Scritto di meccanica razionale del 22.06.1999

Esercizio 1

Un sistema rigido $\mathbb{S}$ con punto fisso O si compone di un disco circolare $\mathbb{D}$ e di una semicirconferenza $\mathbb{C}$ entrambi di raggio R e connessi ortogonalmente fra loro lungo i rispettivi diametri. All'istante $t = 0$ il sistema $\mathbb{S}$ è disposto rispetto alla terna di riferimento $Oxyz$ in modo che $\mathbb{D}$ sia la regione $x^2 + y^2 \leq R^2$ del piano Oxy e la semicirconferenza $\mathbb{C}$ giaccia nel semipiano Oyz con $z \geq 0$ (vedi figura). $\mathbb{C}$ è una curva omogenea di massa m_1, mentre $\mathbb{D}$ ha densità areale $\sigma(x,y) = m_2[2R-(x^2+y^2)^{1/2}]/R^3$. Sapendo che il vettore velocità angolare istantanea di $\mathbb{S}$ a $t = 0$ è dato da $\vec{\omega}(0) = (2\hat{e}_1 + \hat{e}_3)\,\Omega$, con $\Omega > 0$ costante, determinare allo stesso istante $t = 0$ e rispetto alla terna $Oxyz$:

- (a) il momento angolare di $\mathbb{S}$ rispetto al polo fisso O;
- (b) l'energia cinetica di $\mathbb{S}$;
- (c) l'equazione dell'asse istantaneo di moto;
- (d) il luogo dei punti dello spazio solidale ad $\mathbb{S}$ la cui velocità sia $(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3)R\Omega/2$.

Esercizio 2

Un sistema pesante si muove nel piano verticale Oxy di una terna di riferimento $Oxyz$. Il sistema si compone di un'asta rigida omogenea OA, con punto fisso in O, massa m_1 e lunghezza R, e di un disco circolare rigido pure omogeneo, di centro C, raggio R e massa m_2(^{o}). L'estremo A dell'asta è incernierato in un punto assegnato del bordo del disco, mentre il centro C del disco è vincolato a scorrere lungo l'asse Ox. Una molla ideale di costante elastica $k = m_1 g/R > 0$ congiunge i punti A e $Q(0, R)$. Sull'asta e sul disco sono inoltre applicate due coppie di uguale momento $M\hat{e}_3$, con $M > 0$ costante.
Sapendo che la terna $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse Oy rispetto ad un riferimento inerziale, supponendo i vincoli ideali e facendo uso dell'angolo θ mostrato in figura come parametro lagrangiano:

- (a) scrivere le equazioni lagrangiane del moto del sistema;
- (b) individuare le configurazioni di equilibrio relative ad $Oxyz$ ed analizzarne la stabilità;
- (c) determinare un integrale primo del sistema;
- (d) per $R\omega^2/g = 1/5$ caratterizzare le condizioni iniziali per le quali si hanno moti a meta asintotica del sistema;
- (e) individuare le configurazioni di equilibrio, studiandone la stabilità, nell'ipotesi che il sistema sia soggetto ad una ulteriore sollecitazione $-\beta\dot{A}$ applicata in A ($\beta > 0$ costante).

(^{o}) Si assume che $m_2/m_1 < 13/24$, condizione che si utilizzerà per semplificare la trattazione del punto (d).

Soluzione dell'esercizio 1

Per determinare momento angolare ed energia cinetica del sistema $\mathbb{S}$ all'istante $t = 0$ occorre procedere preliminarmente al calcolo della matrice d'inerzia dello stesso $\mathbb{S}$ nel punto fisso O rispetto alla terna $Oxyz$. A questo scopo conviene ricavare separatamente la matrice d'inerzia in O della semicirconferenza omogenea $\mathbb{C}$ e quella del disco $\mathbb{D}$, entrambe rispetto alla terna $Oxyz$.

Matrice d'inerzia della semicirconferenza $\mathbb{C}$

La semicirconferenza omogenea ha raggio R e massa m_1, e giace nel piano coordinato Oyz. Il momento d'inerzia rispetto all'asse Ox è la metà di quello di una circonferenza di uguale raggio e massa $2m_1$:

$$L_{xx} = \frac{1}{2} 2m_1 R^2 = m_1 R^2 \ ,$$

e, constatato che la curva è piana, analoghe considerazioni si estendono ai due momenti rispetto ad Oy ed Oz:

$$L_{yy} = \frac{1}{2}\frac{2m_1R^2}{2} = \frac{m_1R^2}{2} \qquad L_{zz} = \frac{1}{2}\frac{2m_1R^2}{2} = \frac{m_1R^2}{2} \ .$$

I prodotti d'inerzia risultano viceversa tutti nulli

$$L_{zx} = L_{xz} = 0 \qquad L_{xy} = L_{yx} = 0 \qquad L_{yz} = L_{zy} = 0$$

i primi quattro in forza del fatto che $x = 0$ per ogni punto della circonferenza, e gli ultimi due per l'essere Oxz un piano di simmetria. La matrice d'inerzia di $\mathbb{C}$ diventa allora:

$$[L_{\mathbb{C}}] = m_1R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \ .$$

Matrice d'inerzia del disco $\mathbb{D}$

Il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse coordinato Oz si ricava immediatamente dalla definizione, facendo uso dell'espressione per la densità ed eseguendo l'integrale in coordinate polari piane:

$$L_{zz} = \int_{[0,R]_\rho \times [0,2\pi]_\theta} \rho^2 \frac{m_2}{R^3}(2R-\rho)\rho \ d\rho\, d\theta = 2\pi \frac{m_2}{R^3}\int_0^R (2R-\rho)\rho^3\, d\rho =$$

$$= \frac{2\pi m_2}{R^3}\int_0^R (2R\rho^3 - \rho^4)\, d\rho = \frac{2\pi m_2}{R^3}\Big[2R\frac{R^4}{4} - \frac{R^5}{5}\Big] = \frac{3\pi}{5} m_2 R^2 \ .$$

I momenti d'inerzia rispetto agli altri due assi coordinati Ox ed Oy sono uguali fra loro per simmetria e la loro somma deve coincidere con L_{zz}; pertanto

$$L_{xx} = L_{yy} = \frac{1}{2}L_{zz} \ ,$$

mentre i prodotti d'inerzia risultano tutti nulli in quanto i piani coordinati Oxy, Oyz ed Ozx sono piani di simmetria per il disco $\mathbb{D}$. Ne consegue per la matrice d'inerzia di $\mathbb{D}$ l'espressione

$$[L_{\mathbb{D}}] \;=\; \frac{3\pi}{5}m_2R^2 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Matrice d'inerzia del sistema

La matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna $Oxyz$ viene determinata come somma delle matrici d'inerzia relative alla medesima terna della semicirconferenza $\mathbb{C}$ e del disco $\mathbb{D}$, risultando così

$$[L_{\mathbb{S}}] \;=\; [L_{\mathbb{C}}] + [L_{\mathbb{D}}] \;=\; m_1R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} + \frac{3\pi}{5}m_2R^2 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m_1R^2 + \dfrac{3\pi}{10}m_2R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2}m_1R^2 + \dfrac{3\pi}{10}m_2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2}m_1R^2 + \dfrac{3\pi}{5}m_2R^2 \end{pmatrix}$$

Si può ora procedere al calcolo del momento angolare in O e dell'energia cinetica del sistema $\mathbb{S}$, essendo noto il vettore velocità angolare istantanea di questo all'istante $t = 0$.

(a) **Momento angolare di $\mathbb{S}$ a $t = 0$**

Ricordato che $\vec{\omega}(0) = (2\,\hat{e}_1 + \hat{e}_3)\Omega$, $\Omega > 0$, e che O è un punto fisso per il sistema rigido, l'espressione del vettore momento angolare si scrive

$$\vec{K}_0 \;=\; L_O[\vec{\omega}(0)] \;=\; L_O[2\Omega\,\hat{e}_1 + \Omega\,\hat{e}_3] .$$

Le componenti di $\vec{K}_0$ rispetto ad $Oxyz$ si ottengono dalla relazione matriciale seguente, sostituendo all'operatore d'inerzia L_O la corrispondente matrice d'inerzia relativa alla terna $Oxyz$ e ad $\vec{\omega}(0)$ il vettore colonna delle sue componenti rispetto alla stessa terna $Oxyz$:

$$[L_{\mathbb{S}}] \begin{pmatrix} 2\Omega \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2\Big(m_1R^2 + \dfrac{3\pi}{10}m_2R^2\Big)\Omega \\ 0 \\ \Big(\dfrac{1}{2}m_1R^2 + \dfrac{3\pi}{5}m_2R^2\Big)\Omega \end{pmatrix}$$

per cui

$$\vec{K}_O \;=\; 2\Big(m_1R^2 + \frac{3\pi}{10}m_2R^2\Big)\Omega\,\hat{e}_1 + \Big(\frac{1}{2}m_1R^2 + \frac{3\pi}{5}m_2R^2\Big)\Omega\,\hat{e}_3 .$$

(b) **Energia cinetica di $\mathbb{S}$ a $t = 0$**

Avendo $\mathbb{S}$ un punto fisso in O, l'energia cinetica si scrive direttamente nella forma

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}(0) \cdot \vec{K}_O = \frac{1}{2}\Big[4\Omega^2\Big(m_1R^2 + \frac{3\pi}{10}m_2R^2\Big) + \Omega^2\Big(\frac{1}{2}m_1R^2 + \frac{3\pi}{5}m_2R^2\Big)\Big] .$$

(c) **Asse istantaneo di moto di $\mathbb{S}$ a $t = 0$**

Per definizione l'asse istantaneo di moto (o asse di Mozzi) è il luogo dei punti P dello spazio solidale ad $\mathbb{S}$ per i quali all'istante $t = 0$ risulta $\dot{P}$ parallelo ad $\vec{\omega}(0)$. Essendo O fisso, la velocità del generico P può porsi nella forma ben nota

$$\dot{P} = \vec{\omega}(0) \wedge (P - O)$$

dalla quale si deduce che necessariamente $\dot{P}$ deve essere ortogonale ad $\vec{\omega}(0)$; per i punti dell'asse di Mozzi ciò implica che $\dot{P} = 0$, per cui l'asse istantaneo di moto è in effetti un asse istantaneo di rotazione. Detto asse si caratterizza dunque per mezzo dell'equazione:

$$\vec{\omega}(0) \wedge (P - O) = 0$$

che implica il parallelismo di $\vec{\omega}(0)$ e del vettore posizione $P-O$. L'asse istantaneo di moto è perciò la retta passante per O la cui direzione è individuata dal vettore $\vec{\omega}(0)$. La sua rappresentazione parametrica può esprimersi, per esempio, nel modo seguente

$$(x, y, z) = (2\lambda, 0, \lambda) , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

(d) **Punti dello spazio solidale ad $\mathbb{S}$ la cui velocità risulta $(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3)R\Omega/2$ all'istante $t = 0$**

I punti in questione sono tutti e soli i punti P per i quali risulta

$$\dot{P} = \vec{\omega}(0) \wedge (P - O) = (-\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3)R\Omega/2 .$$

Posto $P - O = x\,\hat{e}_1 + x\,\hat{e}_2 + z\,\hat{e}_3$, si ha l'equazione

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 2\Omega & 0 & \Omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3)R\Omega/2$$

equivalente a

$$-\Omega y\,\hat{e}_1 + (\Omega x - 2\Omega z)\,\hat{e}_2 + 2\Omega y\,\hat{e}_3 = (-\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3)R\Omega/2$$

ovvero, semplificando la costante positiva Ω,

$$-y\,\hat{e}_1 + (x - 2z)\,\hat{e}_2 + 2y\,\hat{e}_3 = -\frac{R}{2}\,\hat{e}_1 + \frac{R}{2}\,\hat{e}_2 + R\,\hat{e}_3 .$$

Quest'ultima equazione vettoriale si riduce per componenti alle tre equazioni scalari

$$-y = -\frac{R}{2} \qquad x - 2z = \frac{R}{2} \qquad 2y = R$$

e quindi al sistema di due equazioni indipendenti

$$\begin{cases} y \;=\; R/2 \\ x - 2z \;=\; R/2 \end{cases}$$

che individua una retta parallela all'asse istantaneo di moto, non passante per l'origine O.

Soluzione dell'esercizio 2
(a) **Equazioni lagrangiane del moto del sistema**
L'energia cinetica del sistema si ottiene come somma delle energie cinetiche dell'asta OA e del disco. Il calcolo dell'energia cinetica dell'asta è immediato, osservato che questa ruota attorno all'asse fisso Oz con velocità angolare $\vec{\omega}_{\text{asta}} = -\dot{\theta}\,\hat{e}_3$. Infatti

$$\vec{\omega}_{\text{asta}} \;=\; \frac{d}{dt}(C\hat{O}A)\,\hat{e}_3 \;=\; \frac{d}{dt}(\pi-\theta)\,\hat{e}_3 \;=\; -\dot{\theta}\,\hat{e}_3$$

in quanto l'angolo $C\hat{O}A$ è compreso fra la direzione Ox, fissa rispetto alla terna $Oxyz$, e la direzione OA, ovviamente fissa rispetto all'asta OA. Perciò

$$T_{\text{asta}} \;=\; \frac{1}{2}\frac{m_1R^2}{3}(-\dot{\theta})^2 \;=\; \frac{m_1R^2}{6}\dot{\theta}^2 \;.$$

Il disco non presenta punti fissi e per il calcolo dell'energia cinetica conviene ricorrere al teorema di König. A tale scopo si scrive preliminarmente il vettore posizione del baricentro C rispetto all'origine

$$C - O \;=\; 2R\,\cos(\pi-\theta)\,\hat{e}_1 \;=\; -2R\,\cos\theta\,\hat{e}_1$$

per cui risulta

$$\dot{C} \;=\; 2R\,\sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{e}_1$$

e di conseguenza

$$|\dot{C}|^2 \;=\; 4R^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 \;.$$

Il teorema di König porge così

$$T_{\text{disco}} = \frac{m_2}{2}4R^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_{Cz}\dot{\theta}^2 = m_2 2R^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\frac{m_2R^2}{2}\dot{\theta}^2 = m_2R^2\Big(\frac{1}{4}+2\,\sin^2\theta\Big)\,\dot{\theta}^2.$$

Per l'energia cinetica totale del sistema $\mathbb{S}$ si ha infine l'espressione:

$$T \;=\; T_{\text{asta}}+T_{\text{disco}} \;=\; \frac{m_1R^2}{6}\dot{\theta}^2+m_2R^2\Big(\frac{1}{4}+2\,\sin^2\theta\Big)\,\dot{\theta}^2 \;=\; \Big[\frac{m_1R^2}{6}+m_2R^2\Big(\frac{1}{4}+2\,\sin^2\theta\Big)\Big]\,\dot{\theta}^2$$

Il potenziale totale si determina sommando i potenziali relativi a tutte le sollecitazioni posizionali conservative agenti sul sistema. In particolare, all'interazione elastica fra i punti Q ed A è associato il potenziale

$$U_{el} \;=\; -\frac{k}{2}|A-Q|^2 \;=\; -kR^2(1-\sin\theta) \;=\; kR^2\sin\theta + \text{costante}$$

facilmente ottenibile dalle relazioni

$$\begin{aligned} A-O &= R\cos(\pi-\theta)\,\hat{e}_1 + R\sin(\pi-\theta)\,\hat{e}_2 \;=\; -R\cos\theta\,\hat{e}_1 + R\sin\theta\,\hat{e}_2 \\ Q-O &= R\,\hat{e}_2 \end{aligned}$$

che implicano

$$\begin{aligned} A-Q &= -R\cos\theta\,\hat{e}_1 + R\,(\sin\theta-1)\,\hat{e}_2 \\ |A-Q|^2 &= 2R^2(1-\sin\theta)\ . \end{aligned}$$

Il potenziale gravitazionale dell'asta si deduce senza difficoltà notando che il baricentro G dell'asta si identifica con il suo punto medio

$$G-O \;=\; \frac{1}{2}(A-O) \;=\; \frac{1}{2}(-R\cos\theta\,\hat{e}_1 + R\sin\theta\,\hat{e}_2)$$

in modo che

$$U_g^{\rm asta} \;=\; -m_1 g\Big(\frac{R}{2}\sin\theta\Big) \;=\; -\frac{m_1 g R}{2}\sin\theta\ ;$$

quanto al potenziale gravitazionale del disco, poiché il baricentro C è vincolato a restare sull'asse coordinato Ox, si ha banalmente

$$U_g^{\rm disco} \;=\; -m_2 g 0 \;=\; 0\ .$$

Il sistema di riferimento assegnato ruota con velocità angolare costante $\omega\,\hat{e}_2$ attorno all'asse Oy rispetto ad una terna galileiana e risulta pertanto non inerziale. In esso agiscono le sollecitazioni attive d'inerzia, quella centrifuga e quella di Coriolis.
In ogni punto P del sistema le forze di Coriolis sono ortogonali al piano coordinato Oxy, mentre la derivata parziale del punto di applicazione rispetto al parametro lagrangiano, $\partial P/\partial\theta$, è comunque parallela a tale piano. Ne segue che l'unica componente lagrangiana D_θ delle sollecitazioni di Coriolis consiste in una somma di contributi costantemente nulli, ed è nulla a propria volta:

$$D_\theta \;=\; \sum_P -2\omega\,\hat{e}_2\wedge\dot{P}\,m_P\cdot\frac{\partial P}{\partial\theta} \;=\; \sum_P 0 \;=\; 0\ .$$

Le forze centrifughe sono invece di natura posizionale conservativa e conviene calcolarne separatamente i potenziali relativi all'asta ed al disco. Per l'asta si ha:

$$\begin{aligned} U_{cf}^{\rm asta} \;&=\; \frac{\omega^2}{2}I_{Oy} \;=\; \frac{\omega^2}{2}\int_0^R [\xi\cos(\pi-\theta)]^2\frac{m_1}{R}\,d\xi \;=\; \frac{m_1\omega^2}{2R}\int_0^R \xi^2\,d\xi\;\cos^2\theta \;= \\ &=\; \frac{m_1\omega^2}{2R}\frac{R^3}{3}\cos^2\theta \;=\; \frac{m_1R^2\omega^2}{6}\cos^2\theta \end{aligned}$$

mentre per il disco risulta

$$U_{cf}^{\rm disco} \;=\; \frac{\omega^2}{2}I_{Oy} \;=\; \frac{\omega^2}{2}\big(I_{Cy}+m_2|C-O|^2\big) \;=\; \frac{\omega^2}{2}\big[I_{Cy}+m_2(2R\cos(\pi-\theta))^2\big] \;=$$

$$= \frac{\omega^2}{2}\big[I_{Cy} + 4m_2R^2\cos^2\theta\big] \;=\; 2m_2R^2\omega^2\cos^2\theta + \text{costante}\ ,$$

in cui il momento I_{Cy} è indipendente da θ per simmetria e non richiede quindi una determinazione esplicita. La coppia di momento costante $M\,\hat{e}_3$ applicata all'asta costituisce una ulteriore sollecitazione di tipo posizionale conservativo, il cui potenziale è

$$U^{\text{asta}}_{coppia} \;=\; M\,\hat{e}_3\cdot\hat{e}_3(\pi-\theta) \;=\; -M\theta + \text{costante}\ ,$$

essendo $\pi-\theta$ l'ampiezza dell'angolo $C\hat{O}A$; analoga espressione vale per la coppia di momento $M\,\hat{e}_3$ agente sul disco

$$U^{\text{disco}}_{coppia} \;=\; M\,\hat{e}_3\cdot\hat{e}_3\theta \;=\; M\theta\ .$$

Per il potenziale totale del sistema si ha dunque l'espressione

$$U \;=\; U_{el} + U_g^{\text{asta}} + U_g^{\text{disco}} + U_{cf}^{\text{asta}} + U_{cf}^{\text{disco}} + U^{\text{asta}}_{coppia} + U^{\text{disco}}_{coppia} \;=$$

$$=\; kR^2\sin\theta - \frac{m_1gR}{2}\,\sin\theta + \frac{m_1R^2\omega^2}{6}\cos^2\theta + 2m_2R^2\omega^2\cos^2\theta - M\theta + M\theta \;=$$

$$=\;\Big(kR^2 - \frac{m_1gR}{2}\Big)\,\sin\theta + \Big(\frac{m_1}{6} + 2m_2\Big)R^2\omega^2\cos^2\theta \;=\; \frac{m_1gR}{2}\,\sin\theta + \Big(\frac{m_1}{6} + 2m_2\Big)R^2\omega^2\cos^2\theta$$

nella quale si sono ignorate le costanti additive arbitrarie e si è introdotta la condizione $k = m_1g/R$. La lagrangiana del sistema risulta allora

$$\mathcal{L} \;=\; T+U \;=\; \Big[\frac{m_1}{6} + m_2\Big(\frac{1}{4} + 2\,\sin^2\theta\Big)\Big]R^2\,\dot\theta^2 + \frac{m_1gR}{2}\,\sin\theta + \Big(\frac{m_1}{6} + 2m_2\Big)R^2\omega^2\cos^2\theta$$

e l'unica equazione lagrangiana del moto si scrive

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\Big) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \;=\; 0\ .$$

Il calcolo esplicito dell'equazione di Lagrange non comporta difficoltà, grazie alle espressioni immediate:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} \;=\; \Big[\frac{m_1}{3} + m_2\Big(\frac{1}{2} + 4\,\sin^2\theta\Big)\Big]R^2\,\dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\Big) \;=\; \Big[\frac{m_1}{3} + m_2\Big(\frac{1}{2} + 4\,\sin^2\theta\Big)\Big]R^2\,\ddot\theta + 8m_2\sin\theta\,\cos\theta\,R^2\dot\theta^2$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \;=\; 4m_2\sin\theta\,\cos\theta\,R^2\dot\theta^2 + \frac{m_1gR}{2}\,\cos\theta - \Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big)R^2\omega^2\cos\theta\,\sin\theta$$

in modo che risulta:

$$\Big[\frac{m_1}{3} + m_2\Big(\frac{1}{2} + 4\,\sin^2\theta\Big)\Big]R^2\,\ddot\theta + 8m_2\sin\theta\,\cos\theta\,R^2\dot\theta^2 -$$

$$-4m_2\sin\theta\,\cos\theta\,R^2\dot\theta^2-\frac{m_1gR}{2}\cos\theta+\Big(\frac{m_1}{3}+4m_2\Big)R^2\omega^2\cos\theta\,\sin\theta\;=\;0$$

e dividendo per la costante positiva R^2:

$$\Big[\frac{m_1}{3}+m_2\Big(\frac{1}{2}+4\,\sin^2\theta\Big)\Big]\,\ddot\theta+4m_2\sin\theta\,\cos\theta\,\dot\theta^2-\frac{m_1g}{2R}\cos\theta+\Big(\frac{m_1}{3}+4m_2\Big)\omega^2\cos\theta\,\sin\theta=0\,.$$

(*b*) **Configurazioni di equilibrio relative ad $Oxyz$ ed analisi di stabilità**
Trattandosi di sistema a vincoli indipendenti dal tempo e soggetto soltanto a sollecitazioni posizionali conservative, le configurazioni di equilibrio sono tutti e soli i punti critici del potenziale totale $U(\theta)$ e si ottengono quindi come soluzioni dell'equazione

$$U'(\theta)\;=\;\frac{m_1gR}{2}\cos\theta-\Big(\frac{m_1}{3}+4m_2\Big)R^2\omega^2\sin\theta\,\cos\theta\;=\;0$$

ovvero di

$$\cos\theta\,\Big[\frac{m_1g}{2R}-\Big(\frac{m_1}{3}+4m_2\Big)\omega^2\sin\theta\Big]\;=\;0\;.$$

Le soluzioni si ottengono ponendo a zero separatamente l'uno o l'altro dei due fattori a primo membro. In particolare per $\cos\theta=0$ si deducono le configurazioni di equilibrio

$$\theta\;=\;-\frac{\pi}{2}\,,\quad\frac{\pi}{2}\,,$$

mentre dalla condizione

$$\frac{m_1g}{2R}-\Big(\frac{m_1}{3}+4m_2\Big)\omega^2\sin\theta\;=\;0$$

si perviene a

$$\sin\theta\;=\;\frac{1}{\Big(\dfrac{m_1}{3}+4m_2\Big)\omega^2}\,\frac{m_1g}{2R}\;:=\;\lambda>0$$

ed alle ulteriori soluzioni

$$\theta\;=\;\theta^\star\,,\quad\pi-\theta^\star\;,\quad\text{con}\quad\theta^\star=\arcsin\lambda\;,$$

definite e distinte dalle precedenti purché sia $\lambda<1$.
L'analisi di stabilità viene condotta ricavando in primo luogo l'espressione della derivata seconda del potenziale totale, necessaria premessa all'applicazione dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale:

$$U''(\theta)\;=\;-\frac{m_1gR}{2}\sin\theta-\Big(\frac{m_1}{3}+4m_2\Big)R^2\omega^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\;.$$

Si procede quindi all'analisi delle singole configurazioni di equilibrio individuate.

Configurazione $\theta = -\pi/2$. La derivata seconda del potenziale è data in questa configurazione da

$$U''(-\pi/2) \;=\; \frac{m_1 gR}{2} + \Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big) R^2\omega^2 > 0$$

per cui $\theta = -\pi/2$ risulta un minimo relativo proprio del potenziale, riconoscibile dall'esame della derivata seconda. Il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet implica l'instabilità della configurazione.

Configurazione $\theta = \pi/2$. In questo caso la derivata seconda del potenziale non ha segno definito

$$U''(\pi/2) \;=\; -\frac{m_1 gR}{2} + \Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big) R^2\omega^2$$

per cui è necessario distinguere tre sottocasi:

(*i*) se $\lambda < 1$, ossia $\dfrac{m_1 gR}{2} < \Big(\dfrac{m_1}{3} + 4m_2\Big) R^2\omega^2$, risulta $U''(\pi/2) > 0$ e la configurazione è instabile per l'inversione parziale di L.-D. in quanto minimo relativo proprio del potenziale riconoscibile dall'esame della derivata seconda;

(*ii*) se $\lambda > 1$, cioè $\dfrac{m_1 gR}{2} > \Big(\dfrac{m_1}{3} + 4m_2\Big) R^2\omega^2$, si ha invece $U''(\pi/2) < 0$ e la configurazione è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet quale massimo relativo proprio del potenziale totale;

(*iii*) se $\lambda = 1$, ovvero $\dfrac{m_1 gR}{2} = \Big(\dfrac{m_1}{3} + 4m_2\Big) R^2\omega^2$, vale $U''(\pi/2) = 0$ e ricorre un caso critico, non potendosi né affermare che la configurazione costituisca un massimo relativo proprio del potenziale, né escludere la presenza di un massimo dall'esame della derivata seconda.
Si ha in effetti, per $\lambda = 1$, l'espressione particolare del potenziale totale:

$$U(\theta) \;=\; \frac{m_1 gR}{2}\sin\theta + \Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big)\frac{R^2\omega^2}{2}\cos^2\theta \;=$$

$$= \Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big) R^2\omega^2 \Big[\lambda\sin\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta\Big] \;=\; \Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big) R^2\omega^2 \Big(\sin\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta\Big) .$$

Posto $\theta = (\pi/2) + \eta$, si può scrivere

$$U\Big(\frac{\pi}{2} + \eta\Big) \;=\; \tilde{U}(\eta) \;=\; \Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big) R^2\omega^2 \Big(\cos\eta + \frac{1}{2}\sin^2\eta\Big)$$

e tenuto conto delle ovvie approssimazioni di Taylor:

$$\cos\eta \;=\; 1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^4}{24} + O(\eta^6) \qquad (\eta \to 0)$$

$$\frac{1}{2}\sin^2\eta \;=\; \frac{1}{2}\Big[\eta - \frac{\eta^3}{6} + O(\eta^5)\Big]^2 \;=\; \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^4}{6} + O(\eta^6) \qquad (\eta \to 0)$$

$$\cos\eta + \frac{1}{2}\sin^2\eta \;=\; 1 - \frac{\eta^4}{8} + O(\eta^6) \qquad (\eta \to 0)$$

si conclude che $\eta = 0$ costituisce un massimo relativo proprio del potenziale traslato $\tilde{U}$, in quanto $\Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big)R^2\omega^2 > 0$. Ne consegue che $\theta = \pi/2$ rappresenta un massimo relativo proprio del potenziale U, stabile per Lagrange-Dirichlet.

Configurazioni $\theta = \theta^\star, \pi - \theta^\star$, definite per $\lambda < 1$. Premesso che

$$U(\pi-\theta) \;=\; \frac{m_1 gR}{2}\sin(\pi-\theta) + \Big(\frac{m_1}{6} + 2m_2\Big)R^2\omega^2\cos^2(\pi-\theta) \;=\; U(\theta) \qquad \forall\,\theta\in\mathbb{R}$$

ci si può limitare ad analizzare la stabilità della configurazione $\theta = \theta^\star$. Vale allora

$$\begin{aligned} U''(\theta^\star) \;&=\; -\frac{m_1 gR}{2}\sin\theta^\star - \Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big)R^2\omega^2(1 - 2\sin^2\theta^\star) \;= \\ &=\; \Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big)R^2\omega^2\big[-\lambda\sin\theta^\star - 1 + 2\sin^2\theta^\star\big] \end{aligned}$$

e quindi, essendo $\sin\theta^\star = \lambda$,

$$U''(\theta^\star) \;=\; \Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big)R^2\omega^2[-\lambda^2 - 1 + 2\lambda^2] \;=\; \Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big)R^2\omega^2(\lambda^2 - 1) < 0$$

in forza della condizione di esistenza $\lambda < 1$. La configurazione $\theta = \theta^\star$ costituisce un massimo relativo proprio del potenziale U ed è quindi stabile per il teorema di L.-D..

(c) **Integrale primo**

Il sistema considerato è a vincoli indipendenti dal tempo, posizionale e conservativo. Un integrale primo è quindi costituito dall'energia meccanica totale, identificabile altresì con l'integrale di Jacobi:

$$H \;=\; T - U \;=\; \Big[\frac{m_1R^2}{6} + m_2R^2\Big(\frac{1}{4} + 2\sin^2\theta\Big)\Big]\dot\theta^2 - \frac{m_1gR}{2}\sin\theta - \Big(\frac{m_1}{6} + 2m_2\Big)R^2\omega^2\cos^2\theta.$$

(d) **Condizioni iniziali per le quali si hanno moti a meta asintotica, nell'ipotesi che sia** $R\omega^2/g = 1/5$

Le condizioni iniziali possono essere determinate facendo uso della discussione di Weierstrass, applicabile grazie al fatto che il sistema risulta posizionale conservativo e ad un solo grado di libertà. Nonostante il coefficiente dell'energia cinetica dipenda esplicitamente dal parametro θ, è ben noto che la discussione di Weiestrass può essere condotta direttamente sulla sola energia potenziale:

$$-U(\theta) = -\frac{m_1gR}{2}\sin\theta - \Big(\frac{m_1}{6} + 2m_2\Big)R^2\omega^2\cos^2\theta \;=\; -\Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big)R^2\omega^2\Big(\lambda\sin\theta + \frac{\cos^2\theta}{2}\Big)$$

espressione nella quale, avendosi per ipotesi $R\omega^2/g = 1/5$, risulta

$$\lambda \;=\; \frac{1}{\Big(\frac{m_1}{3} + 4m_2\Big)\omega^2}\,\frac{m_1 g}{2R} \;=\; \frac{1}{\frac{m_1}{3} + 4m_2}\,\frac{5}{2}m_1 \;=\; \frac{1}{\frac{1}{3} + 4\frac{m_2}{m_1}}\,\frac{5}{2} > \frac{1}{\frac{1}{3} + 4\frac{13}{24}}\,\frac{5}{2} \;=\; 1$$

per cui i soli punti critici di $-U$ sono $\theta = -\pi/2, \pi/2$, a meno di multipli interi inessenziali di 2π (i punti critici $\theta = \theta^\star, \pi - \theta^\star$ sono definiti se e soltanto se $\lambda < 1$).
Si è già stabilito in precedenza che $\theta = -\pi/2$ costituisce sempre un minimo relativo proprio del potenziale, mentre $\theta = \pi/2$ rappresenta un massimo nell'ipotesi che $\lambda > 1$. Nella fattispecie si riconosce quindi in $\theta = -\pi/2$ un massimo relativo (nonché assoluto) proprio dell'energia potenziale $-U$, mentre $\theta = \pi/2$ è un minimo relativo ed assoluto proprio. Il valore dell'energia potenziale nel massimo $\theta = -\pi/2$ è $U(-\pi/2) = m_1 gR/2$, per cui le condizioni iniziali corrispondenti a moti a meta asintotica (nel futuro o nel passato) sono tutte e sole quelle appartenenti all'insieme

$$\Big\{(\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2 \;; \quad H(\theta_0, \dot{\theta}_0) \,=\, m_1 gR/2\,,\; \dot{\theta}_0 \neq 0\Big\}$$

essendo $H(\theta, \dot{\theta})$ l'energia meccanica del sistema determinata in precedenza:

$$H(\theta, \dot{\theta}) \,=\, \Big[\frac{m_1 R^2}{6} + m_2 R^2\Big(\frac{1}{4} + 2\sin^2\theta\Big)\Big]\,\dot{\theta}^2 - \frac{m_1 gR}{2}\sin\theta - \Big(\frac{m_1}{6} + 2m_2\Big)R^2\omega^2\cos^2\theta.$$

(e) **Configurazioni di equilibrio e loro proprietà di stabilità in presenza di una sollecitazione di resistenza viscosa**
La sollecitazione $-\beta\dot{A}$ in A ha componente lagrangiana

$$Q_\theta \,=\, -\beta\dot{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial\theta}$$

e potenza non positiva

$$\pi \,=\, Q_\theta\dot{\theta} \,=\, -\beta\dot{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial\theta}\,\dot{\theta} \,=\, -\beta|\dot{A}|^2 \leq 0\;,$$

cosicché non modifica le configurazioni di equilibrio determinate nel caso posizionale conservativo (come del resto è evidente dall'espressione esplicita di Q_θ). Poiché $A - O = -R\cos\theta\,\hat{e}_1 + R\sin\theta\,\hat{e}_2$ si ha inoltre

$$\dot{A} \,=\, (R\sin\theta\,\hat{e}_1 + R\cos\theta\,\hat{e}_2)\,\dot{\theta}$$

per cui $\pi = -\beta R^2\dot{\theta}^2$ e l'annullarsi della potenza implica $-\beta R^2\dot{\theta}^2 = 0$, ossia l'annullarsi della velocità generalizzata $\dot{\theta}$. Se ne deduce che la sollecitazione ha natura completamente dissipativa, il che consente di discutere le proprietà di stabilità delle configurazioni di equilibrio per mezzo dei criteri di Barbasin e Krasovskii. Nella fattispecie, gli equilibri determinati sono al più in numero finito (quattro in tutto) e quindi risultano necessariamente isoltati. La stabilità di ognuno di essi può essere analizzata per mezzo dei criteri di Barbasin-Krasovskii. In particolare, i massimi relativi propri del potenziale U, stabili per Lagrange-Dirichlet nel caso posizionale conservativo, si presentano ora come asintoticamente stabili; per contro, le configurazioni di equilibrio giudicate instabili nel caso posizionale conservativo in forza dell'inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, risultano ora instabili in quanto non corrispondenti a massimi relativi propri di U.