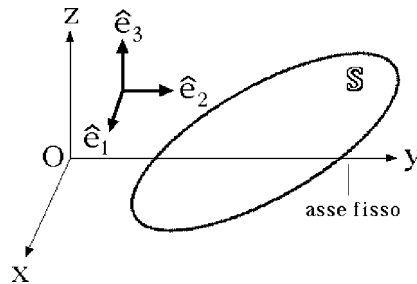


**Esercizio 1**

Nella terna inerziale  $Oxyz$  si consideri un corpo rigido  $\mathbb{S}$  con asse fisso  $Oy$ , privo di attrito.



In una assegnata configurazione del sistema, ai punti di  $\mathbb{S}$ :

$$P_1(1, 0, 2) \quad P_2(-1, 2, 1) \quad P_3(0, -1, 1)$$

sono rispettivamente applicate le forze:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \alpha \hat{e}_1 + 2 \hat{e}_2 - \hat{e}_3 \\ \vec{F}_2 &= -\hat{e}_1 + 2 \hat{e}_2 + 2 \hat{e}_3 \\ \vec{F}_3 &= \hat{e}_1 - 2 \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \end{aligned}$$

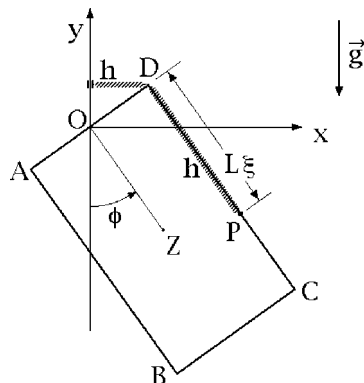
con  $\alpha$  costante reale.

- (a) Determinare la costante  $\alpha \in \mathbb{R}$  in modo che la configurazione assegnata sia di equilibrio per il sistema.
- (b) Usando il valore di  $\alpha \in \mathbb{R}$  ricavato in (a), calcolare risultante e momento risultante in  $O$  del sistema di forze applicate.
- (c) Con lo stesso valore di  $\alpha$ , scrivere l'equazione parametrica dell'asse centrale del sistema di forze applicate.
- (d) Determinare l'espressione generale della velocità virtuale del punto  $P \in \mathbb{S}$  individuato da:

$$P - O = 2 \hat{e}_1 - 3 \hat{e}_2 + \hat{e}_3 .$$

## Esercizio 2

Nel piano verticale  $Oxy$  di una terna di riferimento galileiana si consideri la lamina rettangolare omogenea  $ABCD$ , di massa  $M$ , centro  $Z$  e lati  $|A - B| = L$ ,  $|B - C| = R$ , con  $R \leq L$ . Il punto medio del lato  $AD$  della lamina è fissato nell'origine  $O$  della terna di riferimento, mentre un punto  $P$ , di massa  $m$ , è libero di scorrere senza attrito lungo il lato  $CD$  della lamina stessa. Due molle ideali di costante elastica  $h = 2mg/R$  connettono il vertice  $D$  rispettivamente con il punto  $P$  e con la proiezione ortogonale di  $D$  sull'asse verticale  $Oy$ .



Assunti i vincoli ideali, e facendo uso dei parametri  $\phi$  e  $\xi$  illustrati in figura come coordinate lagrangiane —  $\phi \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$  — determinare:

- l'energia cinetica del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$ ;
- gli equilibri ordinari del sistema;
- le equazioni pure del moto;
- le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- le condizioni che individuano gli equilibri di confine del sistema;
- le componenti lagrangiane della sollecitazione di resistenza viscosa  $\vec{F} = -\beta\dot{C}$ ,  $\beta > 0$ , applicata al vertice  $C$ .

### Soluzione dell'esercizio 1

(a) **Valore della costante  $\alpha$  affinché la configurazione considerata sia di equilibrio**  
Nell'ipotesi che il corpo rigido abbia asse fisso  $Oxy$  privo di attrito, la condizione affinché la configurazione considerata sia un equilibrio per il sistema è che si annulli il momento risultante rispetto all'asse fisso del sistema di forze applicate:

$$\vec{M}_O \cdot \hat{e}_2 = 0 .$$

La condizione diventa pertanto:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O \cdot \hat{e}_2 &= \hat{e}_2 \cdot [(P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 + (P_3 - O) \wedge \vec{F}_3] = \\ &= \hat{e}_2 \cdot \left[ \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ \alpha & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right] = \\ &= 2\alpha + 1 - 1 + 2 + 1 = 2\alpha + 3 = 0 \end{aligned}$$

in modo che risulta  $\alpha = -3/2$ .

### (b) Risultante e momento risultante in $O$ del sistema di forze applicate

Per definizione, il risultante  $\vec{R}$  del sistema di forze applicate è dato dalla somma delle forze  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ :

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \\ &= -\frac{3}{2}\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - \hat{e}_3 - \hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 + \hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + \hat{e}_3 = \\ &= -\frac{3}{2}\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 \end{aligned}$$

mentre per il momento risultante in  $O$  dello stesso sistema di forze si ha:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 + (P_3 - O) \wedge \vec{F}_3 = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3/2 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -4\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 + 2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3 = -\hat{e}_1 + 3\hat{e}_3 . \end{aligned}$$

### (c) Equazione parametrica dell'asse centrale del sistema di forze applicate

L'asse centrale del sistema di forze applicate in esame è per definizione il luogo dei punti  $A$  dello spazio per cui il momento risultante in  $A$  del sistema risulta parallelo al risultante delle forze, ossia:

$$\vec{M}_A = \lambda \vec{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e dunque, equivalentemente:

$$\vec{M}_O + (O - A) \wedge \vec{R} = \lambda \vec{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R} . \quad (1)$$

La sua esistenza, come retta parallela ad  $\vec{R}$ , è assicurata dall'essere  $\vec{R} \neq 0$ , come già verificato al punto (b). Moltiplicando vettorialmente a sinistra per  $\vec{R}$  ambo i membri della precedente equazione, si ottiene:

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_O + \vec{R} \wedge [(O - A) \wedge \vec{R}] = 0$$

che la nota identità per il doppio prodotto vettoriale  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$  consente di riscrivere nella forma:

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_O + (O - A)|\vec{R}|^2 - \vec{R} \cdot (O - A) \vec{R} = 0$$

ovvero:

$$A - O = \frac{1}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \wedge \vec{M}_O + \frac{(A - O) \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^2} \vec{R}.$$

Sebbene il coefficiente dell'ultimo termine a secondo membro dipenda a priori da  $A$  stesso e risulti pertanto incognito, i punti  $A$  devono comunque soddisfare la condizione

$$A - O = \frac{1}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \wedge \vec{M}_O + \mu \vec{R} \quad (2)$$

con  $\mu \in \mathbb{R}$  costante opportuna. In effetti, è immediato verificare che la relazione precedente fornisce una soluzione dell'equazione (1) per qualsivoglia scelta del parametro  $\mu \in \mathbb{R}$ . Vale infatti:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O + (O - A) \wedge \vec{R} &= \vec{M}_O - \left( \frac{1}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \wedge \vec{M}_O + \mu \vec{R} \right) \wedge \vec{R} = \\ &= \vec{M}_O + \frac{1}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{M}_O) = \vec{M}_O + \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} \vec{R} - \frac{|\vec{R}|^2}{|\vec{R}|^2} \vec{M}_O = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \end{aligned}$$

che è della forma prescritta a patto di assumere, come lecito,

$$\lambda = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2}.$$

La (2) costituisce dunque la rappresentazione parametrica, in forma vettoriale, dell'asse centrale. Non rimane che sostituire i valori calcolati di risultante e momento risultante in  $O$  per ottenere:

$$\begin{aligned} |\vec{R}|^2 &= \left| -\frac{3}{2} \hat{e}_1 + 2 \hat{e}_2 + 2 \hat{e}_3 \right|^2 = \frac{9}{4} + 4 + 4 = \frac{41}{4} \\ \vec{R} \wedge \vec{M}_O &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -3/2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \hat{e}_1 + \left( -2 + \frac{9}{2} \right) \hat{e}_2 + 2 \hat{e}_3 = 6 \hat{e}_1 + \frac{5}{2} \hat{e}_2 + 2 \hat{e}_3 \end{aligned}$$

e dunque:

$$A - O = \frac{4}{41} \left( 6 \hat{e}_1 + \frac{5}{2} \hat{e}_2 + 2 \hat{e}_3 \right) + \mu \left( -\frac{3}{2} \hat{e}_1 + 2 \hat{e}_2 + 2 \hat{e}_3 \right) \quad \forall \mu \in \mathbb{R} .$$

All'equazione parametrica si perviene considerando le proiezioni ortogonali lungo gli assi coordinati dell'equazione vettoriale precedente:

$$\begin{cases} x = \frac{24}{41} - \frac{3}{2}\mu \\ y = \frac{10}{41} + 2\mu \\ z = \frac{8}{41} + 2\mu \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} .$$

(d) **Espressione generale per la velocità virtuale del punto  $P$**

La velocità virtuale del punto  $P$  può sempre scriversi come:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

essendo il punto  $O$  fisso sull'asse di rotazione e il vettore velocità angolare istantanea  $\vec{\omega}$  del tipo:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_2$$

con  $\omega \in \mathbb{R}$  arbitrario. L'espressione della velocità virtuale diventa pertanto:

$$\vec{v}_P = \omega \hat{e}_2 \wedge (2 \hat{e}_1 - 3 \hat{e}_2 + \hat{e}_3) = \omega \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \omega (\hat{e}_1 - 2 \hat{e}_3)$$

ossia:

$$\vec{v}_P = \omega \hat{e}_1 - 2\omega \hat{e}_3 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

## Soluzione dell'esercizio 2

(a) **Energia cinetica**

L'energia cinetica del sistema è data dalla somma di due contributi, l'uno relativo alla lamina rettangolare  $ABCD$  e l'altro relativo al punto materiale  $P$ , contributi che conviene determinare separatamente.

*Energia cinetica del punto materiale  $P$*

Dalle ovvie relazioni trigonometriche:

$$D - O = \frac{R}{2} \cos \phi \hat{e}_1 + \frac{R}{2} \sin \phi \hat{e}_2 \quad P - D = L\xi \sin \phi \hat{e}_1 - L\xi \cos \phi \hat{e}_2$$

si deduce l'espressione seguente per il vettore posizione di  $P$  rispetto all'origine  $O$ :

$$P - O = \left( L\xi \sin \phi + \frac{R}{2} \cos \phi \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{R}{2} \sin \phi - L\xi \cos \phi \right) \hat{e}_2 \quad (3)$$

in modo che la velocità dello stesso punto, rispetto alla terna  $Oxyz$  diventa:

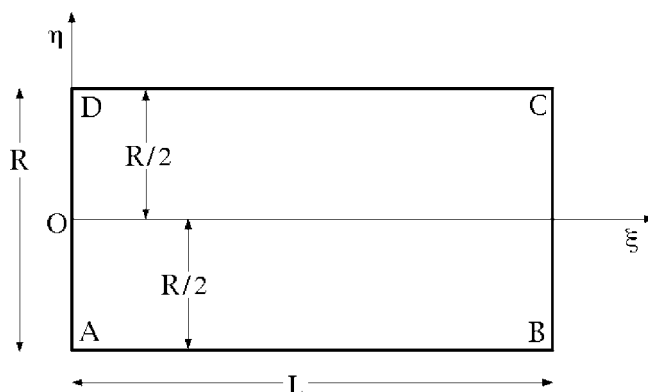
$$\dot{P} = \left( L\dot{\xi} \sin \phi + L\xi \cos \phi \dot{\phi} - \frac{R}{2} \sin \phi \dot{\phi} \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{R}{2} \cos \phi \dot{\phi} - L\dot{\xi} \cos \phi + L\xi \sin \phi \dot{\phi} \right) \hat{e}_2 .$$

Per l'energia cinetica del punto  $P$ , di massa  $m$ , si ha dunque:

$$\begin{aligned} T_P &= \frac{m}{2} |\dot{P}|^2 = \\ &= \frac{m}{2} \left| \left( L\dot{\xi} \sin \phi + L\xi \cos \phi \dot{\phi} - \frac{R}{2} \sin \phi \dot{\phi} \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{R}{2} \cos \phi \dot{\phi} - L\dot{\xi} \cos \phi + L\xi \sin \phi \dot{\phi} \right) \hat{e}_2 \right|^2 = \\ &= \frac{m}{2} \left[ \left( L\dot{\xi} \sin \phi + L\xi \cos \phi \dot{\phi} - \frac{R}{2} \sin \phi \dot{\phi} \right)^2 + \left( \frac{R}{2} \cos \phi \dot{\phi} - L\dot{\xi} \cos \phi + L\xi \sin \phi \dot{\phi} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{m}{2} \left[ L^2 \dot{\xi}^2 + \frac{R^2}{4} \dot{\phi}^2 + L^2 \xi^2 \dot{\phi}^2 - RL \dot{\xi} \dot{\phi} \right] . \end{aligned}$$

### *Energia cinetica della lamina rettangolare*

La lamina rettangolare ruota attorno all'asse fisso  $Oz$ , per cui occorre determinarne il momento d'inerzia rispetto allo stesso asse. A questo scopo conviene introdurre la terna di riferimento solidale con origine in  $O$  e assi  $O\xi$  e  $O\eta$ , rispettivamente paralleli a  $B - A$  e  $D - A$ , come illustrato nella figura seguente:



Il momento d'inerzia rispetto ad  $Oz$  della lamina, omogenea e di massa  $M$ , è allora calcolabile come:

$$\begin{aligned} I_{Oz}^{ABCD} &= \int_0^L d\xi \int_{-R/2}^{R/2} d\eta \frac{M}{RL} (\xi^2 + \eta^2) = \int_0^L d\xi \frac{M}{RL} \left[ \xi^2 \eta + \frac{\eta^3}{3} \right]_{\eta=-R/2}^{R/2} = \\ &= \int_0^L d\xi \frac{M}{RL} \left[ \xi^2 R + \frac{R^3}{12} \right] = \frac{M}{RL} \left[ R \frac{\xi^3}{3} + \frac{R^3}{12} \xi \right]_0^L = \\ &= \frac{M}{RL} \left[ \frac{RL^3}{3} + \frac{R^3}{12} L \right] = M \left( \frac{L^2}{3} + \frac{R^2}{12} \right) . \end{aligned}$$

La velocità angolare istantanea della lamina si ricava derivando rispetto al tempo l'angolo  $\phi$  compreso fra la direzione  $Oz$ , fissa rispetto al sistema rigido, e la direzione  $Oy$  discendente,

fissata nel sistema di riferimento assoluto, e moltiplicando quindi tale derivata per il versore  $\hat{e}_3$  associato all'asse di rotazione  $Oz$ :

$$\vec{\omega}_{ABCD} = \dot{\phi} \hat{e}_3 .$$

Ciò conformemente al fatto che l'asse coordinato  $Oz$  e l'angolo di rotazione  $\phi$  sono mutuamente orientati in modo da rispettare la convenzione levogira — o regola della mano destra. Pertanto:

$$T_{ABCD} = \frac{1}{2} I_{Oz}^{ABCD} |\vec{\omega}_{ABCD}|^2 = \frac{M}{2} \left( \frac{L^2}{3} + \frac{R^2}{12} \right) \dot{\phi}^2 .$$

### *Energia cinetica del sistema*

L'energia cinetica totale è ora la somma dei contributi calcolati, e risulta:

$$T = T_P + T_{ABCD} = \frac{m}{2} \left[ L^2 \dot{\xi}^2 + \frac{R^2}{4} \dot{\phi}^2 + L^2 \xi^2 \dot{\phi}^2 - RL \dot{\xi} \dot{\phi} \right] + \frac{M}{2} \left( \frac{L^2}{3} + \frac{R^2}{12} \right) \dot{\phi}^2 .$$

### **(b) Equilibri ordinari**

È immediato verificare che il sistema risulta a vincoli indipendenti dal tempo e che tutte le sollecitazioni attive agenti su di esso hanno natura posizionale e conservativa: l'interazione elastica fra  $D$  e  $P$ , l'interazione elastica fra  $D$  e la sua proiezione ortogonale sull'asse verticale  $Oy$  (entrambe con costante elastica  $h = 2mg/R$ ), la forza peso della lamina e quella del punto materiale  $P$ . Le configurazioni di equilibrio ordinarie del sistema si identificheranno pertanto con i punti critici del potenziale totale  $U$ , al cui calcolo è necessario procedere.

### *Potenziale del sistema*

Il potenziale delle forze peso agenti sulla lamina omogenea  $ABCD$  si ricava immediatamente in funzione dell'ordinata del baricentro  $Z$  e vale:

$$U_g^{ABCD} = -Mg \hat{e}_2 \cdot (Z - O) = -Mg \left( -\frac{L}{2} \cos \phi \right) = Mg \frac{L}{2} \cos \phi .$$

In modo analogo si procede al calcolo del potenziale gravitazione di  $P$ , ricordando l'espressione (3) del vettore posizione  $P - O$ :

$$U_g^P = -mg \hat{e}_2 \cdot (P - O) = -mg \left( \frac{R}{2} \sin \phi - L\xi \cos \phi \right) = mg \left( L\xi \cos \phi - \frac{R}{2} \sin \phi \right) .$$

L'interazione elastica fra il vertice  $D$  e il punto materiale  $P$  è descritta dal potenziale:

$$U_{el}^{DP} = -\frac{h}{2} |P - D|^2 = -\frac{1}{2} \frac{2mg}{R} (L\xi)^2 = -\frac{mgL^2}{R} \xi^2$$

mentre quella di  $D$  con la sua proiezione ortogonale su  $Oy$  contribuisce con l'ulteriore termine di potenziale elastico:

$$U_{el}^{DOy} = -\frac{h}{2} [(D - O) \cdot \hat{e}_1]^2 = -\frac{1}{2} \frac{2mg}{R} \left( \frac{R}{2} \cos \phi \right)^2 = -\frac{mgR}{4} \cos^2 \phi .$$

Il potenziale del sistema è la somma dei quattro contributi appena calcolati, e risulta:

$$U(\phi, \xi) = Mg \frac{L}{2} \cos \phi + mgL\xi \cos \phi - mg \frac{R}{2} \sin \phi - \frac{mgL^2}{R} \xi^2 - \frac{mgR}{4} \cos^2 \phi$$

definito per  $(\phi, \xi) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ .

#### *Equilibri ordinari*

Si identificano tutti e soli con i punti critici del potenziale  $U$ , nel dominio di definizione dello stesso. Le componenti del gradiente di  $U$  sono date da:

$$\begin{cases} U_\phi = -Mg \frac{L}{2} \sin \phi - mgL\xi \sin \phi - mg \frac{R}{2} \cos \phi + \frac{mgR}{2} \cos \phi \sin \phi \\ U_\xi = mgL \cos \phi - 2 \frac{mgL^2}{R} \xi \end{cases}$$

ed uguagliate a zero porgono il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -Mg \frac{L}{2} \sin \phi - mgL\xi \sin \phi - mg \frac{R}{2} \cos \phi + \frac{mgR}{2} \cos \phi \sin \phi = 0 \\ mgL \cos \phi - 2 \frac{mgL^2}{R} \xi = 0 . \end{cases}$$

Dalla seconda di tali equazioni si ricava la relazione:

$$\xi = \frac{R}{2L} \cos \phi \quad (5)$$

che sostituita nella prima porge l'equazione trigonometrica:

$$-Mg \frac{L}{2} \sin \phi - mgL \frac{R}{2L} \cos \phi \sin \phi - mg \frac{R}{2} \cos \phi + \frac{mgR}{2} \cos \phi \sin \phi = 0$$

ossia, semplificando,

$$ML \sin \phi + mR \cos \phi = 0 .$$

In questa equazione il coseno di  $\phi$  è certamente diverso da zero per qualsivoglia soluzione — in caso contrario dovrebbe aversi  $ML = 0$ , contro l'ipotesi — e quindi si può scrivere, equivalentemente:

$$\operatorname{tg} \phi + \frac{mR}{ML} = 0$$

da cui seguono le soluzioni cercate:

$$\phi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( -\frac{mR}{ML} \right) + n\pi = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{mR}{ML} \right) + n\pi = -\phi^* + n\pi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

essendosi posto per brevità  $\phi^* = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{mR}{ML} \right)$ , con  $\phi^* \in (0, \pi/2)$ . I corrispondenti valori di  $\xi$  sono individuati dall'equazione (5):

$$\xi = \frac{R}{2L} \cos(-\phi^* + n\pi) = (-1)^n \frac{R}{2L} \cos(-\phi^*) = (-1)^n \frac{R}{2L} \cos \phi^*$$

e poiché  $\cos \phi^* > 0$  possono porsi nella forma equivalente:

$$\xi = (-1)^n \frac{R}{2L} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi^*}} = (-1)^n \frac{R}{2L} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mR}{ML}\right)^2}} = (-1)^n \frac{1}{2} \frac{MR}{\sqrt{M^2 L^2 + m^2 R^2}} .$$

Per  $n \in \mathbb{Z}$  dispari la coordinata  $\xi$  del punto critico risulta negativa:

$$\xi = -\frac{1}{2} \frac{MR}{\sqrt{M^2 L^2 + m^2 R^2}} < 0$$

e quindi il punto critico così determinato non è accettabile come configurazione di equilibrio, in quanto  $\xi$  non appartiene all'intervallo di definizione  $[0, 1]$ .

Per  $n \in \mathbb{Z}$  pari si ha invece un valore positivo ricompreso nell'intervallo di definizione della  $\xi$ :

$$\xi = \xi^* = \frac{1}{2} \frac{MR}{\sqrt{M^2 L^2 + m^2 R^2}} < \frac{1}{2} \frac{MR}{ML} = \frac{R}{2L} \leq \frac{L}{2L} = \frac{1}{2} < 1 .$$

Di conseguenza le coppie ordinate:

$$(\phi, \xi) = (-\phi^* + 2k\pi, \xi^*) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

individuano tutti e soli gli equilibri del sistema, equilibri che si potrebbero tranquillamente identificare fra di loro — in effetti una variazione di  $2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , della variabile angolare  $\phi$  non altera di fatto la configurazione del sistema.

### (c) Equazioni pure del moto

Trattandosi di sistema olonomo a vincoli ideali, soggetto a sollecitazioni puramente posizionali e conservative, le equazioni pure del moto si identificano con quelle di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0$$

La lagrangiana del sistema è data dalla somma dell'energia cinetica e del potenziale del sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T + U = & \frac{m}{2} \left[ L^2 \dot{\xi}^2 + \frac{R^2}{4} \dot{\phi}^2 + L^2 \xi^2 \dot{\phi}^2 - RL \dot{\xi} \dot{\phi} \right] + \frac{M}{2} \left( \frac{L^2}{3} + \frac{R^2}{12} \right) \dot{\phi}^2 + \\ & + Mg \frac{L}{2} \cos \phi + mgL \xi \cos \phi - mg \frac{R}{2} \sin \phi - \frac{mgL^2}{R} \xi^2 - \frac{mgR}{4} \cos^2 \phi \end{aligned}$$

Poiché tutte le sollecitazioni attive agenti sul sistema hanno natura posizionale e conservativa e di esse si è tenuto conto nella definizione del potenziale  $U$ , le equazioni pure del moto sono quelle di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0 .$$

Tali equazioni seguono immediatamente dalle espressioni:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{mR^2}{4}\dot{\phi} + mL^2\xi^2\dot{\phi} - \frac{mRL}{2}\dot{\xi} + M\left(\frac{L^2}{3} + \frac{R^2}{12}\right)\dot{\phi} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) &= \frac{mR^2}{4}\ddot{\phi} + mL^2\xi^2\ddot{\phi} + 2mL^2\xi\dot{\xi}\dot{\phi} - \frac{mRL}{2}\ddot{\xi} + M\left(\frac{L^2}{3} + \frac{R^2}{12}\right)\ddot{\phi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -\frac{MgL}{2}\sin\phi - mgL\xi\sin\phi - \frac{mgR}{2}\cos\phi + \frac{mgR}{2}\sin\phi\cos\phi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} &= mL^2\dot{\xi} - \frac{m}{2}RL\dot{\phi} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}}\right) = mL^2\ddot{\xi} - \frac{m}{2}RL\ddot{\phi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} &= mL^2\xi\dot{\phi}^2 + mgL\cos\phi - \frac{2mgL^2}{R}\xi\end{aligned}$$

le quali porgono:

$$\begin{cases} \frac{mR^2}{4}\ddot{\phi} + mL^2\xi^2\ddot{\phi} + 2mL^2\xi\dot{\xi}\dot{\phi} - \frac{mRL}{2}\ddot{\xi} + M\left(\frac{L^2}{3} + \frac{R^2}{12}\right)\ddot{\phi} + \\ + \frac{MgL}{2}\sin\phi + mgL\xi\sin\phi + \frac{mgR}{2}\cos\phi - \frac{mgR}{2}\sin\phi\cos\phi = 0 \\ mL^2\ddot{\xi} - \frac{m}{2}RL\ddot{\phi} - mL^2\xi\dot{\phi}^2 - mgL\cos\phi + \frac{2mgL^2}{R}\xi = 0 \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} \left[ \frac{mR^2}{4} + M\left(\frac{L^2}{3} + \frac{R^2}{12}\right) + mL^2\xi^2 \right] \ddot{\phi} - \frac{mRL}{2}\ddot{\xi} + 2mL^2\xi\dot{\xi}\dot{\phi} + \\ + \frac{MgL}{2}\sin\phi + mgL\xi\sin\phi + \frac{mgR}{2}\cos\phi - \frac{mgR}{2}\sin\phi\cos\phi = 0 \\ -\frac{mRL}{2}\ddot{\phi} + mL^2\ddot{\xi} - mL^2\xi\dot{\phi}^2 - mgL\cos\phi + \frac{2mgL^2}{R}\xi = 0 . \end{cases}$$

Il sistema risulta sempre riconducibile alla forma normale, in quanto la matrice dei coefficienti dei termini del secondo ordine  $\ddot{\phi}$ ,  $\ddot{\xi}$ :

$$A(\phi, \xi) = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} + M\left(\frac{L^2}{3} + \frac{R^2}{12}\right) + mL^2\xi^2 & -\frac{mRL}{2} \\ -\frac{mRL}{2} & mL^2 \end{pmatrix}$$

è reale simmetrica e definita positiva — dunque invertibile. Si ha infatti:

$$\text{tr}A(\phi, \xi) = \frac{mR^2}{4} + M\left(\frac{L^2}{3} + \frac{R^2}{12}\right) + mL^2\xi^2 + mL^2 > 0$$

$$\det A(\phi, \xi) = mML^2\left(\frac{L^2}{3} + \frac{R^2}{12}\right) + m^2L^4\xi^2 > 0$$

in modo che entrambi gli autovalori di  $A(\phi, \xi)$  assumono segno positivo.

**(d) Stabilità degli equilibri ordinari**

Si è dimostrato al precedente punto (b) che l'unica configurazione di equilibrio ordinaria del sistema è individuata da  $(\phi, \xi) = (-\phi^*, \xi^*)$ , con:

$$\phi^* = \arctg\left(\frac{mR}{ML}\right) \quad \text{e} \quad \xi^* = \frac{R}{2L} \cos \phi^* = \frac{1}{2} \frac{MR}{\sqrt{M^2L^2 + m^2R^2}} .$$

Dall'espressione delle derivate seconde:

$$U_{\phi\phi}(\phi, \xi) = -\frac{MgL}{2} \cos \phi - mgL\xi \cos \phi + \frac{mgR}{2} \sin \phi + \frac{mgR}{2}(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)$$

$$U_{\phi\xi}(\phi, \xi) = U_{\xi\phi}(\phi, \xi) = -mgL \sin \phi$$

$$U_{\xi\xi}(\phi, \xi) = -2\frac{mgL^2}{R}$$

si ricava che:

$$\begin{aligned} U_{\phi\phi}(-\phi^*, \xi^*) &= -\frac{MgL}{2} \cos \phi^* - mgL\xi^* \cos \phi^* - \frac{mgR}{2} \sin \phi^* + \frac{mgR}{2}(\cos^2 \phi^* - \sin^2 \phi^*) = \\ &= -\frac{MgL}{2} \cos \phi^* - \frac{mgR}{2} \cos^2 \phi^* - \frac{mgR}{2} \sin \phi^* + \frac{mgR}{2}(\cos^2 \phi^* - \sin^2 \phi^*) = \\ &= \frac{mgR}{2} \left[ -\frac{ML}{mR} \cos \phi^* - \cos^2 \phi^* - \sin \phi^* + \cos^2 \phi^* - \sin^2 \phi^* \right] = \\ &= -\frac{mgR}{2} \left[ \frac{ML}{mR} \cos \phi^* + \sin \phi^* + \sin^2 \phi^* \right] \end{aligned}$$

$$U_{\phi\xi}(-\phi^*, \xi^*) = U_{\xi\phi}(-\phi^*, \xi^*) = mgL \sin \phi^*$$

$$U_{\xi\xi}(-\phi^*, \xi^*) = -2\frac{mgL^2}{R}$$

per cui l'hessiana del potenziale nella configurazione  $(\phi, \xi) = (-\phi^*, \xi^*)$  assume la forma:

$$H_U(-\phi^*, \xi^*) = \begin{pmatrix} -\frac{mgR}{2} \left[ \frac{ML}{mR} \cos \phi^* + \sin \phi^* + \sin^2 \phi^* \right] & mgL \sin \phi^* \\ mgL \sin \phi^* & -2\frac{mgL^2}{R} \end{pmatrix}$$

con traccia negativa:

$$\text{tr}H_U(-\phi^*, \xi^*) = -\frac{mgR}{2} \left[ \frac{ML}{mR} \cos \phi^* + \sin \phi^* + \sin^2 \phi^* \right] - 2\frac{mgL^2}{R} < 0$$

e determinante positivo:

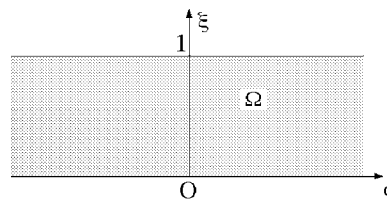
$$\begin{aligned} \det H_U(-\phi^*, \xi^*) &= m^2g^2L^2 \left[ \frac{ML}{mR} \cos \phi^* + \sin \phi^* + \sin^2 \phi^* \right] - m^2g^2L^2 \sin^2 \phi^* = \\ &= m^2g^2L^2 \left[ \frac{ML}{mR} \cos \phi^* + \sin \phi^* \right] > 0 \end{aligned}$$

essendo  $\phi^* = \arctg(mR/ML) \in (0, \pi/2)$ . La matrice  $H_U(-\phi^*, \xi^*)$  risulta pertanto definita negativa e consente di riconoscere nella configurazione  $(\phi, \xi) = (-\phi^*, \xi^*)$  un massimo relativo proprio del potenziale  $U$ , massimo la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

**(e) Condizioni che individuano gli equilibri di confine**

Il dominio di definizione della parametrizzazione del sistema scleronomo è la striscia definita da:

$$\Omega = \{(\phi, \xi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq 1\}$$



L'unica configurazione di equilibrio ordinario del sistema è già stata determinata al punto (b). Si vogliono ora individuare le condizioni che permettono di calcolare gli equilibri di confine, facendo uso del teorema dei lavori virtuali. A questo scopo si osserva che l'espressione generale del lavoro virtuale in una configurazione  $(\phi, \xi) \in \Omega$ , relativo allo spostamento virtuale  $(\delta\phi, \delta\xi)$  è data da:

$$\delta L = Q_\phi(\phi, \xi)\delta\phi + Q_\xi(\phi, \xi)\delta\xi$$

con:

$$Q_\phi(\phi, \xi) = U_\phi(\phi, \xi) = -Mg\frac{L}{2}\sin\phi - mgL\xi\sin\phi - mg\frac{R}{2}\cos\phi + \frac{mgR}{2}\cos\phi\sin\phi$$

$$Q_\xi(\phi, \xi) = U_\xi(\phi, \xi) = mgL\cos\phi - 2\frac{mgL^2}{R}\xi.$$

La frontiera del dominio  $\Omega$  consiste delle rette  $\xi = 0$  e  $\xi = +1$ , che conviene esaminare separatamente.

*Configurazioni della forma  $(\phi, \xi) = (\phi, 0)$ ,  $\phi \in \mathbb{R}$*

Per una qualsiasi configurazione del tipo indicato, gli spostamenti virtuali si scrivono:

$$(\delta\phi, \delta\xi), \quad \delta\phi \in \mathbb{R}, \quad \delta\xi \geq 0.$$

Dal teorema dei lavori virtuali si ha allora che la configurazione è un equilibrio — di confine — se e soltanto se il lavoro virtuale delle sollecitazioni attive risulta non positivo per ogni spostamento virtuale relativo alla configurazione considerata:

$$\delta L = Q_\phi(\phi, 0)\delta\phi + Q_\xi(\phi, 0)\delta\xi \leq 0 \quad \forall \delta\phi \in \mathbb{R}, \quad \delta\xi \geq 0$$

ossia:

$$\begin{cases} Q_\phi(\phi, 0) = 0 \\ Q_\xi(\phi, 0) \leq 0. \end{cases}$$

La precedente condizione si esplicita nella forma:

$$\begin{cases} -Mg \frac{L}{2} \sin \phi - mg \frac{R}{2} \cos \phi + \frac{mgR}{2} \cos \phi \sin \phi = 0 \\ mg \cos \phi \leq 0 \end{cases}$$

che equivale a:

$$\begin{cases} -ML \sin \phi - mR \cos \phi + mR \cos \phi \sin \phi = 0 \\ \cos \phi \leq 0 . \end{cases}$$

L'equazione che compare nel precedente sistema si riscrive come:

$$-\frac{ML}{mR} \sin \phi - \cos \phi + \sin \phi \cos \phi = 0$$

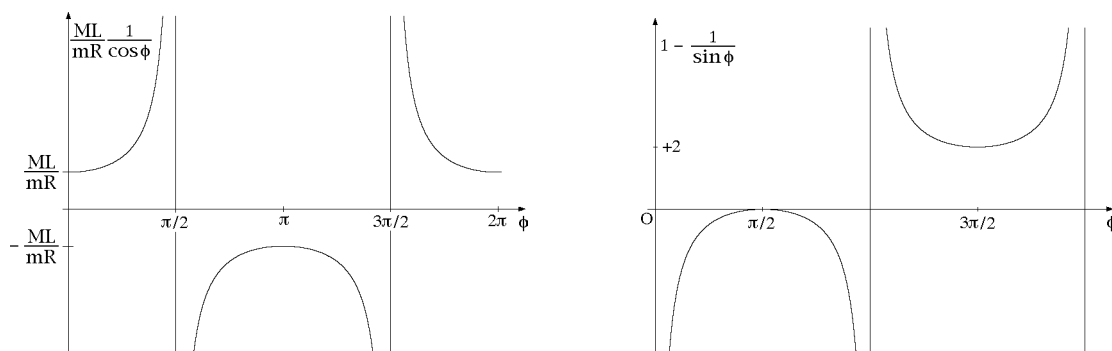
e poiché certamente per ogni sua soluzione deve aversi  $\sin \phi, \cos \phi \neq 0$ :

$$-\frac{ML}{mR} \frac{1}{\cos \phi} - \frac{1}{\sin \phi} + 1 = 0$$

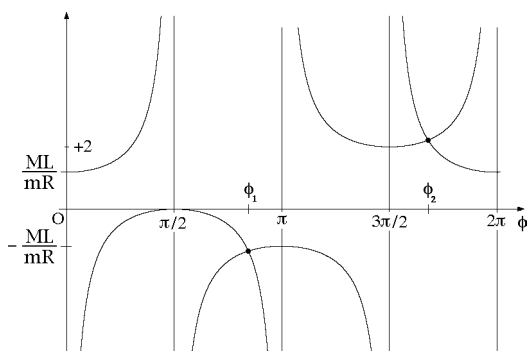
ovvero:

$$\frac{ML}{mR} \frac{1}{\cos \phi} = 1 - \frac{1}{\sin \phi} .$$

Le funzioni a primo e a secondo membro hanno i grafici illustrati nelle figure seguenti:



grafici che sovrapposti porgono:



e per ogni  $ML/mR > 0$  evidenziano la presenza di due soluzioni,  $\phi_1 \in (\pi/2, \pi)$  e  $\phi_2 \in (3\pi/2, 2\pi)$ . Di queste soltanto  $\phi_1$  corrisponde ad un equilibrio, in quanto

$$\cos \phi_1 < 0$$

mentre  $\cos \phi_2 > 0$ . In conclusione, le sole configurazioni di confine della forma  $(\phi, \xi) = (\phi, 0)$  sono date da:

$$(\phi, \xi) = (\phi_1 + 2\pi n, 0) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

con  $\phi_1$  unica radice in  $(\pi/2, \pi)$  dell'equazione trigonometrica:

$$\frac{ML}{mR} \frac{1}{\cos \phi} + \frac{1}{\sin \phi} = 1 .$$

*Configurazioni della forma  $(\phi, \xi) = (\phi, 1)$ ,  $\phi \in \mathbb{R}$*

Gli spostamenti virtuali relativi a una configurazione di questo tipo assumono la forma:

$$(\delta\phi, \delta\xi) , \quad \delta\phi \in \mathbb{R} , \quad \delta\xi \leq 0$$

in modo che per il teorema dei lavori virtuali la configurazione  $(\phi, 1)$  risulta di equilibrio se e soltanto se:

$$\delta L = Q_\phi(\phi, 1)\delta\phi + Q_\xi(\phi, 1)\delta\xi \leq 0 \quad \forall \delta\phi \in \mathbb{R}, \delta\xi \leq 0$$

ossia:

$$\begin{cases} Q_\phi(\phi, 1) = 0 \\ Q_\xi(\phi, 1) \geq 0 . \end{cases}$$

Le condizioni precedenti si scrivono esplicitamente come:

$$\begin{cases} -Mg \frac{L}{2} \sin \phi - mgL \sin \phi - mg \frac{R}{2} \cos \phi + \frac{mgR}{2} \cos \phi \sin \phi = 0 \\ mg \cos \phi - \frac{2mgL}{R} \geq 0 \end{cases}$$

ed equivalgono a:

$$\begin{cases} -Mg \frac{L}{2} \sin \phi - mgL \sin \phi - mg \frac{R}{2} \cos \phi + \frac{mgR}{2} \cos \phi \sin \phi = 0 \\ \cos \phi \geq \frac{2L}{R} . \end{cases}$$

Ma la disequazione:

$$\cos \phi \geq \frac{2L}{R}$$

non può essere soddisfatta per via dell'ipotesi che sia  $L \geq R$ :

$$\cos \phi \geq \frac{2L}{R} \geq 2 > 1 .$$

Dunque non esistono equilibri lungo questo tratto della frontiera del dominio  $\Omega$ .

**(f) Componenti lagrangiane della sollecitazione di resistenza viscosa**

Il vettore posizione del vertice  $C$ , punto di applicazione della forza di resistenza viscosa  $-\beta\dot{C}$ , è dato dalla relazione trigonometrica — l'analogo della relazione (3), solo con  $\xi = 1$ :

$$C - O = \left( L \sin \phi + \frac{R}{2} \cos \phi \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{R}{2} \sin \phi - L \cos \phi \right) \hat{e}_2$$

in modo che le derivate parziali di  $C$  rispetto ai parametri lagrangiani risultano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \phi} &= \left( L \cos \phi - \frac{R}{2} \sin \phi \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{R}{2} \cos \phi + L \sin \phi \right) \hat{e}_2 \\ \frac{\partial C}{\partial \xi} &= 0 . \end{aligned}$$

Per le componenti lagrangiane della sollecitazione si ha allora:

$$\begin{aligned} Q_\phi &= -\beta\dot{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \phi} = -\beta \left( \frac{\partial C}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial C}{\partial \xi} \dot{\xi} \right) \cdot \frac{\partial C}{\partial \phi} = -\beta \left( \frac{\partial C}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) \cdot \frac{\partial C}{\partial \phi} = -\beta \left| \frac{\partial C}{\partial \phi} \right|^2 \dot{\phi} = \\ &= -\beta \left[ \left( L \cos \phi - \frac{R}{2} \sin \phi \right)^2 + \left( \frac{R}{2} \cos \phi + L \sin \phi \right)^2 \right] \dot{\phi} = -\beta \left( L^2 + \frac{R^2}{4} \right) \dot{\phi} \end{aligned}$$

e:

$$Q_\xi = -\beta\dot{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi} = -\beta\dot{C} \cdot 0 = 0 .$$

In conclusione, le componenti lagrangiane cercate sono le seguenti:

$$Q_\phi = -\beta \left( L^2 + \frac{R^2}{4} \right) \dot{\phi} \quad Q_\xi = 0 .$$