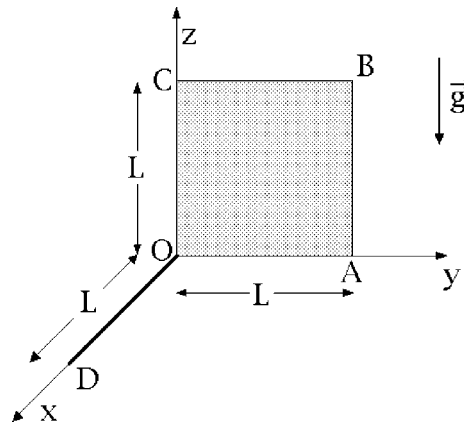


**Esercizio 1**

Un sistema rigido si compone di una lamina quadrata  $OABC$  di lato  $L$  e di un'asta rettilinea  $OD$ , di lunghezza  $L$ , saldate ortogonalmente l'una all'altra nell'origine  $O$  di una terna di riferimento solidale  $Oxyz$ , come illustrato in figura. La densità di linea  $\lambda(x)$  dell'asta e quella superficiale  $\sigma(y, z)$  della lamina sono date da:

$$\lambda(x) = \frac{\mu}{L^2}(x + L) \quad \forall x \in [0, L] \quad \sigma(y, z) = \frac{\mu}{L^3}z \quad \forall (y, z) \in [0, L]^2$$

in cui  $\mu > 0$  è una costante.

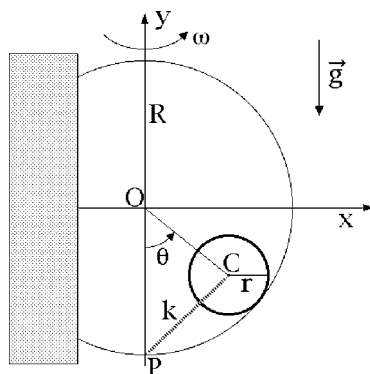


Determinare:

- la posizione del baricentro del sistema rispetto alla terna solidale  $Oxyz$ ;
- la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$ ;
- il momento d'inerzia rispetto all'asse di equazione  $(x, y, z) = (s, s, 0)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ;
- l'energia cinetica nell'ipotesi che  $O$  sia un punto fisso e  $\vec{\omega} = (2\omega, \omega, 0)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , rispetto ad una terna non disegnata in figura.

## Esercizio 2

Nel piano verticale  $Oxy$  di una terna cartesiana si consideri il sistema pesante costituito da un disco circolare rigido omogeneo, di raggio  $r$ , centro  $C$  e massa  $m$ , vincolato a rotolare senza strisciare lungo il bordo interno di una circonferenza fissa di centro  $O$  e raggio  $R > r$ . La circonferenza è interrotta da una parete rigida impenetrabile in modo che l'angolo al centro  $\theta$  assuma soltanto i valori compresi nell'intervallo  $[-\pi/6, 7\pi/6]$  (vedi figura). Una molla ideale di costante elastica  $k > 0$  collega il centro  $C$  al punto più basso  $P$  della circonferenza. L'intero riferimento  $Oxyz$  ruota con velocità angolare costante  $\omega$  attorno all'asse verticale  $Oy$ , rispetto ad una terna inerziale non rappresentata in figura.



Assumendo i vincoli ideali e l'angolo  $\theta$  come parametro lagrangiano, determinare:

- l'energia cinetica del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$ ;
- gli equilibri del sistema, ordinari e di confine, relativi alla stessa terna;
- le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- le equazioni del moto del sistema.

## Soluzione dell'esercizio 1

### (a) Baricentro del sistema

Conviene calcolare il baricentro del sistema determinando masse e baricentri delle singole parti regolari componenti — quadrato  $OABC$  e asta rettilinea  $OD$  — per poi applicare il teorema distributivo.

La massa dell'asta  $OD$  si ricava per integrazione della densità di linea  $\lambda(x)$  lungo l'intervallo  $x \in [0, L]$ :

$$m_1 = \int_{[0, L]} \lambda(x) dx = \int_0^L \frac{\mu}{L^2}(L+x) dx = \frac{3}{2}\mu$$

mentre la massa della lamina quadrata viene calcolata integrando la densità superficiale della stessa sul dominio  $(y, z) \in [0, L]^2$ :

$$m_2 = \int_{[0, L]^2} \sigma(y, z) dydz = \int_0^L dy \int_0^L dz \frac{\mu}{L^3} z = \frac{\mu}{2}.$$

Per evidenti ragioni di simmetria il baricentro  $G_1$  dell'asta deve essere ubicato lungo l'asse  $Ox$  e viene quindi individuato calcolandone la sola ascissa:

$$G_1 - O = \frac{1}{m_1} \int_{[0, L]} x \lambda(x) dx \hat{e}_1 = \frac{2}{3\mu} \int_0^L \frac{\mu}{L^2}(Lx + x^2) dx \hat{e}_1 = \frac{5}{9}L \hat{e}_1.$$

In modo analogo, il baricentro  $G_2$  della lamina quadrata deve localizzarsi nel piano coordinato  $Oyz$ , per cui è sufficiente determinarne ordinata e quota:

$$\begin{aligned} G_2 - O &= \frac{1}{m_2} \int_{[0, L]^2} \sigma(y, z) y dydz \hat{e}_2 + \frac{1}{m_2} \int_{[0, L]^2} \sigma(y, z) z dydz \hat{e}_3 = \\ &= \frac{2}{\mu} \int_0^L dy \int_0^L dz \frac{\mu}{L^3} yz \hat{e}_2 + \frac{2}{\mu} \int_0^L dy \int_0^L dz \frac{\mu}{L^3} z^2 \hat{e}_3 = \frac{L}{2} \hat{e}_2 + \frac{2}{3}L \hat{e}_3. \end{aligned}$$

La massa del sistema è la somma delle masse di asta e lamina:

$$m = m_1 + m_2 = \frac{3}{2}\mu + \frac{\mu}{2} = 2\mu$$

e il teorema distributivo porge per il baricentro  $G$  del sistema l'espressione:

$$G - O = \frac{m_1(G_1 - O) + m_2(G_2 - O)}{m_1 + m_2} = \frac{5}{12}L \hat{e}_1 + \frac{L}{8} \hat{e}_2 + \frac{L}{6} \hat{e}_3.$$

### (b) Matrice d'inerzia

È opportuno determinare la matrice d'inerzia del sistema come somma delle matrici d'inerzia, relative alla stessa terna  $Oxyz$ , delle singole parti costituenti. Ciò per il fatto che il calcolo della matrice d'inerzia  $[L^1]$  dell'asta richiede la soluzione di integrali curvilinei,

mentre per quella della lamina —  $[L^2]$  — si rende necessario valutare alcuni integrali in due dimensioni.

I prodotti d'inerzia della matrice  $[L^1]$  sono tutti banalmente nulli per simmetria:

$$L_{xy}^1 = - \int_{[0,L]} x \cdot 0 \cdot \lambda(x) \, dx = 0$$

$$L_{yz}^1 = - \int_{[0,L]} 0 \cdot 0 \cdot \lambda(x) \, dx = 0$$

$$L_{zx}^1 = - \int_{[0,L]} 0 \cdot x \cdot \lambda(x) \, dx = 0$$

come pure nullo è il momento d'inerzia rispetto all'asse coordinato  $Ox$ :

$$L_{xx}^1 = \int_{[0,L]} 0 \cdot \lambda(x) \, dx = 0$$

mentre il comune valore dei momenti  $L_{yy}^1$  e  $L_{zz}^1$  è dato da:

$$L_{yy}^1 = L_{zz}^1 = \int_{[0,L]} x^2 \lambda(x) \, dx = \int_0^L \frac{\mu}{L} (Lx^2 + x^3) \, dx = \frac{7}{12} \mu L^2 .$$

Pertanto:

$$[L^1] = \mu L^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7/12 & 0 \\ 0 & 0 & 7/12 \end{pmatrix} .$$

In modo analogo si calcolano momenti e prodotti d'inerzia della lamina quadrata:

$$L_{yy}^2 = \int_{[0,L]^2} dy dz \, z^2 \sigma(y, z) = \int_0^L dy \int_0^L dz \, \frac{\mu}{L^3} z^3 = \frac{1}{4} \mu L^2$$

$$L_{zz}^2 = \int_{[0,L]^2} dy dz \, y^2 \sigma(y, z) = \int_0^L dy \, y^2 \int_0^L dz \, \frac{\mu}{L^3} z = \frac{1}{6} \mu L^2$$

$$L_{xx}^2 = L_{yy}^2 + L_{zz}^2 = \frac{1}{4} \mu L^2 + \frac{1}{6} \mu L^2 = \frac{5}{12} \mu L^2$$

$$L_{xy}^2 = L_{xz}^2 = 0$$

$$L_{yz}^2 = - \int_{[0,L]^2} dy dz \, yz \sigma(y, z) = - \int_0^L dy \int_0^L dz \, \frac{\mu}{L^3} yz^2 = -\frac{1}{6} \mu L^2$$

per cui risulta:

$$[L^2] = \mu L^2 \begin{pmatrix} 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix} .$$

Basta infine sommare le matrici  $[L^1]$  ed  $[L^2]$  ottenute per pervenire al risultato richiesto:

$$\begin{aligned}
 [L] &= \mu L^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7/12 & 0 \\ 0 & 0 & 7/12 \end{pmatrix} + \mu L^2 \begin{pmatrix} 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = \\
 &= \mu L^2 \begin{pmatrix} 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 3/4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**(c) Momento d'inerzia**

Il momento d'inerzia rispetto alla retta  $r$  di equazione parametrica:

$$(x, y, z) = (s, s, 0) \quad s \in \mathbb{R}$$

si calcola agevolmente osservando che un versore associato alla retta è dato da:

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2.$$

È sufficiente sostituire tale vettore nell'espressione:

$$I_r = \hat{n} \cdot L_O(\hat{n}) = (n_x \ n_y \ n_z)[L] \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

per ottenere il momento d'inerzia richiesto:

$$\begin{aligned}
 I_r &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \right) \mu L^2 \begin{pmatrix} 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{\mu L^2}{2} (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{8} \mu L^2.
 \end{aligned}$$

**(d) Energia cinetica**

Se il punto  $O$  è fisso per il sistema e il vettore velocità angolare istantanea vale:

$$\vec{\omega} = 2\omega \hat{e}_1 + \omega \hat{e}_2,$$

l'energia cinetica del corpo rigido si scrive:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot L_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} (2\omega \ \omega \ 0) [L] \begin{pmatrix} 2\omega \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

e risulta pertanto:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(2\omega \ \omega \ 0)\mu L^2 \begin{pmatrix} 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\omega \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\mu L^2 \omega^2 (2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{4}\mu L^2 \omega^2. \end{aligned}$$

## Soluzione dell'esercizio 2

### (a) Energia cinetica relativa alla terna $Oxyz$

Il vettore posizione del baricentro  $C$  del disco si esprime nella terna  $Oxyz$  per mezzo della relazione:

$$C - O = (R - r)(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2)$$

per cui derivando rispetto al tempo si ottiene l'espressione della relativa velocità istantanea:

$$\dot{C} = (R - r)(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \dot{\theta}.$$

Considerato che il disco rotola senza strisciare sulla guida circolare, il suo vettore velocità angolare istantanea si calcola agevolmente come:

$$\vec{\omega} = -\left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\theta} \hat{e}_3$$

e quindi il teorema di König porge per l'energia cinetica del sistema:

$$T = \frac{m}{2}\dot{C}^2 + \frac{1}{2}I_{Cz}|\vec{\omega}|^2 = \frac{m}{2}(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{R - r}{r}\right)^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}^2$$

che è il risultato richiesto.

### (b) Equilibri del sistema

Tutte le sollecitazioni attive applicate al sistema — peso, forze centrifughe e interazione elastica — hanno natura posizionale e conservativa, salvo le forze di Coriolis, la cui componente lagrangiana è tuttavia identicamente nulla e quindi priva di effetto sul moto:

$$Q_{\theta}^{\text{Cor}} = \sum_{P \in \text{disco}} -2m\omega \hat{e}_2 \wedge \dot{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} = \sum_{P \in \text{disco}} 0 = 0$$

in quanto i vettori  $\hat{e}_2$ ,  $\dot{P}$  e  $\partial P/\partial \theta$  risultano paralleli al piano  $Oxy$  e dunque linearmente dipendenti — il prodotto misto entro la sommatoria si annulla identicamente.

Poiché il baricentro del disco omogeneo coincide con il suo centro geometrico  $C$ , il potenziale delle forze peso si ottiene dalla relazione generale

$$U_g = -mg \hat{e}_2 \cdot (C - O) = -mg \hat{e}_2 \cdot (R - r)(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) = mg(R - r) \cos \theta$$

mentre per il potenziale centrifugo conviene fare uso del teorema di Huygens-Steiner:

$$U_{\text{cf}} = \frac{\omega^2}{2} I_{Oy} = \frac{\omega^2}{2} [I_{Cy} + m(R-r)^2 \sin^2 \theta] = \frac{m\omega^2}{2} (R-r)^2 \sin^2 \theta + \text{costante}$$

poiché il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse baricentrale  $Cy$  è certo indipendente dall'angolo di rotazione  $\theta$ . Per quel che riguarda il potenziale delle interazioni elastiche fra  $C$  e  $P$ , si hanno le relazioni geometriche:

$$P - O = -R \hat{e}_2 \quad C - O = (R-r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R-r) \cos \theta \hat{e}_2$$

$$C - P = (R-r) \sin \theta \hat{e}_1 + [R - (R-r) \cos \theta] \hat{e}_2$$

per cui:

$$|C - P|^2 = R^2 + (R-r)^2 - 2R(R-r) \cos \theta$$

ed il potenziale elastico diventa

$$U_{\text{el}} = -\frac{k}{2} |C - P|^2 = kR(R-r) \cos \theta + \text{costante}.$$

Basta ora sommare i potenziali gravitazionale, centrifugo ed elastico per pervenire al potenziale totale del sistema:

$$\begin{aligned} U(\theta) &= mg(R-r) \cos \theta + \frac{m\omega^2}{2} (R-r)^2 \sin^2 \theta + kR(R-r) \cos \theta = \\ &= (mg + kR)(R-r) \cos \theta + \frac{m\omega^2}{2} (R-r)^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

essendosi omesse le inessenziali costanti additive. Il sistema è posizionale conservativo e gli equilibri ordinari si identificano con i punti critici del potenziale  $U$ , soluzioni dell'equazione:

$$U'(\theta) = -(mg + kR)(R-r) \sin \theta + m\omega^2 (R-r)^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

ossia dell'equazione trigonometrica equivalente:

$$\sin \theta \left[ -\frac{mg + kR}{m\omega^2 (R-r)} + \cos \theta \right] = 0$$

sempreché sia  $-\pi/6 < \theta < 7\pi/6$ . Da questa si deduce che:

(i) o vale  $\sin \theta = 0$ , per cui si hanno le soluzioni

$$\theta = 0, \quad \pi,$$

sempre appartenenti all'intervallo  $(-\pi/6, 7\pi/6)$  di definizione della parametrizzazione;

(ii) oppure deve risultare:

$$\cos \theta - \frac{mg + kR}{m\omega^2 (R-r)} = 0,$$

con gli ulteriori punti critici

$$\theta = +\theta^* , \quad -\theta^* ,$$

dove si è posto:

$$\theta^* = \arccos \left[ \frac{mg + kR}{m\omega^2(R - r)} \right] = \arccos \lambda$$

e si è richiesto che  $\lambda := (mg + kR)/m\omega^2(R - r) < 1$ , onde ottenere soluzioni definite e distinte dalle precedenti. Si osservi che il punto critico  $\theta = \theta^* \in (0, \pi/2)$  è sempre ricompreso nell'intervallo di parametrizzazione  $(-\pi/6, 7\pi/6)$  e deve quindi identificarsi con un equilibrio ordinario. Viceversa, la configurazione  $\theta = -\theta^* \in (-\pi/2, 0)$  individua un equilibrio ordinario se e soltanto se  $\cos(-\theta^*) > \cos(\pi/6)$ , ossia:

$$1 > \lambda > \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Le configurazioni di confine del sistema si ottengono per  $\theta = -\pi/6$  e  $\theta = 7\pi/6$ . Queste possono essere caratterizzate come equilibri di confine del sistema per mezzo del teorema dei lavori virtuali, nell'ipotesi di vincoli ideali.

*Configurazione  $\theta = -\pi/6$*

Il teorema dei lavori virtuali afferma che la configurazione è di equilibrio se e soltanto se vale

$$U'(-\pi/6) \delta\theta \leq 0 \quad \forall \delta\theta \geq 0$$

ossia

$$U'(-\pi/6) \leq 0 .$$

In effetti un calcolo esplicito porge:

$$\begin{aligned} U' \left( -\frac{\pi}{6} \right) &= \left[ -(mg + kR) + m\omega^2(R - r) \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right] (R - r) \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \left[ -(mg + kR) + m\omega^2(R - r) \frac{\sqrt{3}}{2} \right] (R - r) \left( -\frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ mg + kR - \frac{\sqrt{3}}{2} m\omega^2(R - r) \right] (R - r) \end{aligned}$$

per cui  $U'(-\pi/6) \leq 0$  se e soltanto se:

$$mg + kR - \frac{\sqrt{3}}{2} m\omega^2(R - r) \leq 0$$

ossia:

$$mg + kR \leq \frac{\sqrt{3}}{2} m\omega^2(R - r) \quad \iff \quad \lambda \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e quindi:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{mg + kR}{m(R - r)} \leq \omega^2$$

che è la condizione necessaria e sufficiente affinché  $\theta = -\pi/6$  costituisca un equilibrio di confine del sistema. Si osservi come il risultato ottenuto appaia qualitativamente in accordo con il comune senso fisico che vuole la forza centrifuga unica responsabile dell'eventuale equilibrio in  $\theta = -\pi/6$  — in tale configurazione le componenti tangenziali alla guida circolare della forza peso  $-mg\hat{e}_2$  e dell'interazione elastica agente su  $C$  sono chiaramente non nulle e concordi. Esse sono avversate dalle sole forze centrifughe, a condizione che queste risultino sufficientemente intense. Ciò si verifica, euristicamente, per valori abbastanza grandi della velocità angolare  $\omega$ , in accordo con il risultato ottenuto.

*Configurazione  $\theta = 7\pi/6$*

Condizione necessaria e sufficiente perché ricorra in  $\theta = 7\pi/6$  un equilibrio del sistema è che risulti:

$$U'(7\pi/6) \delta\theta \leq 0 \quad \forall \delta\theta \leq 0$$

ovvero

$$U'(7\pi/6) \geq 0.$$

Nella fattispecie, si ha:

$$\begin{aligned} U'\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= \left[-(mg + kR) + m\omega^2(R - r) \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right] (R - r) \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \\ &= \left[-(mg + kR) - m\omega^2(R - r) \frac{\sqrt{3}}{2}\right] (R - r) \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ mg + kR + \frac{\sqrt{3}}{2} m\omega^2(R - r) \right] (R - r) > 0 \end{aligned}$$

e di conseguenza  $\theta = 7\pi/6$  costituisce sempre un equilibrio di confine del sistema.

### (c) Stabilità degli equilibri ordinari

La discussione della stabilità si basa, al solito, sull'uso dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale, e richiede il calcolo della derivata seconda del potenziale:

$$U''(\theta) = -(mg + kR)(R - r) \cos\theta + m\omega^2(R - r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

L'analisi è locale e deve essere eseguita per ogni singola configurazione ordinaria di equilibrio del sistema.

### Configurazione $\theta = 0$

La derivata seconda del potenziale si scrive:

$$\begin{aligned} U''(0) &= -(mg + kR)(R - r) + m\omega^2(R - r)^2 = \\ &= m\omega^2(R - r)^2 \left[ 1 - \frac{mg + kR}{m\omega^2(R - r)} \right] = m\omega^2(R - r)^2(1 - \lambda) \end{aligned}$$

e la natura dell'equilibrio dipende pertanto dal valore del parametro adimensionale  $\lambda$ . Più esattamente, si ha che:

- (i) per  $\lambda < 1$  risulta  $U''(0) > 0$  e la configurazione si presenta instabile a causa del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- (ii) se  $\lambda > 1$  il segno negativo della derivata seconda  $U''(0)$  consente di riconoscere in  $\theta = 0$  un massimo relativo proprio del potenziale e di dedurne la stabilità in forza del teorema di Lagrange-Dirichlet;
- (iii) qualora sia infine  $\lambda = 1$  ricorre un caso critico, poiché  $U''(0) = 0$  e non è possibile fare uso del teorema di inversione parziale, in quanto  $U''(0)$  non è di segno positivo, né del teorema di Lagrange-Dirichlet, dal momento che la configurazione non è stata riconosciuta come un massimo relativo proprio. In effetti, in questo caso il potenziale del sistema può porsi nella forma:

$$\begin{aligned}
U(\theta) &= m\omega^2(R-r)^2 \left( \lambda \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) = m\omega^2(R-r)^2 \left( \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) = \\
&= \frac{m\omega^2}{2} (R-r)^2 (2 \cos \theta + 1 - \cos^2 \theta) = \frac{m\omega^2}{2} (R-r)^2 [-(\cos \theta - 1)^2 + 2] = \\
&= \frac{m\omega^2}{2} (R-r)^2 [2 - (1 - \cos \theta)^2] = \frac{m\omega^2}{2} (R-r)^2 \left[ 2 - 4 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

per cui si riconosce che  $\theta = 0$  è un massimo relativo proprio di  $U$ , la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

#### **Configurazione $\theta = \pi$**

In questo caso la derivata seconda del potenziale assume sempre segno positivo:

$$U''(\pi) = (mg + kR)(R-r) + m\omega^2(R-r)^2 > 0$$

e la configurazione risulta instabile in forza del teorema di inversione parziale.

#### **Configurazione $\theta = \theta^*$**

La configurazione di equilibrio è definita e distinta dalle precedenti per  $\lambda < 1$  ed in essa la derivata seconda del potenziale risulta:

$$\begin{aligned}
U''(\theta^*) &= m\omega^2(R-r)^2 [-\lambda \cos \theta^* + \cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^*] = \\
&= m\omega^2(R-r)^2 [-\cos^2 \theta^* + \cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^*] = \\
&= -m\omega^2(R-r)^2 \sin^2 \theta^* = -m\omega^2(R-r)^2 (1 - \lambda^2) < 0.
\end{aligned}$$

Quando definita, la configurazione  $\theta = \theta^*$  si presenta pertanto come un massimo relativo proprio del potenziale e la sua stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

#### **Configurazione $\theta = -\theta^*$**

L'analisi di stabilità di questa configurazione è identica a quella svolta per  $\theta = \theta^*$ , in quanto la derivata seconda del potenziale assume lo stesso valore:

$$U''(-\theta^*) = U''(\theta^*) = -m\omega^2(R-r)^2 (1 - \lambda^2) < 0$$

e la configurazione risulta stabile quale massimo relativo proprio di  $U$ . L'unica differenza è costituita dal fatto che l'appartenenza di  $-\theta^*$  all'intervallo di parametrizzazione  $-\pi/6, 7\pi/6$  impone la condizione su  $\lambda$ :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \lambda < 1$$

del tutto ininfluyente sul risultato di stabilità.

**(d) Equazioni di Lagrange**

La lagrangiana del sistema è data dalla somma dell'energia cinetica e del potenziale totale:

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + (mg + kR)(R-r)\cos\theta + \frac{m\omega^2}{2}(R-r)^2\sin^2\theta.$$

Sostituendo nell'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

le relazioni immediate:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -(mg + kR)(R-r)\sin\theta + m\omega^2(R-r)^2\sin\theta\cos\theta,$$

l'unica equazione di Lagrange del sistema si riduce a:

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} + (mg + kR)(R-r)\sin\theta - m\omega^2(R-r)^2\sin\theta\cos\theta = 0.$$

**Osservazione. Equazione del moto in forma adimensionale**

L'equazione di Lagrange precedente può essere posta in una forma più semplice dividendola membro a membro per la costante positiva  $m\omega^2(R-r)^2$ :

$$\frac{3}{2\omega^2}\ddot{\theta} + \lambda\sin\theta - \sin\theta\cos\theta = 0.$$

Il cambio di coordinata temporale  $t \rightarrow \tau$  definito dalla trasformazione lineare:

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega t$$

consente poi la completa riduzione alla forma adimensionale:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \lambda\sin\theta - \sin\theta\cos\theta = 0.$$

**Osservazione. Integrale primo**

Poiché il sistema scleronomo è posizionale conservativo e la sua lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

un integrale primo del sistema è quello di Jacobi, identificabile con l'energia meccanica:

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \mathcal{L} = T - U = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 - (mg + kR)(R-r)\cos\theta - \frac{m\omega^2}{2}(R-r)^2\sin^2\theta.$$

Il ricorrere dell'integrale primo dell'energia consente di escludere l'attrattività, e dunque la stabilità asintotica, delle configurazioni stabili, associate a massimi relativi propri del potenziale.

**Osservazione. Piccole oscillazioni**

Per semplicità possiamo limitarci a considerare le piccole oscillazioni nell'intorno della configurazione di equilibrio  $\theta = 0$ , allorquando  $\lambda > 1$  e di conseguenza  $U''(0) < 0$  — la configurazione è stabile per Lagrange-Dirichlet. Linearizzando l'equazione di Lagrange nell'intorno di  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  si perviene all'equazione delle piccole oscillazioni:

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} + [mg + kR - m\omega^2(R-r)](R-r)\theta = 0$$

che può anche porsi nella forma equivalente:

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} + m\omega^2(R-r)^2(\lambda - 1)\theta = 0$$

e si identifica con l'equazione di un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione:

$$\Omega = \sqrt{\frac{2}{3}(\lambda - 1)\omega^2}$$

e periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2(\lambda - 1)\omega^2}}.$$

**Osservazione. Equazione del moto in presenza di una sollecitazione dissipativa**

Si supponga che al centro  $C$  del disco sia applicata una sollecitazione di resistenza viscosa del tipo:

$$\vec{F}_C = -\beta\dot{C}$$

con  $\beta$  costante positiva. Espresso il vettore posizione del punto di applicazione  $C$  in termini della coordinata lagrangiana:

$$C - O = (R - r)\sin\theta\hat{e}_1 - (R - r)\cos\theta\hat{e}_2$$

se ne calcola la derivata parziale rispetto a  $\theta$ :

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} = (R - r)(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2)$$

e si ricava l'unica componente lagrangiana della sollecitazione:

$$Q_\theta^\beta = -\beta \dot{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta} = -\beta \frac{\partial C}{\partial \theta} \dot{\theta} \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta} = -\beta \left| \frac{\partial C}{\partial \theta} \right|^2 \dot{\theta} = -\beta(R - r)^2 \dot{\theta}.$$

L'equazione del moto del sistema così modificato diventa allora:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_\theta^\beta$$

e si riduce a:

$$\frac{3}{2}m(R - r)^2 \ddot{\theta} + (mg + kR)(R - r) \sin \theta - m\omega^2(R - r)^2 \sin \theta \cos \theta = -\beta(R - r)^2 \dot{\theta}.$$

Vale la pena di notare che la sollecitazione addizionale è completamente dissipativa, in quanto di potenza non positiva:

$$\pi = Q_\theta^\beta \dot{\theta} = -\beta(R - r)^2 \dot{\theta}^2 \leq 0$$

e nulla soltanto a velocità generalizzata nulla:

$$\pi = -\beta(R - r)^2 \dot{\theta}^2 = 0 \quad \iff \quad \dot{\theta} = 0.$$

I criteri di stabilità asintotica e di instabilità di Barbasin-Krasovskii consentono di concludere che le configurazioni di equilibrio giudicate stabili per Lagrange-Dirichlet in quanto massimi relativi propri del potenziale  $U$ , diventano asintoticamente stabili in presenza di  $Q_\theta^\beta$ , mentre quelle instabili perché associate ad un valore positivo della derivata seconda di  $U$  rimangono instabili sotto l'azione di  $Q_\theta^\beta$ .