$

mentre la velocità angolare del disco si ricava immediatamente dalla condizione di puro rotolamento:

$$\vec{\omega}_{\mathbb{D}} = -\frac{a\dot{s}}{r}\hat{e}_3.$$

L'energia cinetica di \mathbb{D} diventa così:

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{m}{2} a^2 \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \frac{a^2 \dot{s}^2}{r^2} = \frac{ma^2}{2} \dot{s}^2 + \frac{ma^2}{4} \dot{s}^2 = \frac{3}{4} ma^2 \dot{s}^2.$$

Energia cinetica dell'asta

Per l'asta omogenea il teorema di König porge:

$$T_{AC} = \frac{m}{2} \dot{G}^2 + \frac{1}{2} I_{Gz}^{AC} |\vec{\omega}_{AC}|^2.$$

La velocità del baricentro si ottiene derivando in t il vettore posizione di G :

$$G - O = a \left(s + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \hat{e}_1 + \left(r - \frac{a}{2} \cos \varphi \right) \hat{e}_2$$

che porge:

$$\dot{G} = a \left(\dot{s} + \frac{1}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \hat{e}_1 + \frac{a}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \hat{e}_2$$

con modulo quadrato:

$$\dot{G}^2 = a^2 \dot{s}^2 + \frac{a^2}{4} \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + a^2 \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} + \frac{a^2}{4} \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 = a^2 \dot{s}^2 + \frac{a^2}{4} \dot{\varphi}^2 + a^2 \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi}.$$

Il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse baricentrale Gz vale inoltre:

$$I_{Gz}^{AC} = \frac{ma^2}{12}$$

mentre la velocità angolare istantanea si scrive:

$$\vec{\omega}_{AC} = \dot{\varphi} \hat{e}_3.$$

L'energia cinetica cercata si riduce dunque all'espressione:

$$T_{AC} = \frac{m}{2} \left(a^2 \dot{s}^2 + \frac{a^2}{4} \dot{\varphi}^2 + a^2 \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} \right) + \frac{1}{2} \frac{ma^2}{12} \dot{\varphi}^2 = \frac{ma^2}{2} \left(\dot{s}^2 + \frac{1}{3} \dot{\varphi}^2 + \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} \right).$$

Energia cinetica del sistema

Sommando i contributi di disco e asta si perviene all'energia cinetica del sistema:

$$T = T_{\mathbb{D}} + T_{AC} = \frac{3}{4} ma^2 \dot{s}^2 + \frac{ma^2}{2} \left(\dot{s}^2 + \frac{1}{3} \dot{\varphi}^2 + \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} \right) = \frac{ma^2}{2} \left(\frac{5}{2} \dot{s}^2 + \frac{1}{3} \dot{\varphi}^2 + \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} \right).$$

(d) Equazioni pure del moto

Le equazioni del moto sono quelle di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial s} \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

in cui figurano i termini parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} &= ma^2 \left(\frac{5}{2} \dot{s} + \frac{1}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) &= ma^2 \left(\frac{5}{2} \ddot{s} + \frac{1}{2} \cos \varphi \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \right) & \frac{\partial T}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial s} &= -ka^2 (s + \sin \varphi) \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{ma^2}{2} \left(\frac{2}{3} \dot{\varphi} + \cos \varphi \dot{s} \right) = ma^2 \left(\frac{1}{3} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \cos \varphi \dot{s} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= ma^2 \left(\frac{1}{3} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cos \varphi \ddot{s} - \frac{1}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \dot{s} \right) & \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -\frac{ma^2}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \dot{s} \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= -\left(\frac{1}{2} mga + kra \right) \sin \varphi - ka^2 s \cos \varphi. \end{aligned}$$

Si ha così:

$$\begin{cases} ma^2 \left(\frac{5}{2} \ddot{s} + \frac{1}{2} \cos \varphi \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \right) = -ka^2(s + \sin \varphi) \\ ma^2 \left(\frac{1}{3} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cos \varphi \ddot{s} \right) = -\left(\frac{1}{2} mga + kra \right) \sin \varphi - ka^2 s \cos \varphi. \end{cases}$$

(e) Quantità di moto

La quantità di moto del sistema è la somma delle quantità di moto relative al disco e all'asta. La quantità di moto del disco si scrive:

$$m\dot{C} = mas\hat{e}_1,$$

mentre per l'asta si ha l'espressione:

$$m\dot{G} = ma \left(\dot{s} + \frac{1}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \hat{e}_1 + m \frac{a}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \hat{e}_2.$$

La quantità di moto del sistema vale perciò:

$$\vec{Q} = ma \left(2\dot{s} + \frac{1}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \hat{e}_1 + \frac{ma}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \hat{e}_2.$$

(f) Frequenze normali delle piccole oscillazioni

Per $r = a/2$ e $k = 3mg/5a$ il parametro d'ordine assume il valore

$$\lambda = \frac{mg}{2ka} + \frac{r}{a} = \frac{mg}{2} \frac{5}{3mg} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

in corrispondenza del quale l'unico equilibrio definito e stabile è dato da $(s, \varphi) = (0, 0)$. È intorno a questo equilibrio che si analizzano le piccole oscillazioni. L'energia cinetica del sistema si esprime nella forma matriciale:

$$T = \frac{ma^2}{2} \left(\frac{5}{2} \dot{s}^2 + \frac{1}{3} \dot{\varphi}^2 + \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} \right) = \frac{1}{2} (\dot{s} \ \dot{\varphi}) A(s, \varphi) \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

per mezzo della matrice di rappresentazione:

$$A(s, \varphi) = ma^2 \begin{pmatrix} 5/2 & \frac{1}{2} \cos \varphi \\ \frac{1}{2} \cos \varphi & 1/3 \end{pmatrix}$$

che in $(s, \varphi) = (0, 0)$ si riduce a:

$$A(0, 0) = ma^2 \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Nella stessa configurazione la matrice hessiana del potenziale vale invece:

$$H_U(0,0) = ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

Come ben noto, le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni sono individuate dall'equazione caratteristica:

$$\det[\omega^2 A(0,0) + H_U(0,0)] = 0.$$

Si deve calcolare il determinante della matrice:

$$\begin{aligned} \omega^2 A(0,0) + H_U(0,0) &= ma^2 \omega^2 \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} + ka^2 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -4/3 \end{pmatrix} = \\ &= ka^2 \left[\frac{m\omega^2}{k} \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -4/3 \end{pmatrix} \right] = \\ &= ka^2 \left[\frac{5a\omega^2}{3g} \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -4/3 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Posto per brevità $5a\omega^2/3g = \mu$, si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\mu - 1 & \frac{1}{2}\mu - 1 \\ \frac{1}{2}\mu - 1 & \frac{1}{3}\mu - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{2}\mu - 1\right)\left(\frac{1}{3}\mu - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\mu - 1\right)^2 = \\ &= \frac{5}{6}\mu^2 - \frac{10}{3}\mu - \frac{1}{3}\mu + \frac{4}{3} - \frac{1}{4}\mu^2 - 1 + \mu = \frac{7}{12}\mu^2 - \frac{8}{3}\mu + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ossia:

$$\frac{7}{4}\mu^2 - 8\mu + 1 = 0$$

e quindi:

$$\mu = \frac{2}{7} \left(8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot \frac{7}{4} \cdot 1} \right) = \frac{2}{7} (8 \pm \sqrt{57}).$$

Ne deriva che:

$$\omega^2 = \frac{3g}{5a}\mu = \frac{3g}{5a} \cdot \frac{2}{7} (8 \pm \sqrt{57}) = \frac{6}{35} (8 \pm \sqrt{57}) \frac{g}{a}$$

per cui le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni risultano:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{6}{35}} \sqrt{8 - \sqrt{57}} \sqrt{\frac{g}{a}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6}{35}} \sqrt{8 + \sqrt{57}} \sqrt{\frac{g}{a}}$$

e le relative frequenze normali sono:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6}{35}} \sqrt{8 - \sqrt{57}} \sqrt{\frac{g}{a}} \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6}{35}} \sqrt{8 + \sqrt{57}} \sqrt{\frac{g}{a}}.$$