

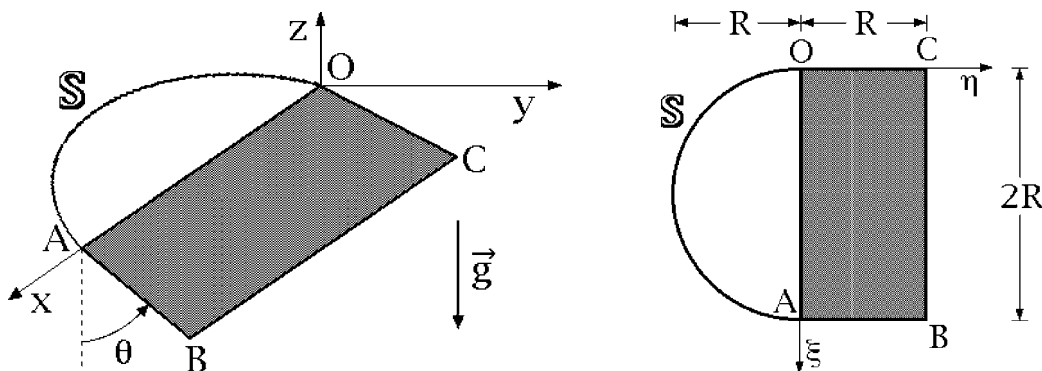
Esercizio 1

Una lamina rigida piana, pesante, è composta da una semicirconferenza omogenea \mathbb{S} , di diametro OA , raggio R e massa m , e da un rettangolo $OABC$, di lati $|A - B| = R$ e $|O - A| = 2R$, la cui densità areale risulta

$$\sigma(\xi, \eta) = \alpha m \xi (2R - \xi) / R^5$$

in termini delle coordinate (ξ, η) mostrate in figura. La lamina è vincolata a ruotare attorno all'asse fisso orizzontale $OA = Ox$ di una terna inerziale $Oxyz$. Assunti i vincoli ideali e l'angolo θ come coordinata lagrangiana, determinare:

- (a) le equazioni del moto del sistema;
- (b) tutte e sole le condizioni iniziali per le quali si hanno moti periodici del sistema;
- (c) tutte e sole le condizioni iniziali a $t = 0$ per le quali i moti del sistema sono progressivi $\forall t \geq 0$;
- (d) gli equilibri del sistema, discutendone la stabilità, nell'ipotesi che sul punto B agisca una sollecitazione addizionale $\vec{F}_B = -\beta \dot{B}$, dove \dot{B} è la velocità di B relativa a $Oxyz$.

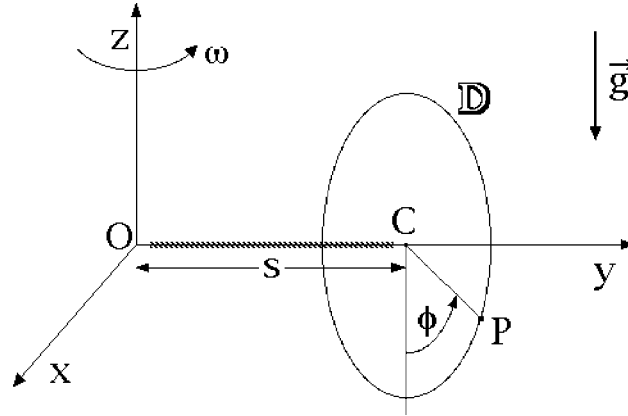


Esercizio 2

Sia \mathbb{D} un disco rigido omogeneo e pesante, di massa M , raggio R e centro C . L'asse passante per C e ortogonale a \mathbb{D} è vincolato a scorrere lungo l'asse Oy di una terna cartesiana ortogonale $Oxyz$, asse attorno al quale il disco può altresì ruotare; in una posizione assegnata del suo bordo, al disco è fissato rigidamente un punto materiale P di massa m . Una molla ideale di costante elastica $k > 0$ collega l'origine O con il centro C , che è inoltre soggetto alla sollecitazione $\vec{F}_C = -\alpha |C - O|^2 (C - O)$, con α costante positiva. La terna $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale Oz rispetto ad un riferimento inerziale. Si assumono tutti i vincoli ideali e che sia $(M + m)\omega^2 > k$. Facendo uso delle coordinate lagrangiane s e ϕ mostrate in figura, determinare:

- (a) rispetto alla terna $Oxyz$, le componenti lagrangiane della sollecitazione di Coriolis agente su P ;
- (b) le configurazioni di equilibrio relative a $Oxyz$;

- (c) la stabilità degli equilibri relativi ad $Oxyz$, tenendo presente che le sollecitazioni di Coriolis agenti sul disco omogeneo \mathbb{D} hanno componenti lagrangiane nulle;
- (d) le equazioni lagrangiane del moto del sistema;
- (e) la reazione vincolare applicata al centro del disco in una configurazione di equilibrio scelta a piacere.



Soluzione dell'esercizio 1

(a) Equazioni del moto

La lamina costituisce un sistema rigido con asse fisso soggetto alla sola forza peso, ossia un pendolo fisico. Per la determinazione della corrispondente equazione del moto è sufficiente ricavare il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse di rotazione Ox e la posizione del baricentro G . A questo scopo conviene considerare separatamente le due parti rispettivamente rettangolare e semicircolare della lamina, applicando poi la proprietà additiva del momento d'inerzia e quella distributiva del baricentro.

Il momento d'inerzia I_{Ox}^{OABC} del rettangolo $OABC$ rispetto all'asse di rotazione Ox si deduce dalla definizione, per integrazione diretta:

$$\begin{aligned}
 I_{Ox}^{OABC} &= \int_0^{2R} d\xi \int_0^R d\eta \frac{\alpha m}{R^5} \xi(2R - \xi)\eta^2 = \frac{\alpha m}{R^5} \int_0^{2R} (2R\xi - \xi^2) d\xi \int_0^R \eta^3 d\eta = \\
 &= \frac{\alpha m}{R^5} \left[R\xi^2 - \frac{\xi^3}{3} \right]_0^{2R} \frac{R^4}{4} = \frac{\alpha m}{4R} \left[4R^3 - \frac{8}{3}R^3 \right] = \frac{\alpha m}{3} R^2 .
 \end{aligned}$$

Il momento d'inerzia $I_{Ox}^{\mathbb{S}}$ della semicirconferenza può essere invece ricavato per simmetria, osservando che esso è pari alla metà del momento d'inerzia di una circonferenza completa di uguale raggio e massa doppia, $2m$, a sua volta ottenibile dividendo per due il momento d'inerzia della circonferenza rispetto all'asse passante per il suo centro e ortogonale al piano di giacitura $O\xi\eta$:

$$I_{Ox}^{\mathbb{S}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} 2mR^2 = \frac{mR^2}{2} .$$

Allo stesso risultato si perviene per mezzo della parametrizzazione regolare di \mathbb{S} :

$$\begin{cases} \xi = R - R \cos u \\ \eta = -R \sin u \end{cases} \quad u \in [0, \pi] ,$$

che sostituita nella definizione del momento d'inerzia per un sistema curvilineo porge

$$\begin{aligned} I_{Ox}^{\mathbb{S}} &= \int_0^\pi \frac{m}{\pi R} |(R \sin u, -R \cos u)| R^2 \sin^2 u \, du = \int_0^\pi \frac{mR^2}{\pi} \sin^2 u \, du = \\ &= \frac{mR^2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2u}{2} \, du = \frac{mR^2}{2\pi} \left[u - \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^\pi = \frac{mR^2}{2}. \end{aligned}$$

Per la ben nota proprietà additiva, il momento d'inerzia della lamina è dato dalla semplice somma dei momenti d'inerzia calcolati per le singole parti disgiunte costituenti:

$$I_{Ox} = I_{Ox}^{OABC} + I_{Ox}^{\mathbb{S}} = \frac{\alpha m R^2}{3} + \frac{m R^2}{2} = \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2} \right) m R^2.$$

Il rettangolo $OABC$ ha massa:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2R} d\xi \int_0^R d\eta \frac{\alpha m}{R^5} \xi(2R - \xi) \eta = \frac{\alpha m}{R^5} \int_0^{2R} (2R\xi - \xi^2) d\xi \int_0^R \eta \, d\eta = \\ &= \frac{\alpha m}{R^5} \left[R\xi^2 - \frac{\xi^3}{3} \right]_0^{2R} \frac{R^2}{2} = \frac{\alpha m}{R^5} \frac{4}{3} R^3 \frac{R^2}{2} = \frac{2}{3} \alpha m \end{aligned}$$

e se si indicano con (ξ_{G_1}, η_{G_1}) le coordinate del suo baricentro nel piano $O\xi\eta$, risulta — come peraltro evidente per simmetria, essendo la retta di equazione $\xi = R$ un asse di simmetria del rettangolo —

$$\begin{aligned} \xi_{G_1} &= \frac{3}{2\alpha m} \int_0^{2R} d\xi \int_0^R d\eta \frac{\alpha m}{R^5} \xi(2R - \xi) \eta \xi = \frac{3}{2} \frac{1}{R^5} \int_0^{2R} (2R\xi^2 - \xi^3) d\xi \int_0^R \eta \, d\eta = \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{R^5} \left[2R \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} \right]_0^{2R} \frac{R^2}{2} = \frac{3}{4} \frac{1}{R^3} \left(\frac{16}{3} R^4 - 4R^4 \right) = R \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \eta_{G_1} &= \frac{3}{2\alpha m} \int_0^{2R} d\xi \int_0^R d\eta \frac{\alpha m}{R^5} \xi(2R - \xi) \eta \eta = \frac{3}{2R^5} \int_0^{2R} (2R\xi - \xi^2) d\xi \int_0^R \eta^2 \, d\eta = \\ &= \frac{3}{2R^5} \left[R\xi^2 - \frac{\xi^3}{3} \right]_0^{2R} \frac{R^3}{3} = \frac{1}{2R^2} \frac{4}{3} R^3 = \frac{2}{3} R. \end{aligned}$$

In modo analogo, indicate con (ξ_{G_2}, η_{G_2}) le coordinate in $O\xi\eta$ del baricentro G_2 della semicirconferenza, si ha

$$\xi_{G_2} = R,$$

essendo la retta $\xi = R$ un asse di simmetria anche per \mathbb{S} , ed inoltre

$$\eta_{G_2} = \frac{1}{m} \int_0^\pi (-R \sin u) |(R \sin u, -R \cos u)| \frac{m}{\pi R} \, du =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin u R du = -\frac{R}{\pi} [-\cos u]_0^\pi = -\frac{2R}{\pi} .$$

Le coordinate (ξ_G, η_G) del baricentro G in $O\xi\eta$ seguono pertanto dalla proprietà distributiva, e risultano

$$\xi_G = (M\xi_{G_1} + m\xi_{G_2})/(M + m) = \left(\frac{2}{3}\alpha m R + m R\right) / \left(\frac{2}{3}\alpha m + m\right) = R$$

come si sarebbe potuto stabilire più direttamente riconoscendo nella retta $\xi = R$ un asse di simmetria per l'intero sistema, e

$$\begin{aligned} \eta_G &= (M\eta_{G_1} + m\eta_{G_2})/(M + m) = \left(\frac{2}{3}\alpha m \frac{2}{3}R - m \frac{2R}{\pi}\right) / \left(\frac{2}{3}\alpha m + m\right) = \\ &= mR\left(\frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{\pi}\right) / m\left(\frac{2}{3}\alpha + 1\right) = R\left(\frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{\pi}\right) / \left(\frac{2}{3}\alpha + 1\right) . \end{aligned}$$

Le relazioni precedenti consentono di scrivere per il potenziale gravitazionale (e totale) del sistema l'espressione

$$\begin{aligned} U = U_g &= (M + m)(G - O) \cdot \vec{g} = -(M + m)(-\eta_G \cos \theta) g = (M + m)g\eta_G \cos \theta = \\ &= \left(\frac{2}{3}\alpha + 1\right) mg \frac{\frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{\pi}}{\frac{2}{3}\alpha + 1} R \cos \theta = mgR\left(\frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{\pi}\right) \cos \theta \end{aligned}$$

mentre l'energia cinetica assume la forma

$$T = \frac{1}{2} I_{Ox} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2}\right) mR^2 \dot{\theta}^2$$

per cui la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2}\right) mR^2 \dot{\theta}^2 + mgR\left(\frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{\pi}\right) \cos \theta .$$

Da essa, nell'ipotesi di vincoli ideali, si deduce l'equazione del moto

$$\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2}\right) mR^2 \ddot{\theta} + mgR\left(\frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{\pi}\right) \sin \theta = 0$$

che si identifica, come ci si attendeva, con quella di un pendolo. Nella successiva analisi si supporrà, per semplicità ma senza perdita di generalità, che sia soddisfatta la disuguaglianza

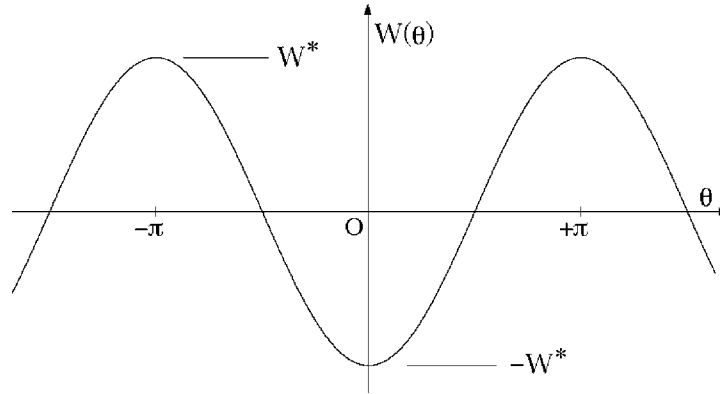
$$\frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{\pi} > 0 .$$

(b) **Condizioni iniziali per i moti periodici**

L'energia potenziale del sistema

$$W(\theta) = -U(\theta) = -mgR\left(\frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{\pi}\right) \cos \theta = -W^* \cos \theta$$

ha il grafico seguente, ben noto dallo studio del pendolo semplice:



Per i criteri di Weierstrass, si hanno moti periodici se e soltanto se l'energia totale presenta un valore E compreso fra $-W^*$ e $+W^*$. Le condizioni iniziali $(\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2$ corrispondenti a moti periodici sono quindi caratterizzate completamente dalla condizione

$$-mgR\left(\frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{\pi}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2}\right)mR^2\dot{\theta}_0^2 - mgR\left(\frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{\pi}\right) \cos \theta_0 < mgR\left(\frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{\pi}\right).$$

(c) **Condizioni iniziali a $t = 0$ dei moti progressivi $\forall t \geq 0$**

Al fine di individuare i moti progressivi, dall'analisi di Weierstrass segue che:

- (i) deve aversi $E \geq W^*$, onde escludere moti periodici ed equilibri stabili — $\theta = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ —, che sono definiti $\forall t \in \mathbb{R}$ ma non hanno natura progressiva $\forall t \geq 0$;
- (ii) per $E > W^*$ non esistono né punti di inversione del moto, né punti di meta asintotica. I moti progressivi $\forall t \geq 0$ si ottengono semplicemente richiedendo che sia $\dot{\theta}_0 > 0$ a $t = 0$ — la soluzione $\theta(t, \theta_0, \dot{\theta}_0)$ è superiormente illimitata e tende a $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, mentre $\dot{\theta}(t, \theta_0, \dot{\theta}_0)$ si mantiene limitata per effetto della conservazione dell'energia;
- (iii) per $E = W^*$ e $\dot{\theta}_0 \neq 0$ tutti i moti sono a meta asintotica, risultando escluse tutte le soluzioni statiche instabili $\theta = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. I moti progressivi $\forall t \geq 0$ ricorrono dunque per $\dot{\theta}_0 > 0$ a $t = 0$. In questo caso $\theta(t, \theta_0, \dot{\theta}_0)$ è, beninteso, superiormente limitata.

Le condizioni iniziali richieste sono pertanto tutti e soli i punti dell'insieme

$$\left\{ (\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2 : \dot{\theta}_0 > 0, \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2}\right)mR^2\dot{\theta}_0^2 - mgR\left(\frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{\pi}\right) \cos \theta_0 \geq mgR\left(\frac{4}{9}\alpha - \frac{2}{\pi}\right) \right\}.$$

(d) **Equilibri del sistema in presenza della sollecitazione addizionale ed analisi di stabilità**

La sollecitazione addizionale ha componente lagrangiana indipendente dal tempo:

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \vec{F}_B \cdot \frac{\partial B}{\partial \theta} = -\beta \dot{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \theta} = -\beta \frac{\partial B}{\partial \theta} \dot{\theta} \cdot \frac{\partial B}{\partial \theta} = -\beta \dot{\theta} \left| \frac{\partial B}{\partial \theta} \right|^2 = \\ &= -\beta \dot{\theta} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} (R \sin \theta \hat{e}_2 - R \cos \theta \hat{e}_3) \right|^2 = -\beta \dot{\theta} |R \cos \theta \hat{e}_2 + R \sin \theta \hat{e}_3|^2 = -\beta R^2 \dot{\theta} \end{aligned}$$

e potenza non positiva:

$$\pi = Q_\theta \dot{\theta} = -\beta R^2 \dot{\theta}^2 \leq 0$$

che si annulla solo per $\dot{\theta} = 0$. Tale sollecitazione ha dunque natura completamente dissipativa, il che consente di applicare i criteri di Barbasin e Krasovskii nell'analisi di stabilità degli equilibri. Detti equilibri sono infatti gli ovvi punti critici — tutti isolati — del potenziale U :

$$\theta = 0, \pi,$$

rispettivamente massimo e minimo relativo proprio dello stesso potenziale, e risultano il primo asintoticamente stabile ed il secondo instabile.

Soluzione dell'esercizio 2

(a) **Componenti lagrangiane della sollecitazione di Coriolis agente su P**

Il vettore posizione del punto materiale P rispetto alla terna non inerziale $Oxyz$ è dato dall'espressione

$$P - O = C - O + P - C = s \hat{e}_2 - R \sin \phi \hat{e}_1 - R \cos \phi \hat{e}_3$$

cui corrisponde la velocità, sempre relativa ad $Oxyz$,

$$\dot{P} = (-R \cos \phi \hat{e}_1 + R \sin \phi \hat{e}_3) \dot{\phi} + \dot{s} \hat{e}_2 .$$

Poiché la terna $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante $\omega \hat{e}_3$ attorno all'asse Oz rispetto ad un riferimento inerziale, la forza di Coriolis agente su P si scrive

$$\begin{aligned} \vec{F}^{\text{Cor},P} &= -2m\omega \hat{e}_3 \wedge \dot{P} = -2m\omega \hat{e}_3 \wedge (-R \cos \phi \dot{\phi} \hat{e}_1 + \dot{s} \hat{e}_2) = \\ &= -2m\omega (-R \cos \phi \dot{\phi} \hat{e}_2 - \dot{s} \hat{e}_1) = 2m\omega (\dot{s} \hat{e}_1 + R \cos \phi \dot{\phi} \hat{e}_2) \end{aligned}$$

in modo che le componenti lagrangiane corrispondenti risultano

$$Q_s^{\text{Cor},P} = \vec{F}^{\text{Cor},P} \cdot \frac{\partial P}{\partial s} = \vec{F}^{\text{Cor},P} \cdot \hat{e}_2 = 2m\omega R \cos \phi \dot{\phi}$$

e

$$\begin{aligned} Q_\phi^{\text{Cor},P} &= \vec{F}^{\text{Cor},P} \cdot \frac{\partial P}{\partial \phi} = \vec{F}^{\text{Cor},P} \cdot (-R \cos \phi \hat{e}_1 + R \sin \phi \hat{e}_3) = \\ &= 2m\omega R (\dot{s} \hat{e}_1 + R \cos \phi \dot{\phi} \hat{e}_2) \cdot (-\cos \phi \hat{e}_1 + \sin \phi \hat{e}_3) = -2m\omega R \cos \phi \dot{s} . \end{aligned}$$

Si osservi che, come deve essere, le sollecitazioni di Coriolis agenti su P hanno natura non energetica, in quanto la loro potenza risulta identicamente nulla:

$$\pi = Q_s^{\text{Cor},P} \dot{s} + Q_\phi^{\text{Cor},P} \dot{\phi} = 2m\omega R \cos \phi \dot{\phi} \dot{s} - 2m\omega R \cos \phi \dot{s} \dot{\phi} = 0 .$$

(b) Configurazioni di equilibrio relative a $Oxyz$

Nel calcolo delle configurazioni di equilibrio relative alla terna $Oxyz$ le sollecitazioni di Coriolis possono essere ignorate, in quanto nulle a velocità nulla — e ciò vale sia per le forze di Coriolis agenti sul punto P , di cui sono già state determinate le componenti lagrangiane, sia per le forze di Coriolis applicate al disco omogeneo \mathbb{D} , per le quali il computo delle componenti lagrangiane non è immediato. La sollecitazione $\vec{F}_C = -\alpha|C - O|^2(C - O)$ ha componenti generalizzate

$$Q_s^C = -\alpha|C - O|^2(C - O) \cdot \frac{\partial C}{\partial s} = -\alpha s^2 s \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = -\alpha s^3$$

$$Q_\phi^C = -\alpha|C - O|^2(C - O) \cdot \frac{\partial C}{\partial \phi} = -\alpha|C - O|^2(C - O) \cdot 0 = 0$$

ed è quindi di natura posizionale conservativa, avendosi

$$\frac{\partial Q_\phi^C}{\partial s}(s, \phi) - \frac{\partial Q_s^C}{\partial \phi}(s, \phi) = 0 \quad \forall (s, \phi) \in \mathbb{R}^2 ;$$

si verifica immediatamente che un potenziale possibile assume la forma

$$U_C = -\frac{\alpha}{4} s^4 .$$

Poiché poi le sollecitazioni residue, gravitazionali, elastiche e centrifughe, sono tutte a loro volta posizionali conservative, le configurazioni di equilibrio relativo si identificheranno con i punti critici del potenziale totale. Quest'ultimo viene determinato come somma di U_C , di un contributo gravitazionale del solo punto P — il baricentro C del disco omogeneo si mantiene a quota costante durante il moto —:

$$U_g = m(P - O) \cdot \vec{g} = -mg(P - O) \cdot \hat{e}_3 =$$

$$= -mg(s \hat{e}_2 - R \sin \phi \hat{e}_1 - R \cos \phi \hat{e}_3) \cdot \hat{e}_3 = mgR \cos \phi ,$$

di un contributo elastico imputabile alla molla ideale CO :

$$U_{\text{el}} = -\frac{k}{2}|C - O|^2 = -\frac{k}{2}|s \hat{e}_2|^2 = -\frac{k}{2}s^2 ,$$

e di uno centrifugo, dovuto sia al disco \mathbb{D} che al punto P . Più precisamente, il potenziale centrifugo del punto materiale P è dato da

$$U_{\text{c.f.}}^P = \frac{\omega^2}{2} m |P - O - (P - O) \cdot \hat{e}_3 \hat{e}_3|^2 = \frac{m\omega^2}{2} |s \hat{e}_2 - R \sin \phi \hat{e}_1|^2 = \frac{m\omega^2}{2} (s^2 + R^2 \sin^2 \phi)$$

mentre quello del disco vale

$$U_{\text{c.f.}}^{\mathbb{D}} = \frac{\omega^2}{2} I_{Oz}^{\mathbb{D}} = \frac{\omega^2}{2} [M|C - O|^2 + I_{Cz}^{\mathbb{D}}] = \frac{\omega^2}{2} [Ms^2 + I_{Cz}^{\mathbb{D}}] = \frac{M\omega^2}{2} s^2 + \text{costante}$$

in cui si è fatto uso del teorema di Huygens-Steiner e della costanza di $I_{Cz}^{\mathbb{D}}$. Ignorando la costante additiva arbitraria, il potenziale centrifugo totale si scrive dunque

$$U_{\text{c.f.}} = U_{\text{c.f.}}^P + U_{\text{c.f.}}^{\mathbb{D}} = \frac{m\omega^2}{2} (s^2 + R^2 \sin^2 \phi) + \frac{M\omega^2}{2} s^2 = \frac{\omega^2}{2} [Ms^2 + m(s^2 + R^2 \sin^2 \phi)]$$

e quello totale del sistema diventa

$$\begin{aligned} U = U_g + U_{\text{el}} + U_{\text{c.f.}} + U_C &= mgR \cos \phi - \frac{k}{2} s^2 + \frac{\omega^2}{2} [Ms^2 + m(s^2 + R^2 \sin^2 \phi)] - \frac{\alpha}{4} s^4 = \\ &= \frac{(M+m)\omega^2 - k}{2} s^2 - \frac{\alpha}{4} s^4 + mgr \cos \phi + \frac{m\omega^2 R^2}{2} \sin^2 \phi . \end{aligned}$$

Le derivate parziali prime del potenziale si calcolano immediatamente:

$$\begin{cases} U_s = [(M+m)\omega^2 - k]s - \alpha s^3 \\ U_\phi = -mgR \sin \phi + m\omega^2 R^2 \sin \phi \cos \phi \end{cases}$$

sicché le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} [(M+m)\omega^2 - k]s - \alpha s^3 = 0 \\ -mgR \sin \phi + m\omega^2 R^2 \sin \phi \cos \phi = 0 . \end{cases}$$

Si osservi che le equazioni precedenti sono disaccoppiate, la prima dipendendo esclusivamente dalla coordinata s e la seconda solo da ϕ . Dalla prima equazione si deducono dunque le soluzioni in s , sempre definite,

$$s = 0, \quad \pm \sqrt{\frac{(M+m)\omega^2 - k}{\alpha}},$$

mentre la seconda equazione equivale per fattorizzazione alle due equazioni

$$\sin \phi = 0 \quad \cos \phi = g/R\omega^2$$

e porge quindi le soluzioni in ϕ

$$\phi = 0, \quad \pi, \quad +\arccos(g/R\omega^2), \quad -\arccos(g/R\omega^2),$$

di cui le ultime due sono definite e distinte dalle prime a condizione che si abbia $g/R\omega^2 < 1$.

Posto per brevità

$$s^* = \sqrt{\frac{(M+m)\omega^2 - k}{\alpha}} \quad \text{e} \quad \phi^* = \arccos(g/R\omega^2),$$

si hanno complessivamente 12 configurazioni di equilibrio del sistema:

$$\begin{aligned} (s, \phi) = & (0, 0) \quad (0, \pi) \quad (0, \phi^*) \quad (0, -\phi^*) \\ & (s^*, 0) \quad (s^*, \pi) \quad (s^*, \phi^*) \quad (s^*, -\phi^*) \\ & (-s^*, 0) \quad (-s^*, \pi) \quad (-s^*, \phi^*) \quad (-s^*, -\phi^*) \end{aligned}$$

delle quali quelle con le componenti $\pm\phi^*$ sono definite e distinte se e soltanto se $g/R\omega^2 < 1$.

(c) Stabilità degli equilibri relativi

L'analisi di stabilità delle configurazioni di equilibrio richiede il calcolo delle derivate parziali seconde del potenziale totale, che si scrivono

$$\begin{aligned} U_{ss} &= (M+m)\omega^2 - k - 3\alpha s^2 & U_{s\phi} &= U_{\phi s} = 0 \\ U_{\phi\phi} &= -mgR \cos \phi + m\omega^2 R^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \end{aligned}$$

per cui l'hessiana del potenziale assume la forma diagonale

$$H_U(s, \phi) = \begin{pmatrix} (M+m)\omega^2 - k - 3\alpha s^2 & 0 \\ 0 & -mgR \cos \phi + m\omega^2 R^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \end{pmatrix}.$$

Si ricorda che, data la presenza della sollecitazione di Coriolis — non energetica —, è lecito applicare il teorema di Lagrange-Dirichlet ed individuare i massimi relativi propri del potenziale U come punti di equilibrio stabile, mentre NON È consentito fare uso del teorema di inversione parziale — le sollecitazioni non energetiche non sono identicamente nulle, né hanno natura completamente dissipativa.

Nonostante il numero elevato di configurazioni di equilibrio, l'analisi di stabilità non risulta particolarmente laboriosa. Infatti, per $s = 0$ la matrice hessiana presenta l'autovalore positivo $(M+m)\omega^2 - k > 0$:

$$H_U(0, \phi) = \begin{pmatrix} (M+m)\omega^2 - k & 0 \\ 0 & -mgR \cos \phi + m\omega^2 R^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \end{pmatrix}$$

in modo che tutte le configurazioni di equilibrio:

$$(s, \phi) = (0, 0) \quad (0, \pi) \quad (0, \phi^*) \quad (0, -\phi^*),$$

allorché definite, non corrispondono a massimi relativi propri del potenziale e nulla può concludersi circa le loro proprietà di stabilità, a causa delle sollecitazioni di Coriolis. Avendosi poi

$$U(-s, \phi) = U(s, \phi) \quad \forall (s, \phi) \in \mathbb{R}^2,$$

una ulteriore semplificazione deriva dal poter considerare le sole configurazioni di equilibrio

$$(s, \phi) = (s^*, 0) \quad (s^*, \pi) \quad (s^*, \phi^*) \quad (s^*, -\phi^*)$$

dal momento che per la simmetria del potenziale le configurazioni residue

$$(s, \phi) = (-s^*, 0) \quad (-s^*, \pi) \quad (-s^*, \phi^*) \quad (-s^*, -\phi^*)$$

presenteranno rispettivamente le stesse proprietà di stabilità delle precedenti. L'hessiana da considerare è dunque la seguente:

$$H_U(s^*, \phi) = \begin{pmatrix} -2[(M+m)\omega^2 - k] & 0 \\ 0 & -mgR \cos \phi + m\omega^2 R^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \end{pmatrix}$$

essendo $(M+m)\omega^2 - k - 3\alpha s^{*2} = -2[(M+m)\omega^2 - k] < 0$ autovalore negativo. Le proprietà di stabilità delle configurazioni di equilibrio dipenderanno esclusivamente dal segno del secondo autovalore, in relazione alla configurazione considerata.

– Per $\phi = 0$ risulta

$$U_{\phi\phi}(0) = -mgR \cos 0 + m\omega^2 R^2 (\cos^2 0 - \sin^2 0) = -mgR + m\omega^2 R^2 = m\omega^2 R^2 (1 - g/R\omega^2)$$

e si devono quindi distinguere i casi seguenti:

- (i) $g/R\omega^2 > 1$. È $U_{\phi\phi}(0) < 0$, in modo che la configurazione di equilibrio risulta un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet;
- (ii) $g/R\omega^2 < 1$. Vale $U_{\phi\phi}(0) > 0$, per cui la configurazione di equilibrio non è un massimo relativo proprio del potenziale — si tratta in effetti di un punto di sella. Anche in questo caso, non potendosi fare uso dell'inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, la questione della stabilità rimane aperta;
- (iii) $g/R\omega^2 = 1$. Risulta $U_{\phi\phi}(0) = 0$ e il caso individuato risulta comunque critico.

– Per $\phi = \pi$ si ha invece

$$U_{\phi\phi}(\pi) = -mgR \cos \pi + m\omega^2 R^2 (\cos^2 \pi - \sin^2 \pi) = mgR + m\omega^2 R^2 = m\omega^2 R^2 (1 + g/R\omega^2)$$

e la configurazione di equilibrio risulta un punto di sella del potenziale totale, per il quale nulla può dedursi.

– Per $\phi = \pm\phi^*$ vale

$$\begin{aligned} U_{\phi\phi}(\phi^*) &= -mgR \cos \phi^* + m\omega^2 R^2 (\cos^2 \phi^* - \sin^2 \phi^*) = \\ &= -mgR \frac{g}{R\omega^2} + m\omega^2 R^2 \left[2 \left(\frac{g}{R\omega^2} \right)^2 - 1 \right] = m\omega^2 R^2 \left[- \left(\frac{g}{R\omega^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{g}{R\omega^2} \right)^2 - 1 \right] = \\ &= -m\omega^2 R^2 \left[1 - \left(\frac{g}{R\omega^2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

che assume sempre segno negativo per via della condizione di esistenza $g/R\omega^2 < 1$ delle configurazioni in esame. Di conseguenza $(s, \phi) = (\pm s^*, \pm \phi^*)$ sono massimi relativi propri del potenziale U , la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

In conclusione, le configurazioni:

$$(s, \phi) = (s^*, 0), \quad (-s^*, 0), \quad \text{per } g/R\omega^2 > 1,$$

— sempre definite — e

$$(s, \phi) = (s^*, \phi^*), \quad (s^*, -\phi^*), \quad (-s^*, \phi^*), \quad (-s^*, -\phi^*),$$

quando definite — ossia per $g/R\omega^2 < 1$ — sono stabili. Tutte le altre configurazioni di equilibrio corrispondono a casi critici, per i quali nulla può concludersi direttamente circa le proprietà di stabilità e si renderebbe necessaria un'analisi più sofisticata.

(d) Equazioni lagrangiane del moto del sistema

L'energia cinetica relativa alla terna $Oxyz$ del punto materiale P si calcola direttamente dalla definizione

$$T_P = \frac{m}{2} \dot{P}^2 = \frac{m}{2} |(-R \cos \phi \hat{e}_1 + R \sin \phi \hat{e}_3) \dot{\phi} + \dot{s} \hat{e}_2|^2 = \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + R^2 \dot{\phi}^2).$$

Quanto al disco \mathbb{D} , che è privo di punti fissi, conviene applicare il teorema di König e scrivere la corrispondente energia cinetica $T_{\mathbb{D}}$ come somma di un termine relativo al baricentro C

$$T_C = \frac{M}{2} \dot{C}^2 = \frac{M}{2} |\dot{s} \hat{e}_2|^2 = \frac{M}{2} \dot{s}^2$$

e di uno relativo al moto del disco attorno al baricentro — moto di rotazione attorno all'asse fisso Cy —

$$T' = \frac{1}{2} I_{Oy}^{\mathbb{D}} \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \dot{\phi}^2 = \frac{MR^2}{4} \dot{\phi}^2,$$

per cui risulta

$$T_{\mathbb{D}} = T_C + T' = \frac{M}{2} \dot{s}^2 + \frac{MR^2}{4} \dot{\phi}^2.$$

L'energia cinetica totale del sistema diventa così

$$T = T_P + T_{\mathbb{D}} = \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + R^2 \dot{\phi}^2) + \frac{M}{2} \dot{s}^2 + \frac{MR^2}{4} \dot{\phi}^2 = \frac{M+m}{2} \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2} + m \right) R^2 \dot{\phi}^2$$

e la lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$ assume la forma

$$\mathcal{L} = \frac{M+m}{2} \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2} + m \right) R^2 \dot{\phi}^2 + \frac{(M+m)\omega^2 - k}{2} s^2 - \frac{\alpha}{4} s^4 + mgr \cos \phi + \frac{m\omega^2 R^2}{2} \sin^2 \phi$$

Dalle relazioni:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) = (M+m) \ddot{s} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = [(M+m)\omega^2 - k]s - \alpha s^3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = \left(\frac{M}{2} + m \right) R^2 \ddot{\phi} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -mgR \sin \phi + m\omega^2 R^2 \sin \phi \cos \phi$$

e dalle espressioni già ricavate per le componenti generalizzate della forza di Coriolis agente su P :

$$Q_s^{\text{Cor,P}} = 2m\omega R \cos \phi \dot{\phi} \quad Q_\phi^{\text{Cor,P}} = -2m\omega R \cos \phi \dot{s} ,$$

si deducono le equazioni lagrangiane del moto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = Q_s^{\text{Cor,P}} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = Q_\phi^{\text{Cor,P}}$$

che si scrivono esplicitamente come:

$$(M + m)\ddot{s} - [(M + m)\omega^2 - k]s + \alpha s^3 = 2m\omega R \cos \phi \dot{\phi} \\ \left(\frac{M}{2} + m \right) R^2 \ddot{\phi} + mgR \sin \phi - m\omega^2 R^2 \sin \phi \cos \phi = -2m\omega R \cos \phi \dot{s} .$$

(e) Reazione vincolare applicata al centro del disco in una configurazione di equilibrio

Per semplicità conviene scegliere la configurazione di equilibrio $(s, \phi) = (0, 0)$, per la quale risultano:

- nullo il risultante delle forze di Coriolis, poiché tutti i punti del sistema sono in quiete rispetto al riferimento $Oxyz$ — ciò vale naturalmente per qualsiasi altra configurazione di equilibrio;
- nullo il risultante delle forze centrifughe applicate al disco omogeneo \mathbb{D} , dal momento che l'asse di rotazione Oz coincide con un asse di simmetria del disco stesso;
- nulla la forza centrifuga agente sul punto P , in quanto questo viene a collocarsi sull'asse di rotazione Oz ;
- nulla la sollecitazione elastica applicata al disco in C , visto che la molla elastica ha lunghezza nulla;
- nulla la sollecitazione \vec{F}_C , essendo i punti O e C coincidenti.

La sola sollecitazione attiva a risultante non nulla agente sul sistema è dunque la forza peso $-(M + m)g \hat{e}_3$. Supponendo che al disco sia applicata una sola reazione vincolare $\vec{\Phi}$ in C , dall'equazione cardinale della quantità di moto si deduce che

$$\vec{\Phi} = (M + m)g \hat{e}_3 ,$$

che è il risultato richiesto.

Osservazione.

Componenti lagrangiane delle sollecitazioni di Coriolis agenti sul disco

Nella discussione precedente si è assunto, per semplicità, che il sistema delle forze di Coriolis agenti sul disco omogeneo \mathbb{D} abbia componenti lagrangiane nulle. Questa affermazione può essere dimostrata in modo rigoroso, anche se il calcolo risulta un poco laborioso. Si

illustrano due procedure equivalenti, la prima basata sulle proprietà di simmetria del disco \mathbb{D} , la seconda consistente in una diretta applicazione della definizione delle componenti lagrangiane.

Primo metodo

Sia $B \in \mathbb{D}$ un punto generico del disco omogeneo, la cui velocità si esprime nella forma:

$$\dot{B} = \dot{C} + \dot{\phi} \hat{e}_2 \wedge (B - C) = \dot{s} \hat{e}_2 + \dot{\phi} \hat{e}_2 \wedge (B - C) .$$

Per ogni $B \in \mathbb{D}$ esiste un unico punto $B' \in \mathbb{D}$ simmetrico di B rispetto al centro C , per il quale risulta $B' - C = -(B - C)$ e conseguentemente

$$\dot{B}' = \dot{C} - \dot{\phi} \hat{e}_2 \wedge (B - C) = \dot{s} \hat{e}_2 - \dot{\phi} \hat{e}_2 \wedge (B - C) .$$

Considerando piccoli intorni su \mathbb{D} di B e B' , di uguale massa dM , le forze di Coriolis agenti su ciascuno di essi assumono la forma

$$d\vec{F}^{\text{Cor},B} = -2dM\omega \hat{e}_3 \wedge \dot{s} \hat{e}_2 - 2dM\omega \hat{e}_3 \wedge [\dot{\phi} \hat{e}_2 \wedge (B - C)] = dM[2\omega \dot{s} \hat{e}_1 - 2\omega \dot{\phi} \hat{e}_3 \cdot (B - C) \hat{e}_2]$$

$$d\vec{F}^{\text{Cor},B'} = -2dM\omega \hat{e}_3 \wedge \dot{s} \hat{e}_2 + 2dM\omega \hat{e}_3 \wedge [\dot{\phi} \hat{e}_2 \wedge (B - C)] = dM[2\omega \dot{s} \hat{e}_1 + 2\omega \dot{\phi} \hat{e}_3 \cdot (B - C) \hat{e}_2]$$

per cui il risultante delle sollecitazioni di Coriolis applicate al disco si riduce a

$$\vec{R}^{\text{Cor},\mathbb{D}} = 2M\omega \dot{s} \hat{e}_1$$

sommando due a due i contributi dei punti simmetrici sull'intero disco. Il contributo degli stessi punti simmetrici B e B' al momento in C delle forze di Coriolis è dato dalla relazione

$$\begin{aligned} (B - C) \wedge d\vec{F}^{\text{Cor},B} + (B' - C) \wedge d\vec{F}^{\text{Cor},B'} &= (B - C) \wedge (d\vec{F}^{\text{Cor},B} - d\vec{F}^{\text{Cor},B'}) = \\ &= -4dM\omega \dot{\phi} \hat{e}_3 \cdot (B - C) (B - C) \wedge \hat{e}_2 \end{aligned}$$

che rappresenta un vettore ortogonale ad \hat{e}_2 ; anche senza provvedere ad un suo calcolo esplicito, appare dunque evidente che il momento risultante in C delle forze di Coriolis agenti su \mathbb{D} deve essere a sua volta diretto ortogonalmente allo stesso versore \hat{e}_2 , in modo che si ha

$$\vec{M}_C^{\text{Cor},\mathbb{D}} \cdot \hat{e}_2 = 0 .$$

Si può ora procedere al calcolo delle componenti lagrangiane richieste, osservando che lo spostamento virtuale infinitesimo di un qualsiasi punto assegnato B del disco si scrive

$$\delta B = \delta s \hat{e}_2 + \delta \phi \hat{e}_2 \wedge (B - C) = \delta s \frac{\partial B}{\partial s} + \delta \phi \frac{\partial B}{\partial \phi}$$

con $\delta s, \delta \phi \in \mathbb{R}$ arbitrari, per cui la potenza virtuale delle forze di Coriolis vale, come da definizione,

$$\Pi = \sum_{B \in \mathbb{D}} d\vec{F}^{\text{Cor},B} \cdot \delta B = \delta s \sum_{B \in \mathbb{D}} d\vec{F}^{\text{Cor},B} \cdot \frac{\partial B}{\partial s} + \delta \phi \sum_{B \in \mathbb{D}} d\vec{F}^{\text{Cor},B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \phi} = \delta s Q_s^{\text{Cor},\mathbb{D}} + \delta \phi Q_\phi^{\text{Cor},\mathbb{D}} .$$

D'altra parte, la stessa potenza virtuale può anche porsi nella forma

$$\begin{aligned}\Pi &= \delta s \sum_{B \in \mathbb{D}} \hat{e}_2 \cdot d\vec{F}^{\text{Cor},B} + \delta\phi \sum_{B \in \mathbb{D}} \hat{e}_2 \wedge (B - C) \cdot d\vec{F}^{\text{Cor},B} = \\ &= \delta s \sum_{B \in \mathbb{D}} d\vec{F}^{\text{Cor},B} \cdot \hat{e}_2 + \delta\phi \hat{e}_2 \cdot \sum_{B \in \mathbb{D}} (B - C) \wedge d\vec{F}^{\text{Cor},B} = \delta s \vec{R}^{\text{Cor},\mathbb{D}} \cdot \hat{e}_2 + \delta\phi \hat{e}_2 \cdot \vec{M}_C^{\text{Cor},\mathbb{D}}\end{aligned}$$

che confrontata con la precedente, in virtù dell'arbitrarietà di $\delta s, \delta\phi \in \mathbb{R}$, conduce al risultato desiderato:

$$Q_s^{\text{Cor},\mathbb{D}} = \vec{R}^{\text{Cor},\mathbb{D}} \cdot \hat{e}_2 \quad Q_\phi^{\text{Cor},\mathbb{D}} = \hat{e}_2 \cdot \vec{M}_C^{\text{Cor},\mathbb{D}}$$

ossia a:

$$Q_s^{\text{Cor},\mathbb{D}} = 0 \quad Q_\phi^{\text{Cor},\mathbb{D}} = 0 .$$

Secondo metodo

Le componenti lagrangiane del sistema di forze di Coriolis agenti sul disco omogeneo possono anche essere calcolate facendo uso direttamente della definizione, a patto di sostituire la somma formale su tutti i punti $B \in \mathbb{D}$ con un integrale sulla superficie di \mathbb{D} . Indicato con dA l'elemento infinitesimo d'area della superficie del disco, ed essendo $M/\pi R^2$ la densità superficiale costante del disco stesso, con le notazioni già introdotte si può scrivere $dM = (M/\pi R^2) dA$ e quindi

$$Q_s^{\text{Cor},\mathbb{D}} = \int_{B \in \mathbb{D}} -2\omega \hat{e}_3 \wedge \dot{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial s} \frac{M}{\pi R^2} dA = \int_{B \in \mathbb{D}} -2\omega \hat{e}_3 \wedge \dot{B} \cdot \frac{\partial \dot{B}}{\partial \dot{s}} \frac{M}{\pi R^2} dA$$

dove si è utilizzata l'identità — cruciale al fine della semplificazione del calcolo —

$$\frac{\partial B}{\partial s} = \frac{\partial \dot{B}}{\partial \dot{s}}$$

ben nota dalla teoria delle equazioni di Lagrange. Poiché inoltre

$$\dot{B} = \dot{s} \hat{e}_2 + \dot{\phi} \hat{e}_2 \wedge (B - C) ,$$

per cui

$$\frac{\partial \dot{B}}{\partial \dot{s}} = \hat{e}_2 ,$$

ne deriva che

$$Q_s^{\text{Cor},\mathbb{D}} = \int_{B \in \mathbb{D}} -2\omega \hat{e}_3 \wedge \dot{B} \cdot \hat{e}_2 \frac{M}{\pi R^2} dA = \int_{B \in \mathbb{D}} 2\omega \dot{B} \cdot \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_2 \frac{M}{\pi R^2} dA =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2M\omega}{\pi R^2} \int_{B \in \mathbb{D}} \dot{B} \cdot \hat{e}_1 \, dA = -\frac{2M\omega}{\pi R^2} \int_{B \in \mathbb{D}} \dot{\phi} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \wedge (B - C) \, dA = \\
&= -2M\omega \dot{\phi} \frac{1}{\pi R^2} \int_{B \in \mathbb{D}} (B - C) \, dA \cdot \hat{e}_3 = -2M\omega \dot{\phi} (C - C) \cdot \hat{e}_3 = 0
\end{aligned}$$

in virtù della definizione del baricentro di \mathbb{D} . Per la componente ϕ si ha, analogamente,

$$\begin{aligned}
Q_\phi^{\text{Cor}, \mathbb{D}} &= \int_{B \in \mathbb{D}} -2\omega \hat{e}_3 \wedge \dot{B} \cdot \frac{\partial \dot{B}}{\partial \dot{\phi}} \frac{M}{\pi R^2} \, dA = \int_{B \in \mathbb{D}} -2\omega \hat{e}_3 \cdot \dot{B} \wedge [\hat{e}_2 \wedge (B - C)] \frac{M}{\pi R^2} \, dA = \\
&= \int_{B \in \mathbb{D}} -2\omega \hat{e}_3 \cdot \dot{s} \hat{e}_2 \wedge [\hat{e}_2 \wedge (B - C)] \frac{M}{\pi R^2} \, dA = \\
&= -\frac{2M\omega}{\pi R^2} \dot{s} \hat{e}_3 \cdot \int_{B \in \mathbb{D}} [\hat{e}_2 \cdot (B - C) \hat{e}_2 - \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 (B - C)] \, dA = \\
&= \frac{2M\omega}{\pi R^2} \dot{s} \hat{e}_3 \cdot \int_{B \in \mathbb{D}} (B - C) \, dA = 2M\omega \dot{s} \hat{e}_3 \cdot \frac{1}{\pi R^2} \int_{B \in \mathbb{D}} (B - C) \, dA = 0,
\end{aligned}$$

come prima.