

Esercizio 1

Il moto unidimensionale di un punto materiale è descritto dall'equazione differenziale:

$$\ddot{x} = -2x^2 + x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si discuta l'andamento qualitativo delle soluzioni, individuando in particolare:

- (a) le soluzioni di equilibrio;
- (b) un integrale primo del sistema;
- (c) tutte e sole le condizioni iniziali per le quali si hanno soluzioni periodiche;
- (d) tutte e sole le condizioni iniziali per le quali i moti del sistema risultano a meta asintotica;
- (e) per quali condizioni iniziali le soluzioni complete del sistema sono definite su un intervallo **limitato** nella variabile indipendente t .

Soluzione

(a) **Soluzioni di equilibrio**

Le soluzioni di equilibrio si ottengono assumendo $x(t) = \text{costante} \forall t \in \mathbb{R}$ nell'equazione del moto, la quale porge:

$$0 = -2x^2 + x = x(-2x + 1)$$

e quindi:

$$x = 0 \quad x = 1/2,$$

che sono tutti e soli gli equilibri del sistema.

(b) **Integrale primo**

Un integrale primo del sistema, identificabile con l'energia meccanica totale, si ottiene moltiplicando membro a membro l'equazione del moto per \dot{x} e riscrivendo tutti i termini come derivata totale in t :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right) = \dot{x}\ddot{x} = (-2x^2 + x)\dot{x} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} \right)$$

per cui risulta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} \right) = 0$$

e dunque:

$$H(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2}$$

costituisce l'integrale primo richiesto.

(c) **Condizioni iniziali per le soluzioni periodiche**

L'individuazione delle soluzioni periodiche del sistema è possibile per mezzo dell'analisi qualitativa di Weierstrass dei moti, grazie al fatto che l'equazione del moto ammette un

integrale primo, individuato al punto precedente, e che il moto del sistema ha natura unidimensionale. La discussione di Weierstrass richiede la determinazione preliminare del grafico dell'energia potenziale:

$$W(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} .$$

I punti critici sono già stati calcolati, identificandosi con gli equilibri $x = 0$ e $x = 1/2$ del sistema, massimo e minimo relativo proprio di W rispettivamente:

$$W''(0) = -1 < 0 \quad W''(1/2) = 4 \frac{1}{2} - 1 = 1 > 0 .$$

Le intersezioni con l'asse x sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione algebrica di terzo grado:

$$\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} = 0$$

che si risolve agevolmente e porge:

$$x = 0 \quad (\text{radice doppia}) \quad \text{e} \quad x = \frac{3}{4} .$$

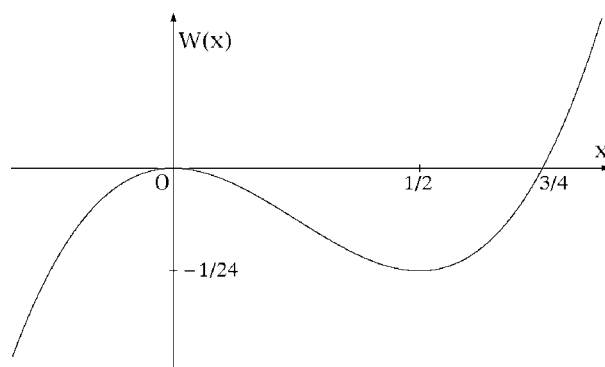
Considerato poi che, banalmente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = +\infty ,$$

mentre:

$$W(1/2) = \frac{1}{12} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{24} ,$$

il grafico dell'energia potenziale assume la forma illustrata nella figura seguente:



Dall'esame del grafico risulta evidente che le soluzioni periodiche del sistema si hanno per valori E dell'energia meccanica $H(x, \dot{x})$ strettamente compresi fra $W(1/2)$ e $W(0)$, purchè l'ascissa iniziale appartenga all'intervallo aperto $(0, 3/4)$, in maniera tale che i moti del

sistema risultino confinati fra due punti di inversione. Le condizioni iniziali corrispondenti a tutti e soli i moti periodici del sistema sono quindi date dai punti dell'insieme

$$\left\{ (x_0, \dot{x}_0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_0 < \frac{3}{4}, \quad -\frac{1}{24} < \frac{\dot{x}_0^2}{2} + \frac{2}{3}x_0^3 - \frac{x_0^2}{2} < 0 \right\}$$

nel piano delle fasi $(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Condizioni iniziali per le soluzioni a meta asintotica

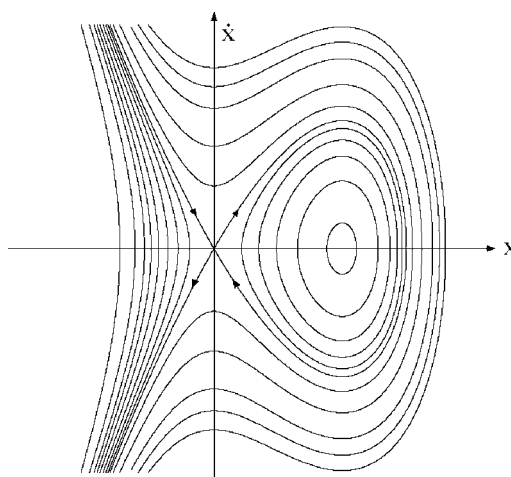
Le soluzioni a meta asintotica — si intende, in mancanza di specificazione diversa, meta asintotica nel futuro — possono essere individuate sempre per mezzo dell'analisi qualitativa di Weierstrass, facendo uso del grafico di W già determinato al punto precedente. Poichè $x = 0$ è l'unico zero doppio dell'energia potenziale — e dunque della funzione di Wierstrass associata — condizione necessaria affinché il moto del sistema sia a meta asintotica nel futuro è che l'energia meccanica assuma il valore $W(0) = 0$:

$$\frac{\dot{x}_0^2}{2} + \frac{2}{3}x_0^3 - \frac{x_0^2}{2} = 0$$

per le condizioni iniziali (x_0, \dot{x}_0) assegnate. Per $x_0 \in (0, 3/4]$ il moto risulta a meta asintotica tanto nel passato quanto nel futuro (orbita omoclina nello spazio delle fasi), mentre i moti residui a meta asintotica per $t \rightarrow +\infty$ si ottengono assumendo $x_0 < 0$ e $\dot{x}_0 > 0$. Le condizioni iniziali cercate sono dunque i punti dell'insieme:

$$\left\{ (x_0, \dot{x}_0) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\dot{x}_0^2}{2} + \frac{2}{3}x_0^3 - \frac{x_0^2}{2} = 0, \quad 0 < x_0 \leq \frac{3}{4} \right\} \cup \left\{ (x_0, \dot{x}_0) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\dot{x}_0^2}{2} + \frac{2}{3}x_0^3 - \frac{x_0^2}{2} = 0, \quad x_0 < 0, \quad \dot{x}_0 > 0 \right\}.$$

I risultati ottenuti si possono riassumere nel ritratto di fase del sistema, come illustrato di seguito:



(e) Soluzioni complete definite su intervalli limitati

È evidente che le soluzioni massimali periodiche, statiche e a meta asintotica (nel passato e/o nel futuro) sono sempre definite su intervalli di tempo illimitati; le soluzioni complete statiche e periodiche sono infatti definite sull'intera retta reale, mentre quelle a meta asintotica hanno intervallo di definizione superiormente illimitato (se a meta asintotica nel futuro) e/o inferiormente illimitato (se a meta asintotica nel passato). Le uniche soluzioni complete che possano risultare definite su un intervallo (aperto) limitato sono dunque quelle aperiodiche, individuate da $H(x_0, \dot{x}_0) = E > 0$ nonché da $H(x_0, \dot{x}_0) = E < 0$, $x_0 < 0$. Si verifica immediatamente che queste soluzioni $x(t)$ presentano un unico punto di inversione x_i e che ad una fase progressiva per $x \in (-\infty, x_i]$ ne fanno seguire una retrograda per $x \in [x_i, -\infty)$. Le soluzioni possono tendere a $-\infty$, nel passato o nel futuro, in un intervallo di tempo finito od infinito a seconda che risulti o meno convergente l'integrale di Weierstrass:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_i}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{E - W(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{x_i} \frac{1}{\sqrt{E - W(x)}} dx ,$$

che rappresenta l'intervallo di tempo occorrente al sistema per passare dalla configurazione $x = x_i$ alla configurazione $x = -\infty$. Nella fattispecie, ricordando l'espressione di $W(x)$, si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{x_i} \frac{1}{\sqrt{E - W(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{x_i} \left[E - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} \right]^{-1/2} dx$$

e poiché:

$$\left[E - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} \right]^{-1/2} \sim |x|^{-3/2} \quad (x \rightarrow -\infty) ,$$

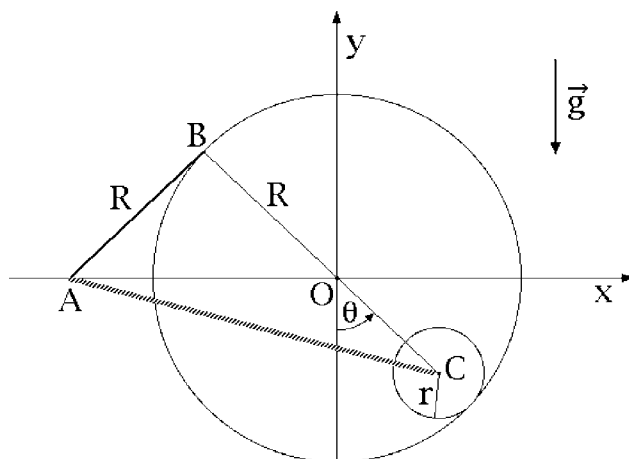
per noto criterio di convergenza degli integrali impropri si conclude che l'integrale di Weierstrass è convergente e che tutte le soluzioni massimali aperiodiche associate alle condizioni iniziali:

$$\left\{ (x_0, \dot{x}_0) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\dot{x}_0^2}{2} + \frac{2}{3}x_0^3 - \frac{x_0^2}{2} > 0 \right\} \cup \left\{ (x_0, \dot{x}_0) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\dot{x}_0^2}{2} + \frac{2}{3}x_0^3 - \frac{x_0^2}{2} < 0, x_0 < 0 \right\} .$$

sono effettivamente definite su un intervallo limitato in t .

Esercizio 2

Il sistema meccanico illustrato in figura si compone di un disco circolare omogeneo di massa m , raggio r e centro C , e di una sbarra rettilinea omogenea di massa M , lunghezza $R > r$ ed estremi A e B . Il disco rotola senza strisciare sul bordo interno di una guida circolare fissa avente centro O e raggio R , mentre l'estremo A della sbarra è vincolato a scorrere lungo l'asse Ox ed il secondo estremo B si mantiene sulla guida circolare, in posizione diametralmente opposta al centro C del disco. I punti A e C sono inoltre connessi da una molla ideale di costante elastica k .



Assunti i vincoli ideali, la terna di riferimento $Oxyz$ inerziale e l'angolo θ come coordinata lagrangiana, determinare:

- l'espressione dell'energia cinetica $T(\theta, \dot{\theta})$ del sistema rispetto alla terna $Oxyz$;
- le configurazioni di equilibrio del sistema;
- le proprietà di stabilità di tali configurazioni di equilibrio;
- le equazioni di Lagrange del moto.
- Si stabilisca inoltre, motivando la risposta, se la funzione reale

$$F(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - 2U(\theta), \quad (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$$

costituisce un integrale primo del sistema, essendo $U(\theta)$ il potenziale totale.

Soluzione

(a) Energia cinetica

L'energia cinetica del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche delle parti rigide costituenti, il disco di centro C e l'asta rigida AB . Entrambi i contributi possono essere calcolati convenientemente per mezzo del Teorema di König, visto che tanto il disco quanto l'asta sono privi di punti fissi. Il baricentro C del disco omogeneo è individuato dal vettore posizione:

$$C - O = (R - r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R - r) \cos \theta \hat{e}_2$$

e la sua velocità relativa alla terna $Oxyz$ si ottiene derivando l'espressione rispetto al tempo:

$$\dot{C} = (R - r) \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_1 + (R - r) \sin \theta \dot{\theta} \hat{e}_2 .$$

Per contro, la velocità angolare istantanea del disco si deduce immediatamente dalla condizione di rotolamento senza strisciamento nel punto P di contatto fra disco e guida circolare:

$$\dot{C} + \vec{\omega} \wedge (P - C) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{C} + \omega \hat{e}_3 \wedge (P - C) = 0$$

e risulta:

$$\vec{\omega} = -\left(\frac{R}{r} - 1\right) \dot{\theta} \hat{e}_3 .$$

Il teorema di König applicato al disco porge allora l'espressione:

$$T_{\text{disco}} = \frac{1}{2} m |\dot{C}|^2 + \frac{1}{2} I_{Cz}^{\text{disco}} |\vec{\omega}|^2 = \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2 .$$

Per la sbarra omogenea AB si procede in modo analogo, determinando preliminarmente i vettori posizione degli estremi:

$$A - O = -2R \sin \theta \hat{e}_1 \quad B - O = -R \sin \theta \hat{e}_1 + R \cos \theta \hat{e}_2$$

e del baricentro G — punto medio del segmento AB —

$$G - O = \frac{A - O + B - O}{2} = -\frac{3}{2} R \sin \theta \hat{e}_1 + \frac{1}{2} R \cos \theta \hat{e}_2 ,$$

la cui velocità risulta pertanto:

$$\dot{G} = -\frac{3}{2} R \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_1 - \frac{1}{2} R \sin \theta \dot{\theta} \hat{e}_2 .$$

La determinazione della velocità angolare istantanea dell'asta non comporta alcuna difficoltà, visto che il triangolo OBA è isoscele e l'angolo OAB si identifica con $\pi/2 - \theta$:

$$\vec{\omega}_{\text{asta}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \hat{e}_3 = -\dot{\theta} \hat{e}_3 .$$

L'energia cinetica dell'asta diventa perciò:

$$\begin{aligned} T_{\text{asta}} &= \frac{1}{2} M |\dot{G}|^2 + \frac{1}{2} I_{Gz}^{\text{asta}} |\vec{\omega}_{\text{asta}}|^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{9}{4} R^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{4} R^2 \sin^2 \theta \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{12} \dot{\theta}^2 = \\ &= \frac{MR^2}{8} \left(9 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \frac{1}{3} \right) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

che sommata a quella del disco porge l'energia cinetica totale del sistema:

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{3}{4} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{MR^2}{8} \left(9 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \frac{1}{3} \right) \dot{\theta}^2 .$$

(b) Configurazioni di equilibrio

Le uniche sollecitazioni attive agenti sul sistema sono il peso e l'interazione elastica fra i punti A e C . Trattandosi di sollecitazioni posizionali e conservative, gli equilibri del sistema si identificheranno tutti e soli con i punti critici del potenziale totale. Detto potenziale è la somma del potenziale gravitazionale di disco ed asta, e del potenziale elastico della molla. Per il disco omogeneo l'espressione del potenziale gravitazionale assume la forma:

$$U_g^{\text{disco}} = -mg(C - O) \cdot \hat{e}_2 = -mg[(R - r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R - r) \cos \theta \hat{e}_2] \cdot \hat{e}_2 = mg(R - r) \cos \theta$$

mentre per l'asta AB vale:

$$U_g^{\text{asta}} = -Mg(G - O) \cdot \hat{e}_2 = -Mg\left(-\frac{3}{2}R \sin \theta \hat{e}_1 + \frac{1}{2}R \cos \theta \hat{e}_2\right) \cdot \hat{e}_2 = -Mg\frac{R}{2} \cos \theta .$$

Il potenziale elastico della molla ideale è dato invece dalla relazione:

$$\begin{aligned} U_{\text{el}} &= -\frac{k}{2}|C - A|^2 = -\frac{k}{2}|(3R - r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R - r) \cos \theta \hat{e}_2|^2 = \\ &= -\frac{k}{2}[(3R - r)^2 \sin^2 \theta + (R - r)^2 \cos^2 \theta] = -\frac{k}{2}[(3R - r)^2 - (R - r)^2] \sin^2 \theta + \text{costante} \end{aligned}$$

che sommato ai precedenti fornisce il potenziale totale del sistema:

$$\begin{aligned} U(\theta) &= -\frac{k}{2}(3R - r + R - r)(3R - r - R + r) \sin^2 \theta - Mg\frac{R}{2} \cos \theta + mg(R - r) \cos \theta = \\ &= -2kR(2R - r) \sin^2 \theta - g\left[\frac{MR}{2} - m(R - r)\right] \cos \theta , \end{aligned}$$

la cui derivata prima è:

$$U'(\theta) = -4kR(2R - r) \sin \theta \cos \theta + g\left[\frac{MR}{2} - m(R - r)\right] \sin \theta .$$

Assunto per semplicità:

$$\frac{MR}{2} - m(R - r) > 0 ,$$

le configurazioni di equilibrio del sistema sono le soluzioni dell'equazione trigonometrica:

$$\left[-4kR(2R - r) \cos \theta + g\left[\frac{MR}{2} - m(R - r)\right]\right] \sin \theta = 0$$

equivalente alla:

$$\sin \theta \left[-\cos \theta + \frac{g}{4kR(2R - r)} \left[\frac{MR}{2} - m(R - r)\right]\right] = 0 . \quad (0.1)$$

Eguagliando a zero il primo fattore a primo membro si ottiene l'equazione $\sin \theta = 0$, che a meno di inessenziali multipli interi di 2π porge le soluzioni:

$$\theta = 0 , \quad \pi ;$$

le configurazioni di equilibrio residue si deducono uguagliando a zero il secondo fattore a primo membro nella (0.1):

$$-\cos \theta + \frac{g}{4kR(2R-r)} \left[\frac{MR}{2} - m(R-r) \right] = 0$$

e risultano pertanto:

$$\theta = \pm \theta^* = \pm \arccos \frac{g}{4kR(2R-r)} \left[\frac{MR}{2} - m(R-r) \right] = \pm \arccos \lambda ,$$

essendosi posto:

$$\lambda = \frac{g}{4kR(2R-r)} \left[\frac{MR}{2} - m(R-r) \right] > 0$$

con la condizione di esistenza $\lambda < 1$. In definitiva, le configurazioni di equilibrio del sistema risultano:

- $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, sempre definite;
- $\theta = \theta^*$ e $\theta = -\theta^*$, definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia $\lambda < 1$.

(c) Analisi di stabilità degli equilibri

Dal momento che tutte le sollecitazioni agenti sul sistema hanno natura posizionale e conservativa, lo studio delle proprietà di stabilità delle configurazioni di equilibrio viene condotto facendo ricorso ai teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo il primo passo consiste nel determinare la derivata seconda del potenziale totale, che può porsi nella forma:

$$U''(\theta) = 4kR(2R-r)(-\cos^2\theta + \sin^2\theta + \lambda \cos \theta) = 4kR(2R-r)(1 - 2\cos^2\theta + \lambda \cos \theta) .$$

Si procede quindi all'esame delle singole configurazioni di equilibrio.

Configurazione $\theta = 0$

La derivata seconda del potenziale è data dall'espressione:

$$U''(0) = 4kR(2R-r)(1 - 2 + \lambda) = 4kR(2R-r)(\lambda - 1)$$

in modo che devono distinguersi tre casi:

- se $\lambda > 1$, allora $U''(0) > 0$ e la configurazione risulta instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- se $\lambda < 1$, è all'opposto $U''(0) < 0$, la configurazione rappresenta un massimo relativo proprio del potenziale U e la sua stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet;
- se $\lambda = 1$, vale infine $U''(0) = 0$ e ricorre un caso critico.

L'analisi di stabilità nel caso critico richiede una approssimazione di Taylor di ordine superiore al secondo in θ :

$$\begin{aligned} U(\theta) &= 4kR(2R-r) \left[-\frac{1}{2}\sin^2\theta - \lambda \cos\theta \right] \Big|_{\lambda=1} = 4kR(2R-r) \left(-\frac{1}{2}\sin^2\theta - \cos\theta \right) = \\ &= 4kR(2R-r) \left[-\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + O(\theta^5) \right)^2 - 1 + \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} + O(\theta^6) \right] = \\ &= 4kR(2R-r) \left(-1 + \frac{\theta^4}{8} + O(\theta^6) \right) \quad (\theta \rightarrow 0) \end{aligned}$$

dalla quale si deduce che la configurazione costituisce, nel caso critico, un minimo relativo proprio del potenziale. Ciò preclude la possibilità di fare ricorso ai teoremi generali di Lagrange-Dirichlet (che richiede la presenza di un massimo relativo proprio) e di inversione parziale (che richiede la derivata seconda positiva del potenziale). In generale la questione della stabilità sarebbe destinata a rimanere irrisolta, sulla base degli strumenti standard impiegati per la sua discussione. Nella fattispecie, tuttavia, trattandosi di sistema posizionale conservativo ad un solo grado di libertà è facile provare che la configurazione di equilibrio risulta instabile. Ciò è possibile per mezzo della discussione qualitativa di Weierstrass delle soluzioni: ragionando per assurdo, se la soluzione statica $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ fosse stabile, per ogni intorno sufficientemente piccolo B_ε di $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ dovrebbe esistere un secondo intorno dello stesso punto, B_δ , contenuto nel precedente e tale che presa una arbitraria condizione iniziale $(\theta_0, \dot{\theta}_0) \in B_\delta$ la corrispondente soluzione massimale $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ soddisfi $(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \in B_\varepsilon \forall t \geq 0$. La qual cosa è certamente impossibile, in quanto tutti i punti di B_δ della forma $(\theta, \dot{\theta}) = (0, \dot{\theta}_0)$ soddisfano la condizione:

$$H(0, \dot{\theta}_0) = T(0, \dot{\theta}_0) - U(0) > -U(0)$$

e danno dunque luogo a soluzioni massimali progressive o retrograde che fuoriescono da B_ε dopo un intervallo di tempo sufficientemente lungo.

Configurazione $\theta = \pi$

L'equilibrio è caratterizzato da un valore sempre negativo della derivata seconda:

$$U''(\pi) = 4kR(2R-r)(1-2-\lambda) = -4kR(2R-r)(1+\lambda) < 0$$

e si prefigura quindi come un massimo relativo proprio del potenziale totale, stabile per Lagrange-Dirichlet.

Configurazioni $\theta = \pm\theta^*$

Gli equilibri devono presentare le stesse proprietà di stabilità, in quanto il potenziale è una funzione pari del proprio argomento:

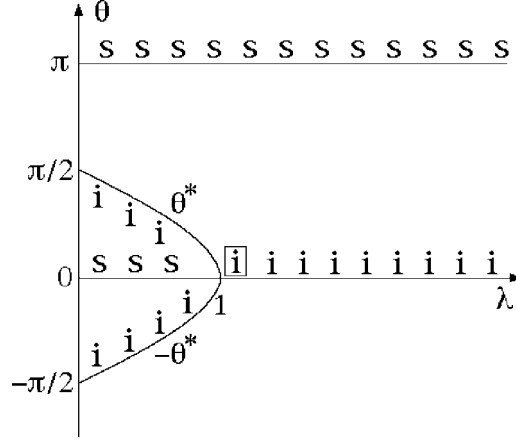
$$U(-\theta) = U(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R} .$$

È dunque sufficiente analizzare una sola delle configurazioni, ad esempio $\theta = \theta^*$, per la quale si verifica immediatamente che:

$$\begin{aligned} U''(\theta^*) &= 4kR(2R-r)(1-2\cos^2\theta^* + \lambda \cos\theta^*) = 4kR(2R-r)(1-2\lambda^2 + \lambda^2) = \\ &= 4kR(2R-r)(1-\lambda^2) > 0 \quad \forall \lambda \in (0, 1) . \end{aligned}$$

Quando definite, le configurazioni sono dunque instabili per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

I risultati dell'analisi di stabilità così completata si riassumono nel diagramma di biforcazione riportato nel seguito.



(d) Equazioni di Lagrange del moto

Alla lagrangiana del sistema si perviene sommando l'energia cinetica ed il potenziale totale:

$$\mathcal{L} = T(\theta, \dot{\theta}) + U(\theta) = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{MR^2}{8}\left(9\cos^2\theta + \sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)\dot{\theta}^2 - 2kR(2R-r)\sin^2\theta - g\left[\frac{MR}{2} - m(R-r)\right]\cos\theta$$

e da essa si deducono le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\theta} + \frac{MR^2}{4}\left(9\cos^2\theta + \sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)\dot{\theta}\right] = \\ &= \left[\frac{3}{2}m(R-r)^2 + \frac{MR^2}{4}\left(9\cos^2\theta + \sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)\right]\ddot{\theta} - 4MR^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -2MR^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 - 4kR(2R-r)\sin\theta\cos\theta + g\left[\frac{MR}{2} - m(R-r)\right]\sin\theta$$

per cui le equazioni lagrangiane del moto:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

assumono la forma:

$$\begin{aligned} \left[\frac{3}{2}m(R-r)^2 + \frac{MR^2}{4}\left(9\cos^2\theta + \sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)\right]\ddot{\theta} - \\ - 2MR^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 + 4kR(2R-r)\sin\theta\cos\theta - g\left[\frac{MR}{2} - m(R-r)\right]\sin\theta = 0. \end{aligned}$$

(e) **Integrale primo**

L'indipendenza esplicita dal tempo della lagrangiana comporta l'esistenza dell'integrale primo di Jacobi:

$$J(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - T - U = T(\theta, \dot{\theta}) - U(\theta)$$

che è peraltro interpretabile come energia meccanica totale del sistema, che ha carattere scleronomo — vincoli olonomi indipendenti dal tempo. La funzione assegnata $F(\theta, \dot{\theta})$ non può costituire un integrale primo per il sistema; se così fosse, infatti, anche la funzione differenza:

$$J(\theta, \dot{\theta}) - F(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - U(\theta) - T(\theta, \dot{\theta}) + 2U(\theta) = U(\theta)$$

dovrebbe risultare costante lungo le soluzioni dell'equazione differenziale del moto, e poiché U non è funzione costante del suo argomento ne seguirebbe che tutti i moti del sistema dovrebbero presentarsi nella forma $\theta(t) = \text{costante} \forall t \in \mathbb{R}$, una palese assurdità.