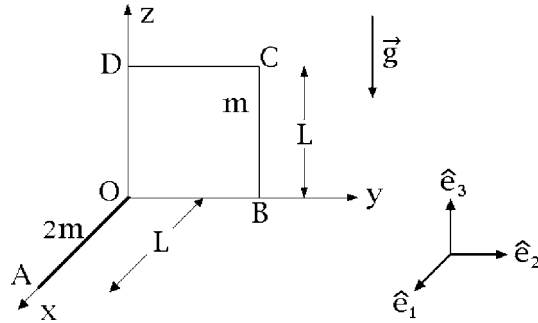


**Esercizio 1**

Un sistema rigido è costituito da una lamina quadrata di lato  $L$  e da un'asta rettilinea di lunghezza  $L$ , saldate ortogonalmente l'una all'altra nell'origine  $O$  di una terna solidale  $Oxyz$  — vedi figura. Lamina e asta sono entrambe omogenee e di masse  $m$  e  $2m$  rispettivamente.

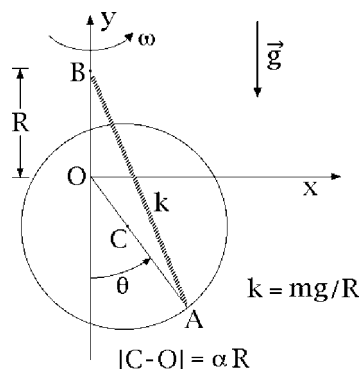


Sapendo che rispetto ad una terna di riferimento non illustrata in figura il sistema è in moto con punto fisso  $O$  e velocità angolare  $\vec{\omega} = 2\omega \hat{e}_1 - \omega \hat{e}_2$ , determinare:

- la posizione del baricentro  $G$  del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$ ;
- la matrice d'inerzia rispetto al riferimento  $Oxyz$ ;
- il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse  $OC$ ;
- il momento angolare del sistema in  $O$ ;
- la velocità del vertice  $C$ .

## Esercizio 2

Nel piano  $Oxy$  di una terna di riferimento  $Oxyz$ , un disco rigido omogeneo di massa  $m$ , raggio  $R$  e centro  $C$  ruota attorno all'asse  $Ox$ , passante ad una distanza  $\alpha R$  da  $C$  —  $0 < \alpha < 1$ . Una molla ideale di costante elastica  $k = mg/R$  collega l'estremo  $A$  del diametro passante per  $O$  con un punto fissato  $B$  dell'asse verticale  $Oy$ , di ordinata  $R$  — vedi figura.



Considerato che il disco è pesante e che la terna  $Oxyz$  ruota attorno all'asse  $Oy$  con velocità angolare costante  $\omega$  rispetto ad un riferimento inerziale, si faccia uso della coordinata generalizzata  $\theta$  in figura per determinare, nell'ipotesi di vincoli ideali:

- l'energia cinetica del sistema;
- tutte le posizioni di equilibrio;
- le proprietà di stabilità delle predette posizioni di equilibrio;
- le equazioni pure del moto;
- un integrale primo.

## Soluzione dell'esercizio 1

### (a) Posizione del baricentro $G$ in $Oxyz$

Considerato che i baricentri della lamina quadrata e dell'asta  $OA$  sono direttamente individuabili per simmetria, conviene determinare il baricentro del sistema facendo uso del teorema distributivo. Il baricentro dell'asta omogenea coincide con il suo punto medio ed è quindi identificato dal vettore posizione

$$G_{OA} - O = \frac{L}{2} \hat{e}_1$$

cui si deve imputare una massa  $m_{OA} = 2m$ , pari alla massa dell'asta. In modo analogo, il baricentro della lamina quadrata omogenea si identifica con il relativo centro di simmetria

$$G_{OBCD} - O = \frac{L}{2} \hat{e}_2 + \frac{L}{2} \hat{e}_3$$

con massa complessiva  $m_{OBCD} = m$ . Il teorema distributivo porge allora per il baricentro del sistema l'espressione:

$$G - O = \frac{m_{OA}(G_{OA} - O) + m_{OBCD}(G_{OBCD} - O)}{m_{OA} + m_{OBCD}}$$

dalla quale si deduce la posizione richiesta

$$G - O = \frac{1}{2m + m} \left[ 2m \frac{L}{2} \hat{e}_1 + m \left( \frac{L}{2} \hat{e}_2 + \frac{L}{2} \hat{e}_3 \right) \right] = \frac{L}{3} \hat{e}_1 + \frac{L}{6} \hat{e}_2 + \frac{L}{6} \hat{e}_3.$$

### (b) Matrice d'inerzia rispetto a $Oxyz$

La matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna solidale  $Oxyz$  può essere scritta come somma della matrici d'inerzia dell'asta  $OA$  e della lamina quadrata  $OBCD$  rispetto alla medesima terna di riferimento.

Per l'asta  $OA$ , che si posiziona lungo l'asse coordinato  $Ox$ , la matrice d'inerzia è della forma

$$[L_{OA}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{OA} & 0 \\ 0 & 0 & L_{yy}^{OA} \end{pmatrix}$$

con il momento d'inerzia rispetto all'asse  $Oy$  dato da

$$L_{yy}^{OA} = \int_0^L x^2 \frac{2m}{L} dx = \frac{2m}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{2}{3} mL^2$$

in modo che risulta

$$[L_{OA}] = mL^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Quanto alla lamina quadrata, che si colloca nel piano coordinato  $Oyz$ , la matrice d'inerzia si presenta nella forma tipica di una lamina piana

$$[L_{OBCD}] = \begin{pmatrix} L_{yy}^{OBCD} + L_{zz}^{OBCD} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{OBCD} & L_{yz}^{OBCD} \\ 0 & L_{yz}^{OBCD} & L_{zz}^{OBCD} \end{pmatrix}$$

con l'ulteriore condizione

$$L_{yy}^{OBCD} = L_{zz}^{OBCD}$$

dovuta all'evidente simmetria. La valutazione esplicita del solo momento e del solo prodotto d'inerzia non banali

$$L_{yy}^{OBCD} = \int_{[0,L]^2} dydz (x^2 + z^2) \frac{m}{L^2} = \int_{[0,L]^2} dydz z^2 \frac{m}{L^2} = \frac{m}{L} \int_0^L z^2 dz = \frac{mL^2}{3}$$

$$L_{yz}^{OBCD} = - \int_{[0,L]^2} dydz yz \frac{m}{L^2} = - \frac{m}{L^2} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^L \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^L = - \frac{mL^2}{4}$$

conduce quindi a

$$[L_{OBCD}] = mL^2 \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Sommando le matrici d'inerzia ottenute si perviene al risultato richiesto

$$[L] = [L_{OA}] + [L_{OBCD}] = mL^2 \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

### (c) Momento d'inerzia rispetto all'asse $OC$

L'asse  $OC$  passa ovviamente per l'origine della terna solidale  $Oxyz$  ed è individuato dal versore

$$\hat{n} = \frac{C - O}{|C - O|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_3$$

ed il relativo momento d'inerzia può essere determinato per mezzo della forma quadratica

$$I_{OC} = I_{O\hat{n}} = \hat{n} \cdot L_O(\hat{n}) = (n_1 \ n_2 \ n_3) [L] \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

che sostituendo le espressioni esplicite delle matrici diventa

$$I_{OC} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} mL^2 \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{mL^2}{2} (0 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{mL^2}{2} (0 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} mL^2.
\end{aligned}$$

(d) **Momento angolare in  $O$**

Poiché il punto  $O$  si mantiene fisso ed il vettore velocità angolare istantanea del sistema vale  $\vec{\omega} = 2\omega \hat{e}_1 - \omega \hat{e}_2$ , il momento angolare in  $O$  rispetto alla base  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  della terna solidale si scrive

$$\vec{K}_O = L_O(\omega) = K_1 \hat{e}_1 + K_2 \hat{e}_2 + K_3 \hat{e}_3$$

con le componenti cartesiane date dal prodotto matriciale

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} &= [L] \begin{pmatrix} 2\omega \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix} = mL^2 \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\omega \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= mL^2 \omega \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = mL^2 \omega \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1 \\ 1/4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\vec{K}_O = mL^2 \omega \left( \frac{4}{3} \hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \frac{1}{4} \hat{e}_3 \right).$$

(e) **Velocità del vertice  $C$**

Avendosi, chiaramente

$$C - O = L \hat{e}_2 + L \hat{e}_3$$

l'espressione generale per l'atto di moto rigido con punto fisso  $O$  fornisce il risultato richiesto

$$\begin{aligned}
\dot{C} &= \vec{\omega} \wedge (C - O) = (2\omega \hat{e}_1 - \omega \hat{e}_2) \wedge (L \hat{e}_2 + L \hat{e}_3) = \\
&= \omega L \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \omega L (-\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3).
\end{aligned}$$

**Soluzione dell'esercizio 2**

(a) **Energia cinetica**

L'energia cinetica del disco può essere determinata per mezzo del teorema di König

$$T = \frac{m}{2} \dot{G}^2 + \frac{1}{2} I_{Gz} |\vec{\omega}|^2$$

in termini del vettore velocità angolare istantanea

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3,$$

del baricentro, che coincide per simmetria con il centro geometrico del disco,

$$G - O = \alpha R \sin \theta \hat{e}_1 - \alpha R \cos \theta \hat{e}_2$$

e del momento d'inerzia del disco rispetto all'asse centrale  $Gz$

$$I_{Gz} = \frac{mR^2}{2}.$$

La velocità del baricentro rispetto alla terna  $Oxyz$  si scrive immediatamente derivando la precedente espressione rispetto al tempo

$$\dot{G} = \alpha R (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \dot{\theta}$$

e sostituendo il risultato ottenuto nella formula di König si perviene all'espressione richiesta per l'energia cinetica

$$T = \frac{m}{2} \alpha^2 R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \alpha^2 \right) mR^2 \dot{\theta}^2.$$

### (b) Posizioni di equilibrio

Le sollecitazioni attive applicate al sistema hanno tutte natura posizionale e conservativa, riducendosi all'interazione elastica prodotta dalla molla  $AB$ , al peso ed alla forza centrifuga. Le forze di Coriolis, pur applicate al disco, risultano ortogonali al piano di giacitura  $Oxy$  e la corrispondente lagrangiana si annulla identicamente

$$Q_\theta^{\text{Cor}} = \sum_i -2m_i \hat{e}_2 \omega \wedge \dot{P}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = -2\omega \sum_i m_i \hat{e}_2 \wedge \dot{P}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = -2\omega \sum_i 0 = 0$$

causa il parallelismo di  $\dot{P}_i$  e  $\partial P_i / \partial \theta$  per ogni  $i$ . Il potenziale relativo all'interazione elastica fra i punti  $A$  e  $B$  si ricava direttamente dalle relazioni geometriche

$$A - O = (1 + \alpha)R \sin \theta \hat{e}_1 - (1 + \alpha)R \cos \theta \hat{e}_2 \quad B - O = R \hat{e}_2$$

le quali implicano

$$A - B = (1 + \alpha)R \sin \theta \hat{e}_1 - [(1 + \alpha) \cos \theta + 1]R \hat{e}_2$$

e conducono per il potenziale elastico all'espressione

$$\begin{aligned} U_{\text{el}} &= -\frac{k}{2} |A - B|^2 = -\frac{k}{2} R^2 [(1 + \alpha)^2 \sin^2 \theta + (1 + \alpha)^2 \cos^2 \theta + 2(1 + \alpha) \cos \theta + 1] = \\ &= -kR^2 (1 + \alpha) \cos \theta + \text{costante} = -mgR(1 + \alpha) \cos \theta + \text{costante}. \end{aligned}$$

Il contributo della forza peso al potenziale del sistema si ottiene dall'espressione generale, essendosi già identificato il baricentro con il centro geometrico del disco circolare

$$U_g = -mg \hat{e}_2 \cdot (G - O) = -mg(-\alpha R \cos \theta) = mgR\alpha \cos \theta$$

mentre per il potenziale centrifugo vale

$$\begin{aligned} U_{cf} &= \frac{\omega^2}{2} I_{Oy} = \frac{\omega^2}{2} \left[ I_{Gy} + m[(G - O) \cdot \hat{e}_1]^2 \right] = \frac{\omega^2}{2} \left[ I_{Gy} + m(\alpha R \sin \theta)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \alpha^2 \sin^2 \theta + \text{costante} \end{aligned}$$

osservato che il momento d'inerzia  $I_{Gy}$  è indipendente dall'angolo di rotazione  $\theta$ . Il potenziale del sistema è quindi dato dalla somma dei potenziali parziali

$$U = U_{el} + U_g + U_{cf} = -mgR \cos \theta + \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \alpha^2 \sin^2 \theta$$

a meno di una costante additiva inessenziale. Poiché il sistema è a vincoli indipendenti dal tempo, le configurazioni di equilibrio si identificano tutte e sole con i punti critici del potenziale e si ottengono quindi annullando la derivata prima

$$U'(\theta) = mgR \sin \theta + m\omega^2 R^2 \alpha^2 \sin \theta \cos \theta$$

ossia risolvendo l'equazione trigonometrica

$$m\omega^2 R^2 \alpha^2 \sin \theta \left( \frac{g}{R\omega^2 \alpha^2} + \cos \theta \right) = 0$$

dalla quale, annullando il primo fattore, si deducono le soluzioni sempre definite

$$\theta = 0, \pi$$

e, ponendo a zero il secondo fattore, le ulteriori soluzioni

$$\theta = \pm \arccos \left( -\frac{g}{R\omega^2 \alpha^2} \right) = \pm \theta^* \quad , \quad \theta^* \in (\pi/2, \pi),$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia

$$\frac{g}{R\omega^2 \alpha^2} < 1.$$

### (c) Stabilità degli equilibri

Il sistema è scleronomo e posizionale conservativo, per cui lo studio della stabilità degli equilibri può essere condotto per mezzo del teorema di Lagrange-Dirichlet e del relativo teorema di inversione parziale. A questo scopo, il primo passo consiste nel calcolare la derivata seconda del potenziale

$$U''(\theta) = mgR \cos \theta + m\omega^2 R^2 \alpha^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

per poi procedere all'analisi delle singole configurazioni di equilibrio.

**Configurazione  $\theta = 0$** 

La derivata seconda del potenziale assume segno positivo

$$U''(0) = mgR + m\omega^2 R^2 \alpha^2 > 0$$

ed assicura l'instabilità della configurazione per effetto del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

**Configurazione  $\theta = \pi$** 

In questo caso la derivata seconda del potenziale si scrive

$$U''(\pi) = -mgR + m\omega^2 R^2 \alpha^2 = m\omega^2 R^2 \alpha^2 \left(1 - \frac{g}{R\omega^2 \alpha^2}\right)$$

in modo che:

- se  $g/R\omega^2 \alpha^2 > 1$  risulta  $U''(\pi) < 0$  e la configurazione si riconosce essere un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet;
- per  $g/R\omega^2 \alpha^2 < 1$  vale  $U''(\pi) > 0$ , con conseguente instabilità della configurazione, in forza del teorema di inversione parziale;
- se  $g/R\omega^2 \alpha^2 = 1$  ricorre infine un caso critico, avendosi  $U''(\pi) = 0$ . Nella fattispecie, la derivata seconda del potenziale si riduce a

$$U''(\theta) = m\omega^2 R^2 \alpha^2 \left[ \frac{g}{R\omega^2 \alpha^2} \cos \theta + \cos(2\theta) \right] = m\omega^2 R^2 \alpha^2 [\cos \theta + \cos(2\theta)]$$

con derivate terza e quarta

$$U^{(3)}(\theta) = m\omega^2 R^2 \alpha^2 [-\sin \theta - 2 \sin(2\theta)] \quad U^{(4)}(\theta) = m\omega^2 R^2 \alpha^2 [-\cos \theta - 4 \cos(2\theta)]$$

che calcolate in  $\theta = \pi$  porgono i valori

$$U^{(3)}(\pi) = 0 \quad U^{(4)}(\pi) = -3m\omega^2 R^2 \alpha^2$$

e l'approssimazione di Taylor

$$U(\theta) = U(\pi) - \frac{1}{8} m\omega^2 R^2 \alpha^2 (\theta - \pi)^4 + o[(\theta - \pi)^4] \quad (\theta \rightarrow \pi)$$

dalla quale si conclude che  $\theta = \pi$  è un massimo relativo proprio di  $U$ , stabile per Lagrange-Dirichlet.

**Configurazioni  $\theta = \pm\theta^*$** 

Poiché il potenziale è una funzione pari dell'angolo  $\theta$ , le configurazioni di equilibrio  $\theta = +\theta^*$  e  $\theta = -\theta^*$  presentano, quando definite, le medesime proprietà di stabilità, per cui è

sufficiente limitarsi ad esaminare una sola di esse. Ricordando che per definizione  $\cos \theta^* = -g/R\omega^2\alpha^2$ , con  $g/R\omega^2\alpha^2 < 1$ , si ha allora

$$\begin{aligned} U''(\theta^*) &= m\omega^2 R^2 \alpha^2 \left[ \frac{g}{R\omega^2\alpha^2} \cos \theta^* + \cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^* \right] = \\ &= m\omega^2 R^2 \alpha^2 [-\cos^2 \theta^* + \cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^*] = -m\omega^2 R^2 \alpha^2 \sin^2 \theta^* < 0 \end{aligned}$$

per cui la configurazione costituisce un massimo relativo proprio del potenziale e la sua stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

**(d) Equazioni pure del moto**

Le equazioni pure del moto sono date dall'unica equazione di Lagrange del sistema

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_{\theta}^{\text{Cor}}$$

in cui  $Q_{\theta}^{\text{Cor}} = 0$  e la lagrangiana  $\mathcal{L} = T + U$  si scrive

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \alpha^2 \right) m R^2 \dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \alpha^2 \sin^2 \theta.$$

Da questa si deducono le ovvie relazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \left( \frac{1}{2} + \alpha^2 \right) m R^2 \dot{\theta} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \left( \frac{1}{2} + \alpha^2 \right) m R^2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= mgR \sin \theta + m R^2 \omega^2 \alpha^2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

che sostituite nell'equazione di Eulero-Lagrange porgono il risultato richiesto

$$\left( \frac{1}{2} + \alpha^2 \right) m R^2 \ddot{\theta} - mgR \sin \theta - m R^2 \omega^2 \alpha^2 \sin \theta \cos \theta = 0.$$

**(e) Integrale primo**

Il sistema è scleronomo e posizionale conservativo, perciò un suo ovvio integrale primo è rappresentato dall'energia meccanica

$$H = T - U = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \alpha^2 \right) m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta - \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \alpha^2 \sin^2 \theta.$$