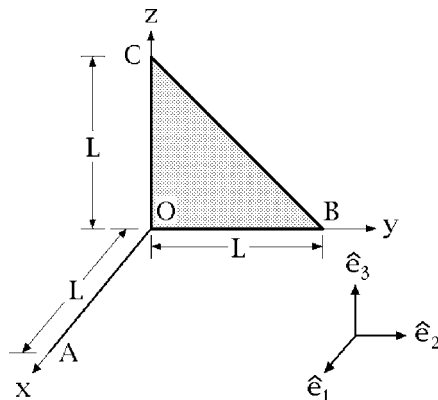


**Esercizio 1**

Un sistema rigido  $\mathbb{S}$  si compone di una lamina triangolare  $OBC$  e di un'asta rettilinea  $OA$ , saldate ortogonalmente l'una all'altra in  $O$ .  $OBC$  è rettangolo e isoscele, con cateti di lunghezza  $L$ ; di pari lunghezza è l'asta  $OA$ . Nelle coordinate della terna solidale  $Oxyz$  (vedi figura) le densità dell'asta e della lamina sono date dalle espressioni:

$$\lambda(x) = m(L+x)/L^2 \quad \sigma(y,z) = myz/L^4 .$$

Il sistema rigido si muove, con punto fisso  $O$ , rispetto ad una terna fissa  $Ox'y'z'$ , non disegnata in figura; all'istante  $t = 0$  la velocità angolare di  $\mathbb{S}$  rispetto a tale terna vale  $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$ .

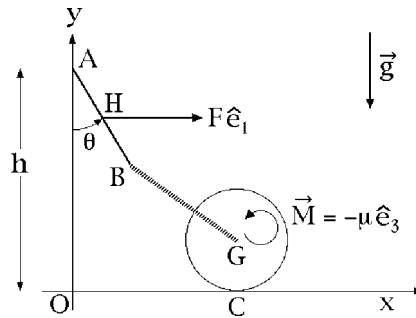


Determinare:

- (a) le coordinate del baricentro  $G$  del sistema rispetto alla terna solidale  $Oxyz$ ;
- (b) la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla stessa terna  $Oxyz$ ;
- (c) l'energia cinetica del sistema relativa a  $Ox'y'z'$ , all'istante  $t = 0$ ;
- (d) il modulo della velocità del baricentro rispetto alla terna fissa, a  $t = 0$ ;
- (e) il modulo del momento angolare  $\vec{K}_O$  del sistema rispetto alla terna fissa, sempre a  $t = 0$ ;
- (f) l'asse istantaneo di moto (o di Mozzi) allo stesso istante  $t = 0$  del sistema.

## Esercizio 2

In un piano verticale  $Oxy$  si consideri il sistema pesante costituito da un'asta  $AB$ , omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $L$ , e da un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$ . L'estremo  $A$  è fisso sull'asse  $Oy$ , ad altezza  $h > L + 2R$  sopra l'asse orizzontale  $Ox$ , mentre  $B$  è collegato al centro  $G$  del disco tramite una molla di costante elastica  $k > 0$ . Il disco rotola senza strisciare lungo la guida rettilinea  $Ox$ . Al baricentro  $H$  dell'asta è applicata una forza costante orizzontale  $\vec{F} = F \hat{e}_1$ , mentre sul disco agisce una coppia di momento costante  $\vec{M} = -\mu \hat{e}_3$  ( $\mu > 0$ ).



Scelti come coordinate lagrangiane l'angolo  $\theta$  che l'asta forma con la verticale ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ) e l'ascissa  $x$  del centro  $G$  del disco, determinare:

- le equazioni pure del moto;
- il valore della costante  $F$  in modo che per  $\theta = 0$  il sistema possa essere in equilibrio (per semplicità si usi la condizione di equilibrio ordinario);
- fissata che sia la costante  $F$  come richiesto al punto precedente, le configurazioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema;
- la stabilità degli equilibri ordinari, sempre con la stessa scelta di  $F$ ;
- le reazioni vincolari agenti sull'asta in  $A$  e sul disco in  $C$ , in corrispondenza degli equilibri.

## Soluzione dell'esercizio 1

(a) **Coordinate del baricentro  $G$  del sistema rispetto alla terna solidale  $Oxyz$**   
 Convieni calcolare la posizione del baricentro  $G$  del sistema facendo uso del teorema distributivo, una volta determinati i baricentri dell'asta  $OA$  e della lamina triangolare  $OBC$ .

*Massa e baricentro dell'asta*

La massa totale dell'asta  $OA$  è data dall'espressione:

$$M_{OA} = \int_0^L \lambda(x) dx = \int_0^L \frac{m}{L^2}(L+x) dx = \frac{3}{2}m$$

per cui il vettore posizione del relativo baricentro  $G_{OA}$  rispetto a  $Oxyz$  risulta:

$$G_{OA} - O = \frac{1}{M_{OA}} \int_0^L \lambda(x) x dx \hat{e}_1 = \frac{2}{3m} \int_0^L \frac{m}{L^2}(L+x) x dx \hat{e}_1 = \frac{5}{9}L \hat{e}_1 .$$

*Massa e baricentro della lamina*

Per quanto riguarda la massa della lamina triangolare si ha invece:

$$M_{OBC} = \int_0^L \int_0^{L-y} \sigma(y, z) dz dy = \int_0^L \int_0^{L-y} \frac{m}{L^4} yz dz dy = \frac{m}{24}$$

in modo che il vettore posizione del baricentro diviene:

$$\begin{aligned} G_{OBC} - O &= \frac{1}{M_{OBC}} \int_0^L \int_0^{L-y} \frac{m}{L^4} yz [y \hat{e}_2 + z \hat{e}_3] dz dy = \\ &= \frac{24}{m} \int_0^L \int_0^{L-y} \frac{m}{L^4} [y^2 z \hat{e}_2 + yz^2 \hat{e}_3] dz dy = \frac{2}{5} L \hat{e}_2 + \frac{2}{5} L \hat{e}_3 . \end{aligned}$$

*Baricentro del sistema*

Il baricentro  $G$  del sistema si deduce dalla proprietà distributiva, per mezzo della relazione

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{M_{OA}(G_{OA} - O) + M_{OBC}(G_{OBC} - O)}{M_{OA} + M_{OBC}} = \\ &= \left[ \frac{3}{2}m + \frac{1}{24}m \right]^{-1} \left[ \frac{3}{2}m \frac{5}{9}L \hat{e}_1 + \frac{1}{24}m \left( \frac{2}{5}L \hat{e}_2 + \frac{2}{5}L \hat{e}_3 \right) \right] = \frac{20}{37}L \hat{e}_1 + \frac{2}{185}L \hat{e}_2 + \frac{2}{185}L \hat{e}_3 . \end{aligned}$$

**(b) Matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna Oxyz**

La matrice d'inerzia del sistema  $\mathbb{S}$  può essere determinata convenientemente calcolando separatamente le matrici d'inerzia della lamina  $OBC$  e dell'asta  $OA$  rispetto alla stessa terna solidale  $Oxyz$ , e sommando quindi termine a termine i risultati così ottenuti.

*Matrice d'inerzia dell'asta*

La matrice d'inerzia dell'asta rispetto alla terna solidale  $Oxyz$  si riduce per simmetria alla semplice forma

$$[L]^{OA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{OA} & 0 \\ 0 & 0 & L_{yy}^{OA} \end{pmatrix}$$

e poiché il momento d'inerzia rispetto all'asse  $Oy$  è dato dall'espressione

$$L_{yy}^{OA} = \int_0^L \lambda(x) x^2 dx = \int_0^L \frac{m}{L^2} (L+x) x^2 dx = \frac{7}{12} mL^2$$

risulta

$$[L]^{OA} = mL^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7/12 & 0 \\ 0 & 0 & 7/12 \end{pmatrix} .$$

### Matrice d'inerzia della lamina triangolare

La lamina si colloca nel piano coordinato  $Oyz$ , che è dunque un piano di simmetria ed impone alla matrice d'inerzia di  $OBC$  la seguente struttura generale

$$[L]^{OBC} = \begin{pmatrix} 2L_{yy}^{OBC} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{OBC} & L_{yz}^{OBC} \\ 0 & L_{yz}^{OBC} & L_{yy}^{OBC} \end{pmatrix}.$$

Il momento d'inerzia  $L_{yy}^{OBC}$  rispetto all'asse  $Oy$  viene calcolato mediante integrazione esplicita in coordinate cartesiane ed è dato da:

$$L_{yy}^{OBC} = \int_0^L \int_0^{L-y} \sigma(y, z) z^2 dz dy = \int_0^L \int_0^{L-y} \frac{m}{L^4} yz z^2 dz dy = \frac{1}{120} mL^2.$$

In modo analogo si determina il prodotto d'inerzia  $L_{yz}^{OBC}$ :

$$L_{yz}^{OBC} = - \int_0^L \int_0^{L-y} \sigma(y, z) yz dz dy = - \int_0^L \int_0^{L-y} \frac{m}{L^4} yz yz dz dy = -\frac{1}{180} mL^2$$

per cui la matrice d'inerzia della lamina si riduce a

$$[L]^{OBC} = mL^2 \begin{pmatrix} 1/60 & 0 & 0 \\ 0 & 1/120 & -1/180 \\ 0 & -1/180 & 1/120 \end{pmatrix}.$$

### Matrice d'inerzia del sistema rigido

La matrice d'inerzia del sistema si ricava sommando termine a termine le matrici d'inerzia calcolate:

$$\begin{aligned} [L] &= [L]^{OA} + [L]^{OBC} = mL^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7/12 & 0 \\ 0 & 0 & 7/12 \end{pmatrix} + mL^2 \begin{pmatrix} 1/60 & 0 & 0 \\ 0 & 1/120 & -1/180 \\ 0 & -1/180 & 1/120 \end{pmatrix} \\ &= mL^2 \begin{pmatrix} 1/60 & 0 & 0 \\ 0 & 71/120 & -1/180 \\ 0 & -1/180 & 71/120 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### (c) Energia cinetica relativa alla terna fissa, all'istante $t = 0$

Poiché l'origine  $O$  della terna solidale è un punto fisso rispetto alla terna fissa  $Ox'y'z'$ , l'energia cinetica del sistema relativa alla stessa terna è data dalla relazione

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot L_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) mL^2 \begin{pmatrix} 1/60 & 0 & 0 \\ 0 & 71/120 & -1/180 \\ 0 & -1/180 & 71/120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{mL^2}{2} \left[ \frac{1}{60} \omega_1^2 + \frac{71}{120} \omega_2^2 + \frac{71}{120} \omega_3^2 - \frac{1}{90} \omega_2 \omega_3 \right]. \end{aligned}$$

(d) **Modulo della velocità del baricentro  $G$  rispetto alla terna fissa**

Poiché l'origine  $O$  costituisce un punto fisso per il sistema rigido, rispetto alla terna assoluta, la velocità del baricentro  $G$  rispetto a tale terna può essere espressa in termini del teorema di Poisson:

$$\dot{G} = \vec{\omega} \wedge (G - O)$$

ossia, sostituendo le espressioni esplicite di  $G - O$  e  $\vec{\omega}$ :

$$\begin{aligned} \dot{G} &= (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3) \wedge \left[ \frac{20}{37} L \hat{e}_1 + \frac{2}{185} L \hat{e}_2 + \frac{2}{185} L \hat{e}_3 \right] = \\ &= L \left( \frac{2}{185} \omega_2 - \frac{2}{185} \omega_3 \right) \hat{e}_1 + L \left( \frac{20}{37} \omega_3 - \frac{2}{185} \omega_1 \right) \hat{e}_2 + L \left( \frac{2}{185} \omega_1 - \frac{20}{37} \omega_2 \right) \hat{e}_3 \end{aligned}$$

Il modulo della velocità assoluta di  $G$  diventa pertanto:

$$|\dot{G}| = L \sqrt{\left( \frac{2}{185} \omega_2 - \frac{2}{185} \omega_3 \right)^2 + \left( \frac{20}{37} \omega_3 - \frac{2}{185} \omega_1 \right)^2 + \left( \frac{2}{185} \omega_1 - \frac{20}{37} \omega_2 \right)^2}$$

(e) **Modulo del momento angolare  $\vec{K}_O$  rispetto alla terna fissa**

Il punto fisso  $O$  comporta che il momento angolare del sistema rigido rispetto alla terna fissa  $ox'y'z'$  possa determinarsi in termini dell'operatore d'inerzia in  $O$ , secondo l'espressione

$$\vec{K}_O = L_O[\vec{\omega}] .$$

Le componenti  $(K_1, K_2, K_3)$  di  $\vec{K}_O$  rispetto alla terna solidale si ottengono dalle componenti  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  della velocità angolare istantanea per mezzo della corrispondente relazione matriciale

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} &= [L] \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = mL^2 \begin{pmatrix} 1/60 & 0 & 0 \\ 0 & 71/120 & -1/180 \\ 0 & -1/180 & 71/120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \\ &= mL^2 \begin{pmatrix} \omega_1 \frac{1}{60} \\ \frac{7}{120} \omega_2 - \frac{1}{180} \omega_3 \\ -\frac{1}{180} \omega_2 + \frac{71}{120} \omega_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in modo che

$$\vec{K}_O = mL^2 \frac{1}{60} \omega_1 \hat{e}_1 + mL^2 \left( \frac{7}{120} \omega_2 - \frac{1}{180} \omega_3 \right) \hat{e}_2 + mL^2 \left( -\frac{1}{180} \omega_2 + \frac{71}{120} \omega_3 \right) \hat{e}_3$$

e quindi:

$$|\vec{K}_O| = mL^2 \sqrt{\frac{1}{3600} \omega_1^2 + \left( \frac{7}{120} \omega_2 - \frac{1}{180} \omega_3 \right)^2 + \left( -\frac{1}{180} \omega_2 + \frac{71}{120} \omega_3 \right)^2} .$$

(f) **Equazione parametrica dell'asse istantaneo di moto a  $t = 0$**

La velocità di un punto arbitrario  $P$  del sistema è data dalla formula di Poisson

$$\dot{P} = \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

e risulta quindi ortogonale ad  $\vec{\omega}$  salvo che essa non sia nulla. I punti dell'asse istantaneo di moto sono dunque tutti e soli quelli della retta passante per il punto fisso  $O$  la cui direzione è individuata dal vettore  $\vec{\omega}$  — asse istantaneo di rotazione. L'equazione parametrica di questa retta si scrive immediatamente come

$$P - O = (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3) \lambda = \omega_1 \lambda \hat{e}_1 + \omega_2 \lambda \hat{e}_2 + \omega_3 \lambda \hat{e}_3, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Soluzione dell'esercizio 2**

(a) **Equazioni pure del moto**

Nell'ipotesi che i vincoli siano ideali, le equazioni pure del moto possono identificarsi con quelle di Lagrange, che quindi vengono scritte determinando preliminarmente la lagrangiana del sistema.

*Energia cinetica del sistema*

L'energia cinetica del sistema può essere scritta come somma delle energie cinetiche delle due parti rigide — asta e disco — che lo compongono.

L'energia cinetica dell'asta si ottiene direttamente applicando la formula per l'energia cinetica di un corpo rigido con asse fisso  $Az$ , osservato che la velocità angolare istantanea è data dall'ovvia relazione  $\vec{\omega}_{OA} = \dot{\theta} \hat{e}_3$ :

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I_{Az} |\dot{\theta} \hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{6} \dot{\theta}^2.$$

Per quel che riguarda il disco, è vantaggioso fare uso del teorema di König:

$$T_{\text{disco}} = \frac{M}{2} \dot{G}^2 + \frac{1}{2} I_{Gz} |\vec{\omega}_{\text{disco}}|^2$$

con:

$$\begin{aligned} G - O &= x \hat{e}_1 & \dot{G} &= \dot{x} \hat{e}_1 \\ \vec{\omega}_{\text{disco}} &= -\frac{\dot{x}}{R} \hat{e}_3 & I_{Gz} &= \frac{MR^2}{2} \end{aligned}$$

e quindi:

$$T_{\text{disco}} = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{M}{4} \dot{x}^2 = \frac{3}{4} M \dot{x}^2.$$

Per l'energia cinetica del sistema si deduce pertanto l'espressione:

$$T = T_{OA} + T_{\text{disco}} = \frac{mL^2}{6} \dot{\theta}^2 + \frac{3}{4} M \dot{x}^2.$$

### *Potenziale del sistema*

Le sollecitazioni attive applicate al sistema sono date dal peso, dall'interazione elastica agente fra  $B$  e  $G$ , dalla forza costante  $F \hat{e}_1$  agente nel baricentro  $H$  dell'asta e dalla coppia applicata al disco, di momento  $\vec{M} = -\mu \hat{e}_3$ . Si verifica agevolmente che tutte queste sollecitazioni sono posizionali e conservative, sicché è dato definire un potenziale totale del sistema. A questo scopo conviene esaminare separatamente, una ad una, tutte le sollecitazioni, determinando direttamente il potenziale di quelle palesemente posizionali e conservative, e calcolando preliminarmente le componenti lagrangiane delle altre, salvo poi verificare l'esistenza del relativo potenziale.

### *Potenziale elastico*

All'interazione elastica fra i punti  $B$  e  $G$ , notoriamente posizionale e conservativa, si associa il potenziale

$$U_{\text{el}} = -\frac{k}{2}(G - B)^2 = -\frac{k}{2}[G - O - (B - O)]^2$$

in cui risulta:

$$G - O = x \hat{e}_1 + R \hat{e}_2$$

mentre:

$$B - O = B - A + A - O = L \sin \theta \hat{e}_1 - L \cos \theta \hat{e}_2 + h \hat{e}_2 = L \sin \theta \hat{e}_1 + (h - L \cos \theta) \hat{e}_2 .$$

Sostituendo, ne segue allora che:

$$\begin{aligned} U_{\text{el}} &= -\frac{k}{2} [(x - L \sin \theta) \hat{e}_1 + (R - h + L \cos \theta) \hat{e}_2]^2 = \\ &= -\frac{k}{2} [x^2 + L^2 \sin^2 \theta - 2Lx \sin \theta + (R - h)^2 + 2(R - h)L \cos \theta + L^2 \cos^2 \theta] = \\ &= -\frac{k}{2} [x^2 - 2Lx \sin \theta + 2(R - h)L \cos \theta + (R - h)^2 + L^2] . \end{aligned}$$

### *Potenziale gravitazionale*

Poiché l'ordinata del centro del disco omogeneo, che rappresenta per simmetria anche il baricentro del disco stesso, si mantiene costante al valore  $R$  durante il moto di puro rotolamento lungo la guida orizzontale  $Ox$ , il potenziale gravitazionale del disco è a propria volta costante e può dunque essere ignorato. Il solo termine di potenziale gravitazionale deve essere imputato all'asta, e si scrive:

$$U_{\text{g}} = U_{\text{g}}^{OA} = -mg(H - A) \cdot \hat{e}_2 = -mg \left[ -\frac{L}{2} \cos \theta \right] = \frac{mgL}{2} \cos \theta .$$

### *Forza costante*

Per la forza costante può essere interessante, anziché scrivere direttamente l'espressione del relativo potenziale, ricavare le componenti lagrangiane della sollecitazione e ricavare

quindi il potenziale associato. Dal momento che la forza risulta applicata in  $H$ , il lavoro virtuale infinitesimo della sollecitazione assume la forma:

$$\begin{aligned} Q_\theta^F d\theta + Q_x^F dx &= F \hat{e}_1 \cdot d(H - A) = F \hat{e}_1 \cdot d\left[\frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_2\right] = \\ &= F \hat{e}_1 \cdot \left[\frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_2\right] d\theta = \frac{FL}{2} \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

in modo che le componenti lagrangiane della sollecitazione si deducono per confronto:

$$Q_\theta^F = \frac{FL}{2} \cos \theta \quad Q_x^F = 0$$

e ad esse è immediatamente associabile il potenziale:

$$U_F = \frac{FL}{2} \sin \theta .$$

### *Coppia*

È facile convincersi che  $\alpha = -x/R$  costituisce l'angolo di rotazione del disco relativamente alla terna assoluta, angolo peraltro orientato conformemente alla regola della mano destra rispetto all'asse  $Gz$ . La coppia applicata al disco rappresenta un sistema di forze con risultante nullo e momento risultante indipendente dalla scelta del polo:

$$\vec{R}^{\text{coppia}} = 0 \quad \vec{M}^{\text{coppia}} = -\mu \hat{e}_3 .$$

Trattandosi di moto rigido piano in  $Oxy$ , le componenti lagrangiane di questo sistema di sollecitazioni possono essere ricavate applicando le relazioni generali:

$$\begin{aligned} Q_\theta^{\text{coppia}} &= \frac{\partial G}{\partial \theta} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{x}{R}\right) \hat{e}_3 \cdot (-\mu \hat{e}_3) = 0 \\ Q_x^{\text{coppia}} &= \frac{\partial G}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{R}\right) \hat{e}_3 \cdot (-\mu \hat{e}_3) = \frac{\mu}{R} \end{aligned}$$

e ad esse viene associato l'ovvio potenziale:

$$U^{\text{coppia}} = \frac{\mu}{R} x .$$

### *Potenziale totale*

Il potenziale totale del sistema è definito dalla somma dei potenziali parziali delle singole sollecitazioni attive, tutte posizionali e conservative, e risulta:

$$\begin{aligned} U(\theta, x) &= U_{\text{el}} + U_{\text{g}} + U_F + U_{\text{coppia}} = \\ &= -\frac{k}{2} x^2 + kLx \sin \theta - kL(R - h) \cos \theta + \frac{mgL}{2} \cos \theta + \frac{FL}{2} \sin \theta + \frac{\mu}{R} x = \\ &= -\frac{k}{2} x^2 + \frac{\mu}{R} x + kLx \sin \theta + \frac{FL}{2} \sin \theta + \left[\frac{mgL}{2} + kL(h - R)\right] \cos \theta \end{aligned}$$

in cui sono state ignorate tutte le costanti additive inessenziali.

*Lagrangiana ed equazioni di Lagrange*

La lagrangiana del sistema è data, per definizione, dalla somma dell'energia cinetica  $T$  e del potenziale totale  $U$ :

$$\mathcal{L} = T+U = \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}M\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 + \frac{\mu}{R}x + kLx \sin\theta + \frac{FL}{2} \sin\theta + \left[ \frac{mgL}{2} + kL(h-R) \right] \cos\theta .$$

Dalle espressioni parziali che compaiono nei binomi di Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= kLx \cos\theta + \frac{FL}{2} \cos\theta - \left[ \frac{mgL}{2} + kL(h-R) \right] \sin\theta \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{3}{2}M\ddot{x} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= -kx + \frac{\mu}{R} + kL \sin\theta \end{aligned}$$

si deducono allora le equazioni lagrangiane del moto cercate:

$$\begin{cases} \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} - kLx \cos\theta - \frac{FL}{2} \cos\theta + \left[ \frac{mgL}{2} + kL(h-R) \right] \sin\theta = 0 \\ \frac{3}{2}M\ddot{x} + kx - \frac{\mu}{R} - kL \sin\theta = 0 . \end{cases} \quad (1)$$

**Osservazione. Equazione cardinale del momento angolare per il disco in  $C$**

Dal momento che il baricentro  $G$  si sposta parallelamente al punto  $C$  di contatto con la guida orizzontale  $Ox$ , l'equazione cardinale del momento angolare del disco, rispetto al polo  $C$ , assume la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_C}{dt} &= (C - C) \wedge \vec{\Phi}_C + (G - C) \wedge (-Mg \hat{e}_2) + (G - C) \wedge [-k(G - B)] - \mu \hat{e}_3 = \\ &= R \hat{e}_2 \wedge [-k(x - L \sin\theta) \hat{e}_1 - k(R - h + L \cos\theta) \hat{e}_2] - \mu \hat{e}_3 = \\ &= -Rk(-x + L \sin\theta) \hat{e}_3 - \mu \hat{e}_3 . \end{aligned}$$

Ma in virtù dell'ipotesi di puro rotolamento del disco su  $Ox$ , il punto  $C$  rappresenta il centro di rotazione istantanea del disco stesso; inoltre, il vettore momento angolare in  $C$  dipende soltanto dall'atto di moto all'istante considerato e si identifica quindi con quello di moto rotatorio con asse fisso di rotazione  $Cz$ , moto che a  $t = 0$  condivide con il moto reale il relativo atto di moto — in certo qual modo si può affermare che i due moti risultano “tangenti” l'uno rispetto all'altro all'istante  $t = 0$ . Si ha pertanto:

$$\vec{K}_C = I_{Cz} \left( -\frac{\dot{x}}{R} \hat{e}_3 \right) = \frac{3}{2}MR^2 \left( -\frac{\dot{x}}{R} \right) \hat{e}_3 = -\frac{3}{2}MR\dot{x} \hat{e}_3$$

da cui si deduce:

$$-\frac{3}{2}MR\ddot{x} \hat{e}_3 = -Rk(-x + L \sin\theta) \hat{e}_3 - \mu \hat{e}_3$$

ed infine:

$$\frac{3}{2}MR\ddot{x} = Rk(-x + L \sin \theta) + \mu$$

che equivale alla seconda delle equazioni di Lagrange (1).

**Osservazione. Equazione cardinale del momento angolare per l'asta in A**

L'equazione cardinale del momento angolare per l'asta  $OA$ , rispetto al polo fisso  $A$ , si ottiene in maniera analoga:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_A}{dt} &= (H - A) \wedge (F \hat{e}_1 - mg \hat{e}_2) + \\ &+ (B - A) \wedge [k(x - L \sin \theta) \hat{e}_1 + k(R - h + L \cos \theta) \hat{e}_2] + (A - A) \wedge \vec{\Phi}_A = \\ &= (B - A) \wedge \left[ \frac{F}{2} \hat{e}_1 - \frac{mg}{2} \hat{e}_2 + k(x - L \sin \theta) \hat{e}_1 + k(R - h + L \cos \theta) \hat{e}_2 \right] = \\ &= L(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) \wedge \\ &\quad \wedge \left[ \left( \frac{F}{2} + k(x - L \sin \theta) \right) \hat{e}_1 + \left( -\frac{mg}{2} + k(R - h + L \cos \theta) \right) \hat{e}_2 \right] = \\ &= L \left[ -\frac{mg}{2} \sin \theta + k(R - h + L \cos \theta) \sin \theta + \frac{F}{2} \cos \theta + k(x - L \sin \theta) \cos \theta \right] \hat{e}_3 = \\ &= L \left[ kx \cos \theta + \frac{F}{2} \cos \theta - \frac{mg}{2} \sin \theta - k(h - R) \sin \theta \right] \hat{e}_3 \\ &= \left[ kLx \cos \theta + \frac{FL}{2} \cos \theta - \left( \frac{mgL}{2} + kL(h - R) \right) \sin \theta \right] \hat{e}_3 \end{aligned}$$

e poiché:

$$\vec{K}_A = I_{Az} \dot{\theta} \hat{e}_3 = \frac{mL^2}{3} \dot{\theta} \hat{e}_3$$

si conclude che:

$$\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} \hat{e}_3 = \left[ kLx \cos \theta + \frac{FL}{2} \cos \theta - \left( \frac{mgL}{2} + kL(h - R) \right) \sin \theta \right] \hat{e}_3$$

ossia:

$$\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} = kLx \cos \theta + \frac{FL}{2} \cos \theta - \left[ \frac{mgL}{2} + kL(h - R) \right] \sin \theta$$

equivalente alla prima delle (1).

**(b) Valore di F**

Le componenti lagrangiane delle sollecitazioni attive complessivamente applicate al sistema si ottengono calcolando il gradiente del potenziale totale:

$$\begin{cases} Q_\theta(\theta, x) = U_\theta = kLx \cos \theta + \frac{FL}{2} \cos \theta - \left[ \frac{mgL}{2} + kL(h - R) \right] \sin \theta \\ Q_x(\theta, x) = U_x = -kx + \frac{\mu}{R} + kL \sin \theta . \end{cases}$$

In virtù del teorema dei lavori virtuali, la configurazione di confine

$$(\theta, x) = (0, x_0)$$

è di equilibrio se e soltanto se:

$$U_\theta(0, x_0) \delta\theta + U_x(0, x_0) \delta x \leq 0 \quad \forall \delta x \in \mathbb{R}, \quad \forall \delta\theta \geq 0$$

ossia:

$$\begin{cases} U_x(0, x_0) = 0 \\ U_\theta(0, x_0) \leq 0. \end{cases}$$

Queste condizioni possono scriversi esplicitamente nella forma:

$$\begin{cases} \left[ -kx + \frac{\mu}{R} + kL \sin \theta \right] \Big|_{\theta=0, x=x_0} = 0 \\ \left[ kx \cos \theta + \frac{F}{2} \cos \theta - \left[ \frac{mg}{2} + k(h-R) \right] \sin \theta \right] \Big|_{\theta=0, x=x_0} \leq 0 \end{cases}$$

e dunque:

$$\begin{cases} -kx_0 + \frac{\mu}{R} = 0 \\ kx_0 + \frac{F}{2} \leq 0 \end{cases}$$

da cui si conclude:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\mu}{kR} \\ F \leq -\frac{2\mu}{R}. \end{cases}$$

Il massimo valore di  $F$  per cui la configurazione  $(\theta, x) = (0, \mu/kR)$  risulta di equilibrio è perciò:

$$F = F_{\max} = -\frac{2\mu}{R}.$$

(c) **Equilibri per  $F = -2\mu/R$**

A causa della condizione  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  assunta per ipotesi sull'angolo di rotazione dell'asta, ci si aspetta che il sistema possa presentare sia configurazioni di equilibrio ordinarie che di confine, che conviene quindi esaminare separatamente.

*Equilibri ordinari*

Gli equilibri ordinari del sistema, puramente posizionale e conservativo, sono tutti e soli i punti critici del potenziale totale compresi entro la striscia aperta:

$$\{(\theta, x) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in (0, \pi/2)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Eguagliando a zero le componenti del gradiente di  $U$  si perviene al sistema di equazioni trigonometriche:

$$\begin{cases} kLx \cos \theta - \frac{L\mu}{R} \cos \theta - \left[ \frac{mgL}{2} + kL(h-R) \right] \sin \theta = 0 \\ -kx + \frac{\mu}{R} + kL \sin \theta = 0 \end{cases}$$

in cui basta ricavare  $x$  dalla seconda equazione e sostituire l'espressione così dedotta nella prima per ottenere

$$\begin{cases} x = \frac{\mu}{kR} + L \sin \theta \\ kL^2 \sin \theta \cos \theta - \left[ \frac{mgL}{2} + kL(h - R) \right] \sin \theta = 0 \end{cases}$$

e quindi l'equazione trigonometrica nella sola variabile angolare  $\theta$ :

$$\sin \theta \left[ kL \cos \theta - \frac{mg}{2} - k(h - R) \right] = 0 .$$

Quest'ultima equazione può essere risolta eguagliando a zero i singoli fattori che vi compaiono a primo membro.

(i) Una possibilità è che si abbia:

$$\sin \theta = 0$$

da cui si deducono le soluzioni:

$$\theta = 0 , \quad \pi ,$$

la prima corrispondente ad una configurazione di confine e la seconda non accettabile, in quanto non compresa nell'intervallo di definizione della variabile angolare  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ;

(ii) la seconda possibilità è che risulti:

$$\cos \theta = \frac{1}{kL} \left[ \frac{mg}{2} + k(h - R) \right] = \frac{mg}{2kL} + \frac{h - R}{L} > 0$$

e quindi:

$$\theta = \arccos \left( \frac{mg}{2kL} + \frac{h - R}{L} \right) = \theta^* \in (0, \pi/2)$$

sempreché valga  $\frac{mg}{2kL} + \frac{h - R}{L} < 1$ . La soluzione residua:

$$\theta = -\theta^*$$

non è accettabile perché non appartenente all'intervallo  $[0, \pi/2]$ .

In definitiva, gli equilibri ordinari del sistema si riducono all'unica configurazione:

$$(\theta, x) = \left( \theta^*, \frac{\mu}{kR} + L \sin \theta^* \right) = (\theta^*, x^*) .$$

*Equilibri di confine*

Si è già stabilito che nell'ipotesi di  $F = -2\mu/R$  si ha un equilibrio di confine in:

$$(\theta, x) = (0, \mu/kR) ,$$

il solo con  $\theta = 0$ . Per  $\theta = \pi/2$  la configurazione  $(\theta, x) = (\pi/2, x_0)$ , con  $x_0 \in \mathbb{R}$  opportuno, risulta di equilibrio se e solo se:

$$U_\theta(\pi/2, x_0) \delta\theta + U_x(\pi/2, x_0) \delta x \leq 0 \quad \forall \delta\theta \leq 0, \quad \forall \delta x \in \mathbb{R}$$

in forza del teorema dei lavori virtuali. Questa condizione equivale al sistema:

$$\begin{cases} U_x(\pi/2, x_0) = 0 \\ U_\theta(\pi/2, x_0) \geq 0 \end{cases}$$

e scritta in forma esplicita diventa:

$$\begin{cases} -kx_0 + \frac{\mu}{R} + kL = 0 \\ -\left[\frac{mgL}{2} + kL(h - R)\right] \geq 0 \end{cases}$$

in cui ovviamente la seconda disequazione che non può essere verificata. L'unica configurazione di equilibrio di confine è quindi  $(\theta, x) = (0, \mu/kR)$ .

**(d) Stabilità degli equilibri ordinari**

L'analisi di stabilità degli equilibri ordinari richiede preliminarmente il calcolo dell'hessiana del potenziale totale, ovvero delle derivate parziali seconde:

$$U_{\theta\theta} = -kLx \sin \theta - \frac{FL}{2} \sin \theta - \left[\frac{mgL}{2} + kL(h - R)\right] \cos \theta$$

$$U_{\theta x} = U_{x\theta} = kL \cos \theta \quad U_{xx} = -k$$

con  $F = -2\mu/R$ . Nell'unico equilibrio ordinario  $(\theta, x) = (\theta^*, x^*) = \left(\theta^*, \frac{\mu}{kR} + L \sin \theta^*\right)$  si ha:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta} &= -kL \left(\frac{\mu}{kR} + L \sin \theta^*\right) \sin \theta^* + \frac{\mu L}{R} \sin \theta^* - \left[\frac{mgL}{2} + kL(h - R)\right] \cos \theta^* = \\ &= -kL^2 \sin^2 \theta^* - \left[\frac{mgL}{2} + kL(h - R)\right] \cos \theta^* = \\ &= -kL^2 \left[\sin^2 \theta^* + \left(\frac{mg}{2kL} + \frac{h - R}{L}\right) \cos \theta^*\right] = -kL^2 (\sin^2 \theta^* + \cos^2 \theta^*) = -kL^2 \end{aligned}$$

$$U_{\theta x} = U_{x\theta} = kL \cos \theta^*$$

$$U_{xx} = -k$$

in modo che l'hessiana del potenziale diventa:

$$H_U(\theta^*, x^*) = \begin{pmatrix} -kL^2 & kL \cos \theta^* \\ kL \cos \theta^* & -k \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice è strettamente positivo:

$$\det H_U(\theta^*, x^*) = k^2 L^2 - k^2 L^2 \cos^2 \theta^* = k^2 L^2 \sin^2 \theta^* > 0$$

in quanto  $\theta^* \in (0, \pi/2)$ , mentre per la traccia vale:

$$\text{tr}H_U(\theta^*, x^*) = -kL^2 - k < 0 .$$

L'hessiana del potenziale presenta in  $(\theta^*, x^*)$  due autovalori strettamente positivi, per cui il corrispondente equilibrio costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

**(e) Reazioni vincolari in A e C in tutte le configurazioni di equilibrio**

Le reazioni vincolari agenti sull'asta e sul disco, rispettivamente nei punti  $A$  e  $C$ , si deducono dalle equazioni cardinali della statica, e più precisamente da quelle dell'impulso. L'equazione cardinale della quantità di moto per l'asta, nel caso statico si scrive

$$0 = F \hat{e}_1 - mg \hat{e}_2 + k(G - B) + \vec{\Phi}_A$$

mentre per il disco assume la forma:

$$0 = -Mg \hat{e}_2 - k(G - B) + \vec{\Phi}_C .$$

Dalla prima equazione si ricava:

$$\vec{\Phi}_A = -F \hat{e}_1 + mg \hat{e}_2 - k(G - B)$$

e analogamente dalla seconda:

$$\vec{\Phi}_C = Mg \hat{e}_2 + k(G - B) .$$

Basta poi sostituire le espressioni esplicite di  $F$  e di  $G - B$  per ottenere:

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_A &= \frac{2\mu}{R} \hat{e}_1 + mg \hat{e}_2 - k(x - L \sin \theta) \hat{e}_1 - k(R - h + L \cos \theta) \hat{e}_2 = \\ &= \left( \frac{2\mu}{R} - kx + kL \sin \theta \right) \hat{e}_1 + \left[ mg - k(R - h + L \cos \theta) \right] \hat{e}_2 \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_C &= Mg \hat{e}_2 + k(x - L \sin \theta) \hat{e}_1 + k(R - h + L \cos \theta) \hat{e}_2 = \\ &= k(x - L \sin \theta) \hat{e}_1 + \left[ Mg + k(R - h + L \cos \theta) \right] \hat{e}_2 . \end{aligned}$$

Nella configurazione di equilibrio ordinaria  $(\theta, x) = (\theta^*, x^*)$  si ha allora

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_A &= \left( \frac{2\mu}{R} - \frac{\mu}{R} - kL \sin \theta^* + kL \sin \theta^* \right) \hat{e}_1 + \left[ mg + k(h - R - L \cos \theta^*) \right] \hat{e}_2 = \\ &= \frac{\mu}{R} \hat{e}_1 + \left[ mg + k(h - R) - kL \cos \theta^* \right] \hat{e}_2 = \\ &= \frac{\mu}{R} \hat{e}_1 + \left[ mg + k(h - R) - \frac{mg}{2} - k(h - R) \right] \hat{e}_2 = \frac{\mu}{R} \hat{e}_1 + \frac{mg}{2} \hat{e}_2 \end{aligned}$$

e l'analogha espressione per  $\vec{\Phi}_C$ :

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_C &= k\left(\frac{\mu}{kR} + L \sin \theta^* - L \sin \theta^*\right)\hat{e}_1 + \left[Mg + k(R - h) + kL \cos \theta^*\right]\hat{e}_2 = \\ &= \frac{\mu}{R}\hat{e}_1 + \left[Mg + k(R - h) + \frac{mg}{2} + k(h - R)\right]\hat{e}_2 = \frac{\mu}{R}\hat{e}_1 + \left(M + \frac{m}{2}\right)g\hat{e}_2 .\end{aligned}$$

Per la configurazione di equilibrio di confine  $(\theta, x) = (0, \mu/kR)$  risulta invece:

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_A &= \left(\frac{2\mu}{R} - \frac{\mu}{R} + 0\right)\hat{e}_1 + \left[mg + k(h - R - L)\right]\hat{e}_2 = \frac{\mu}{R}\hat{e}_1 + [mg + k(h - R - L)]\hat{e}_2 \\ \vec{\Phi}_C &= k\left(\frac{\mu}{kR} - 0\right)\hat{e}_1 + \left[Mg - k(h - R - L)\right]\hat{e}_2 = \frac{\mu}{R}\hat{e}_1 + [Mg - k(h - R - L)]\hat{e}_2\end{aligned}$$

che completa il risultato.