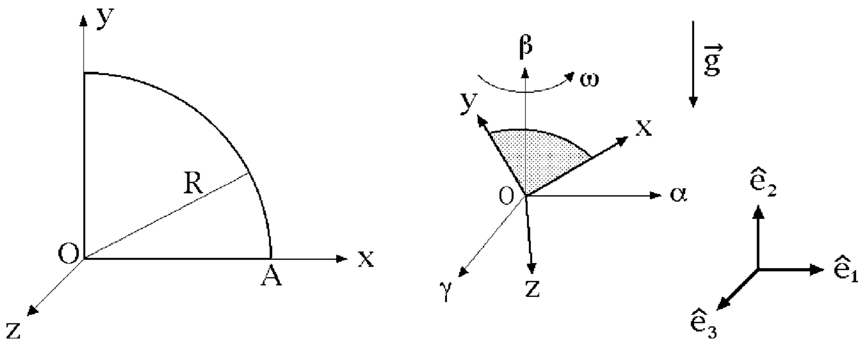
Scritto di meccanica razionale del 16.06.2003

Esercizio 1

Una lamina rigida e pesante, costituita da un quarto di cerchio di raggio R, si muove con punto fisso privo di attrito O, che ne costituisce il centro e coincide con l'origine di una terna $O\alpha\beta\gamma$. La terna $O\alpha\beta\gamma$ ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale $O\beta$ rispetto ad un riferimento inerziale. Solidale alla lamina si considera una terna $Oxyz$ di origine O che cointiene per intero la lamina nel primo quadrante del piano Oxy — vedi figura.



In un suo generico punto P, la densità della lamina è data da $\sigma(P) = 10\mu|P - O|R^{-3}$. Determinare:

(*a*) la massa della lamina;

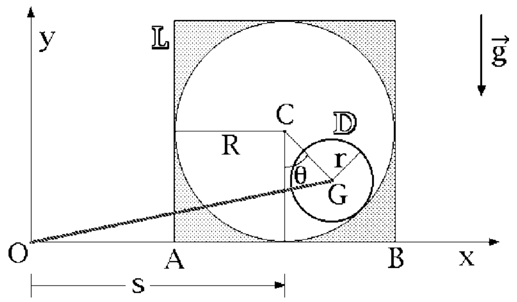
(*b*) il baricentro rispetto alla terna solidale $Oxyz$;

(*c*) la matrice d'inerzia relativamente alla terna $Oxyz$;

(*d*) l'energia cinetica relativa a $O\alpha\beta\gamma$ assumendo il punto O fisso e la velocità angolare istantanea data da $\vec{\omega} = 2\omega\hat{e}_1 + \omega\hat{e}_3$;

(*e*) per quale valore di $\xi \in \mathbb{R}$ la forza $\vec{F}_A = \xi\hat{e}_2$ applicata in A assicura l'equilibrio relativo a $O\alpha\beta\gamma$ nella configurazione che vede coincidere le terne fissa e solidale.

Esercizio 2
Nel piano verticale Oxy di una terna di riferimento inerziale una lamina quadrata $\mathbb{L}$, di lato $2R$, massa M e centro C, ha il lato AB vincolato a scorrere lungo l'asse orizzontale Ox. Al centro di $\mathbb{L}$ è praticato un foro circolare di raggio R, lungo il cui bordo interno rotola senza strisciare un disco circolare omogeneo $\mathbb{D}$, di centro G, massa m e raggio $r < R$. Il sistema è soggetto al peso e una molla di costante elastica k collega G all'origine O.



Nell'ipotesi che i vincoli siano ideali, si utilizzino le coordinate lagrangiane s e θ mostrate in figura per determinare:

(a) l'energia cinetica del sistema;
(b) le configurazioni di equilibrio;
(c) le proprietà di stabilità degli equilibri;
(d) le equazioni del moto;
(e) una costante del moto del sistema.

Soluzione dell'esercizio 1
(a) **Massa della lamina**
La massa della lamina viene ricavata per mezzo della definizione, integrando la densità σ sull'intera superficie del settore circolare. Conviene eseguire l'intergrazione in coordinate polari ρ, ϕ. A questo scopo si ricorda che il determinante jacobiano della trasformazione di coordinate:

$$x = \rho\cos\phi \qquad y = \rho\sin\phi$$

vale:

$$\det\begin{vmatrix}\cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi\end{vmatrix} = \rho$$

in modo che risulta:

$$m = \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi\, \rho \frac{10\mu}{R^3}\rho = \frac{10\mu}{R^3}\int_0^R d\rho\, \rho^2 \frac{\pi}{2} = \frac{5}{3}\pi\mu\,.$$

(b) **Baricentro**
Si indichino con x_G, y_G, z_G le coordinate del baricentro G rispetto alla terna solidale $Oxyz$. Il settore circolare è completamente ubicato nel piano coordinato Oxy, che ne costituisce perciò un ovvio piano di simmetria. Il baricentro del sistema appartiene dunque allo stesso piano, per cui:

$$z_G = 0\,.$$

Analoghe proprietà di simmetria consentono di affermare che:

$$x_G = y_G$$

in quanto la bisettrice $x = y$, $z = 0$ è asse di simmetria del sistema. Il problema della individuazione di G viene quindi ricondotto al calcolo della sola ascissa x_G. La definizione porge, in coordinate polari piane:

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{1}{m}\int x\,dm = \frac{1}{m}\int_0^R d\rho\int_0^{\pi/2} d\phi\,\rho\,\frac{10\mu}{R^3}\rho\,\rho\cos\phi = \\ &= \frac{1}{m}\,\frac{10\mu}{R^3}\int_0^R \rho^3 d\rho\int_0^{\pi/2}\cos\phi\,d\phi = \frac{3}{5\pi\mu}\,\frac{10\mu}{R^3}\,\frac{R^4}{4}\,\big[\sin\phi\big]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2\pi}R\end{aligned}$$

e il vettore posizione del baricentro relativamente alla terna $Oxyz$ si scrive:

$$G - O = \frac{3}{2\pi}R\,\hat{e}_1 + \frac{3}{2\pi}R\,\hat{e}_2\,.$$

(c) **Matrice d'inerzia**
Nella determinazione della matrice d'inerzia rispetto alla terna solidale $Oxyz$ ci si può valere delle proprietà di simmetria. Dal momento che la lamina è completamente collocata nel piano coordinato Oxy, si ha immediatamente che i prodotti d'inerzia in z sono tutti nulli:

$$L_{xz} = L_{zx} = L_{yz} = L_{zy} = 0$$

e che il momento d'inerzia relativo all'asse ortogonale alla lamina è la somma dei momenti d'inerzia calcolati rispetto agli assi coordinati a questa complanari:

$$L_{zz} = L_{xx} + L_{yy} .$$

L'essere la bisettrice $y = x$, $z = 0$ un asse di simmetria porge l'ulteriore condizione:

$$L_{xx} = L_{yy}$$

che del resto è dato di verificare con un calcolo diretto, notando che la definizione:

$$L_{xx} = \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi\, \rho\, \frac{10\mu}{R^3} \rho\, \rho^2 \sin^2\phi$$

per mezzo del cambiamento di variabile $\phi = (\pi/2) - \psi$ diventa:

$$L_{xx} = \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\psi\, \rho\, \frac{10\mu}{R^3} \rho\, \rho^2 \cos^2\psi$$

e con l'ulteriore sostituzione $\psi = \phi$ conduce al risultato richiesto:

$$L_{xx} = \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi\, \rho\, \frac{10\mu}{R^3} \rho\, \rho^2 \cos^2\phi = L_{yy} .$$

Si ha di conseguenza:

$$L_{zz} = L_{xx} + L_{xx} = 2L_{xx}$$

e non rimane che calcolare il momento L_{xx} e il prodotto d'inerzia L_{xy}. Per il primo risulta:

$$\begin{aligned} L_{xx} &= \frac{10\mu}{R^3} \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^2\phi\, d\phi = \frac{10\mu}{R^3} \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\phi}{2}\, d\phi = \\ &= \mu R^2 \left[\phi - \frac{\sin 2\phi}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \mu R^2 \end{aligned}$$

mentre per il prodotto d'inerzia vale:

$$\begin{aligned} L_{xy} &= -\int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi\, \rho\, \frac{10\mu}{R^3} \rho\, \rho^2 \sin\phi\, \cos\phi = \\ &= -\frac{10\mu}{R^3} \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin\phi\, \cos\phi\, d\phi = -\frac{10\mu}{R^3} \frac{R^5}{5} \left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\pi/2} = -\mu R^2 . \end{aligned}$$

Se ne deduce che $L_{zz} = \pi\mu R^2$, per cui la matrice d'inerzia del sistema assume la forma:

$$[L] = \mu R^2 \begin{pmatrix} \pi/2 & -1 & 0 \\ -1 & \pi/2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} .$$

(d) **Energia cinetica relativa a $O\alpha\beta\gamma$**
Poiché la lamina è in moto rigido con punto fisso O, rispetto alla terna di riferimento $O\alpha\beta\gamma$, l'energia cinetica del sistema viene rappresentata direttamente per mezzo della nota formula:

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot L_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\omega(2\ 0\ 1)\mu R^2 \begin{pmatrix} \pi/2 & -1 & 0 \\ -1 & \pi/2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \omega \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\mu R^2\omega^2(2\ 0\ 1) \begin{pmatrix} \pi \\ -2 \\ \pi \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\pi\mu R^2\omega^2 \,.$$

(e) **Valore di ξ che realizza l'equilibrio**
Rispetto alla terna $O\alpha\beta\gamma$ la lamina rigida è vincolata a muoversi con punto fisso O **privo di attrito**, per cui il sistema si riconosce essere a vincoli ideali e la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio si riduce a richiedere l'annullarsi del momento risultante delle forze attive, valutate in condizioni statiche nella configurazione data, rispetto al punto fisso. Poiché $O\alpha\beta\gamma$ è posta in rotazione con velocità angolare costante ω attorno all'asse $O\beta$ rispetto ad una terna inerziale, essa è sede di forze fittizie di trascinamento — centrifughe — e di Coriolis, queste ultime nulle in condizioni statiche e quindi totalmente ininfluenti agli effetti dell'equilibrio. Sul corpo agisce inoltre la forza peso, parallela e discorde rispetto all'asse $O\beta$. Nella configurazione per la quale la terna solidale $Oxyz$ si sovrappone a quella fissa $O\alpha\beta\gamma$, la forza centrifuga agente su un piccolo elemento di lamina, di massa dm e coordinate $(\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, 0)$, si scrive:

$$d\vec{F} = \omega^2 x\,\hat{e}_1\,dm$$

ed il relativo momento rispetto ad O risulta:

$$(P - O) \wedge d\vec{F} = (x\,\hat{e}_1 + y\,\hat{e}_2) \wedge \omega^2 x\,dm\,\hat{e}_1 = -\omega^2 xy\,dm\,\hat{e}_3$$

in modo che il momento risultante in O delle forze centrifughe diventa:

$$\vec{M}_O^{\mathrm{cf}} = -\omega^2 \int xy\,dm\,\hat{e}_3 = \omega^2 L_{xy}\,\hat{e}_3 \,.$$

Il momento risultante in O delle forze peso si ricava invece ricordando che il sistema delle forze gravitazionali parallele è equivalente ad un'unica forza — il peso totale — applicata nel baricentro G, in modo che:

$$\vec{M}_O^{\mathrm{g}} = (G - O) \wedge m\vec{g} = \frac{3R}{2\pi}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \wedge (-mg\,\hat{e}_2) = -\frac{3R}{2\pi}mg\,\hat{e}_3 =$$

$$= -\frac{3R}{2\pi}\frac{5\pi}{3}\mu\,g\,\hat{e}_3 = -\frac{5}{2}\mu Rg\,\hat{e}_3 \,.$$

Per la forza $\vec{F}_A$ agente in A si ha infine:

$$(A-O)\wedge \vec{F}_A \,=\, R\,\hat{e}_1 \wedge \xi\,\hat{e}_2 \,=\, \xi R\,\hat{e}_3\,.$$

L'equilibrio nella configurazione assegnata ricorre se e soltanto se risulta nullo il momento delle sollecitazioni attive rispetto al punto fisso O, considerando le forze agenti in condizioni di quiete, ossia:

$$\omega^2 L_{xy}\,\hat{e}_3 - \frac{5}{2}R\mu g\,\hat{e}_3 + \xi R\,\hat{e}_3 \,=\, 0\,.$$

La condizione è equivalente a:

$$\omega^2 L_{xy} - \frac{5}{2}R\mu g + \xi R \,=\, 0$$

e fornisce il valore della costante ξ necessario e sufficiente per l'equilibrio:

$$\xi \,=\, -\frac{\omega^2}{R}L_{xy} + \frac{5}{2}\mu g \,=\, -\frac{\omega^2}{R}(-\mu R^2) + \frac{5}{2}\mu g \,=\, \mu R\omega^2 + \frac{5}{2}\mu g\,.$$

Soluzione dell'esercizio 2
(a) **Energia cinetica**
L'energia cinetica del sistema consta della somma di due contributi, l'uno relativo alla lamina $\mathbb{L}$ e l'altro al disco $\mathbb{D}$.

Energia cinetica della lamina
Dal momento che il lato AB è vincolato a scorrere lungo l'asse Ox, il moto della lamina è puramente traslatorio per cui sarà sufficiente determinare la velocità di un suo punto qualsiasi, ad esempio del centro C. A questo scopo basterà derivare rispetto al tempo il vettore posizione:

$$C-O \,=\, s\,\hat{e}_1 + R\,\hat{e}_2$$

per ottenere:

$$\dot{C} \,=\, \dot{s}\,\hat{e}_1$$

in modo che l'energia cinetica della lamina si ridurrà a:

$$T_{\mathbb{L}} \,=\, \frac{M}{2}\dot{C}^2 \,=\, \frac{M}{2}\dot{s}^2\,.$$

Energia cinetica del disco
Il disco $\mathbb{D}$ è privo di punti fissi, per cui la sua energia cinetica può essere determinata mediante il teorema di König. Il vettore posizione del baricentro G, centro geometrico del disco, vale:

$$\begin{aligned}G-O \,=\, C-O \,+\, G-C \,&=\, s\,\hat{e}_1 + R\,\hat{e}_2 + (R-r)\,\sin\theta\,\hat{e}_1 - (R-r)\,\cos\theta\,\hat{e}_2 \,=\\ &=\, [s+(R-r)\sin\theta]\,\hat{e}_1 + [R-(R-r)\cos\theta]\,\hat{e}_2\end{aligned}$$

e la sua velocità si scrive:

$$\dot{G} = [\dot{s} + (R-r)\cos\theta\,\dot{\theta}]\,\hat{e}_1 + (R-r)\sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{e}_2$$

con modulo quadrato:

$$|\dot{G}|^2 = \dot{s}^2 + (R-r)^2\dot{\theta}^2 + 2(R-r)\cos\theta\,\dot{s}\dot{\theta}\,.$$

La velocità angolare del disco rispetto alla terna assoluta $Oxyz$ coincide con quella relativa ad una qualsiasi terna solidale alla lamina $\mathbb{L}$, che come è ben noto può esprimersi nella forma:

$$\vec{\omega}_{\mathbb{D}} = -\Big(\frac{R}{r} - 1\Big)\dot{\theta}\,\hat{e}_3\,.$$

L'energia cinetica del disco risulta allora:

$$\begin{aligned}
T_{\mathbb{D}} &= \frac{m}{2}\dot{G}^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}|\vec{\omega}_{\mathbb{D}}|^2 = \\
&= \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\theta}^2 + m(R-r)\cos\theta\,\dot{s}\dot{\theta} + \frac{mr^2}{4}\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2 = \\
&= \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + m(R-r)\cos\theta\,\dot{s}\dot{\theta}\,.
\end{aligned}$$

Per l'energia cinetica del sistema si ha pertanto:

$$T = T_{\mathbb{L}} + T_{\mathbb{D}} = \frac{M+m}{2}\dot{s}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + m(R-r)\cos\theta\,\dot{s}\dot{\theta}\,.$$

(*b*) **Configurazioni di equilibrio**

Il sistema è scleronomo a vincoli bilaterali e tutte le sollecitazioni attive agenti su di esso hanno natura posizionale e conservativa. Gli equilibri sono perciò tutti e soltanto i punti critici del potenziale U del sistema, dato dalla somma di un termine gravitazionale e di un termine elastico. Il potenziale gravitazionale della lamina $\mathbb{L}$ può essere ignorato, visto che l'ordinata del baricentro C si mantiene costante lungo qualsiasi moto possibile del sistema. Il potenziale delle forze peso si riduce dunque al solo contributo del disco $\mathbb{D}$:

$$U_{\mathrm{g}} = U_{\mathrm{g}}^{\mathbb{D}} = -mg(G-O)\cdot\hat{e}_2 = -mg[R-(R-r)\cos\theta] = mg(R-r)\cos\theta + \text{costante}\,.$$

Il potenziale relativo all'interazione elastica fra l'origine O e il centro G del disco è determinabile per mezzo della relazione:

$$\begin{aligned}
U_{\mathrm{el}} &= -\frac{k}{2}|G-O|^2 = -\frac{k}{2}|[s+(R-r)\sin\theta]\,\hat{e}_1 + [R-(R-r)\cos\theta]\,\hat{e}_2|^2 = \\
&= -\frac{k}{2}\big[s^2 + (R-r)^2\sin^2\theta + 2(R-r)s\sin\theta + R^2 + (R-r)^2\cos^2\theta - 2(R-r)R\cos\theta\big] \\
&= -\frac{k}{2}[s^2 + (R-r)^2 + R^2 + 2(R-r)s\sin\theta - 2(R-r)R\cos\theta] = \\
&= -\frac{k}{2}s^2 + k(R-r)(-s\sin\theta + R\cos\theta) + \text{costante}
\end{aligned}$$

e porge quindi per il potenziale totale del sistema l'espressione

$$
\begin{aligned}
U(s,\theta) \;&=\; U_{\rm g} + U_{\rm el} \;=\; mg(R-r)\cos\theta - \frac{k}{2}s^2 + k(R-r)(-s\sin\theta + R\cos\theta) \;=\\
&=\; -\frac{k}{2}s^2 + (R-r)\big[-ks\sin\theta + (kR+mg)\cos\theta\big]
\end{aligned}
$$

nella quale si sono ignorate le inessenziali costanti additive. Le equazioni di equilibrio si ricavano uguagliando a zero le derivate parziali prime del potenziale:

$$
\begin{aligned}
U_s \;&=\; \frac{\partial U}{\partial s} \;=\; -ks - k(R-r)\sin\theta\\
U_\theta \;&=\; \frac{\partial U}{\partial \theta} \;=\; (R-r)\big[-ks\cos\theta - (kR+mg)\sin\theta\big]
\end{aligned}
$$

e consistono quindi nel sistema di equazioni trigonometriche:

$$
\begin{cases}
s \;=\; -(R-r)\sin\theta\\
ks\cos\theta + (kR+mg)\sin\theta \;=\; 0
\end{cases}
$$

che una sostituzione della prima equazione nella seconda riduce immediatamente alla forma:

$$
\begin{cases}
s \;=\; -(R-r)\sin\theta\\
-k(R-r)\sin\theta\,\cos\theta + (kR+mg)\sin\theta \;=\; 0
\end{cases}
$$

e quindi equivale a:

$$
\begin{cases}
s \;=\; -(R-r)\sin\theta\\
[-k(R-r)\cos\theta + (kR+mg)]\sin\theta \;=\; 0\,.
\end{cases}
$$

Nella seconda equazione compare ora la sola incognita θ e le sue soluzioni si deducono uguagliando a zero l'uno o l'altro dei due fattori a primo membro. Da $\sin\theta = 0$ seguono le radici $\theta = 0, \pi$, mentre dall'ulteriore richiesta:

$$
-k(R-r)\cos\theta + (kR+mg) \;=\; 0
$$

si avrebbe:

$$
\cos\theta \;=\; \frac{kR+mg}{k(R-r)} \;=\; \frac{R}{R-r} + \frac{mg}{k(R-r)} \;>\; 1 + \frac{mg}{k(R-r)} \;>\; 1\,,
$$

cui non corrisponden alcun valore reale di θ. Le configurazioni di equilibrio del sistema — sempre definite — sono pertanto:

$$
(s,\theta) \;=\; (0,0) \qquad \text{e} \qquad (s,\theta) \;=\; (0,\pi)\,.
$$

(*c*) **Stabilità degli equilibri**

Data la natura posizionale e conservativa del sistema, la stabilità di tutte le configurazioni di equilibrio può essere analizzata usando i teoremi standard di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. Al solito, il primo passo per lo studio della stabilità consiste nel calcolo delle derivate parziali seconde del potenziale:

$$\begin{cases} U_{ss} = -k \\ U_{s\theta} = U_{\theta s} = -k(R-r)\cos\theta \\ U_{\theta\theta} = (R-r)[ks\sin\theta - (kR+mg)\cos\theta] \end{cases}$$

che porge la matrice hessiana di U:

$$H_U(s,\theta) = \begin{pmatrix} -k & -k(R-r)\cos\theta \\ -k(R-r)\cos\theta & (R-r)[ks\sin\theta-(kR+mg)\cos\theta] \end{pmatrix} =$$

$$= (R-r)\begin{pmatrix} -k/(R-r) & -k\cos\theta \\ -k\cos\theta & ks\sin\theta-(kR+mg)\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Configurazione $(s,\theta)=(0,0)$

Per questa configurazione la matrice hessiana del potenziale assume la forma:

$$H_U(0,0) = (R-r)\begin{pmatrix} -k/(R-r) & -k \\ -k & -(kR+mg) \end{pmatrix}$$

con determinante positivo:

$$\det H_U(0,0) = (R-r)^2\left[\frac{k}{R-r}(kR+mg)-k^2\right] > (R-r)kmg$$

e traccia negativa:

$$\mathrm{tr} H_U(0,0) = (R-r)\left[-\frac{k}{R-r}-(kR+mg)\right];$$

i suoi autovalori sono quindi entrambi negativi. La configurazione si trova essere perciò un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(s,\theta)=(0,\pi)$

In questo caso la matrice hessiana del potenziale risulta:

$$H_U(0,\pi) = (R-r)\begin{pmatrix} -k/(R-r) & k \\ k & kR+mg \end{pmatrix}$$

questa volta con determinante negativo:

$$\det H_U(0,\pi) = (R-r)^2\left[-\frac{k}{R-r}(kR+mg)-k^2\right]$$

e quindi un autovalore reale positivo ed uno reale negativo. Questo equilibrio è instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

(d) **Equazioni del moto**
Il sistema è scleronomo, posizionale conservativo e a vincoli ideali. Le equazioni pure del moto sono dunque quelle di Lagrange. La lagrangiana del sistema viene determinata sommando le espressioni di energia cinetica e potenziale

$$\mathfrak{L} = \frac{M+m}{2}\dot{s}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + m(R-r)\cos\theta\,\dot{s}\dot{\theta} - \frac{k}{2}s^2 + (R-r)\big[-ks\sin\theta + (kR+mg)\cos\theta\big].$$

Da essa si ricavano le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{s}} &= (M+m)\dot{s} + m(R-r)\cos\theta\,\dot{\theta} \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{s}}\Big) &= (M+m)\ddot{s} + m(R-r)\cos\theta\,\ddot{\theta} - m(R-r)\sin\theta\,\dot{s}\dot{\theta} \\
\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial s} &= -ks - k(R-r)\sin\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\theta}} &= \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\theta} + m(R-r)\cos\theta\,\dot{s} \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\theta}}\Big) &= \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} + m(R-r)\cos\theta\ddot{s} - m(R-r)\sin\theta\,\dot{s}\dot{\theta} \\
\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\theta} &= -m(R-r)\sin\theta\,\dot{s}\dot{\theta} + (R-r)[-ks\cos\theta - (kR+mg)\sin\theta]
\end{aligned}$$

che sostituite nelle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{s}}\Big) - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial s} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\theta} = 0$$

porgono le equazioni del moto richieste:

$$(M+m)\ddot{s} + m(R-r)\cos\theta\,\ddot{\theta} - m(R-r)\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + ks + k(R-r)\sin\theta = 0$$

$$m(R-r)\cos\theta\,\ddot{s} + \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} + (R-r)[ks\cos\theta + (kR+mg)\sin\theta] = 0\,.$$

(e) **Costante del moto**
Trattandosi di sistema scleronomo posizionale e conservativo, un ovvio integrale primo è quello dell'energia meccanica $H = T - U$, che vale perciò:

$$H = \frac{M+m}{2}\dot{s}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + m(R-r)\cos\theta\,\dot{s}\dot{\theta} + \frac{k}{2}s^2 + (R-r)\big[ks\sin\theta - (kR+mg)\cos\theta\big]\,.$$