Scritto di meccanica razionale del 06.07.2001

Esercizio 1

Un punto materiale P si muove lungo l'asse coordinato Ox sotto l'azione della forza:

$$F = -2\sin x\cos x + \cos x$$

Determinare:

(a) le configurazioni di equilibrio del sistema;

(b) la stabilità degli equilibri del sistema;

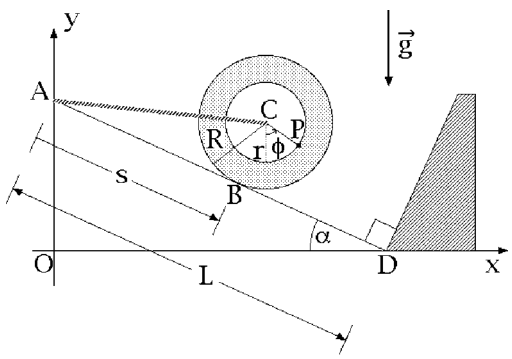
(c) tutte e sole le condizioni iniziali corrispondenti a moti a meta asintotica del sistema;

(d) tutte e sole le condizioni iniziali per cui si hanno moti di tipo oscillatorio;

(e) tutte e sole le condizioni iniziali per le quali il moto risulta indefinitamente progressivo, non limitato.

Esercizio 2

In un piano verticale Oxy, una ruota $\mathbb{W}$ rotola senza strisciare lungo la guida rettilinea AD, inclinata di un angolo α rispetto all'asse orizzontale Ox e interrotta in D da una parete rigida piana ad essa ortogonale (vedi figura). La ruota, di massa M, consiste in una corona circolare omogenea di centro C, raggio interno r e raggio esterno R; un punto P di massa m può scorrere senza attrito lungo il suo bordo interno. Il sistema è pesante e una molla ideale di costante elastica $k > 0$ collega il centro C con il punto fisso A della guida. La ruota è infine soggetta ad un sistema di forze di risultante $\vec{R} = F\,\hat{e}_1$ e momento risultante in C $\vec{M}_C = \mu\,\hat{e}_3 + Fs\,\sin\phi\,\hat{e}_1$, dove F, μ sono costanti assegnate mentre s e ϕ rappresentano le coordinate lagrangiane (vedi figura).



Posto $|A - D| = L > 2R$ ed assunti i vincoli ideali, determinare:

(a) l'energia cinetica del sistema;

(b) le equazioni lagrangiane del moto del sistema;

(c) la condizione affinché per $s = L - R$ si abbia almeno una configurazione di equilibrio;

(d) la condizione affinché il sistema ammetta almeno una configurazione di equilibrio ordinaria, ricavando poi gli equilibri ordinari corrispondenti e analizzandone infine le proprietà di stabilità;

(*e*) le frequenze normali delle piccole oscillazioni nell'intorno di un equilibrio stabile a scelta.

Soluzione dell'esercizio 1
(*a*) **Configurazioni di equilibrio**
Le configurazioni di equilibrio si ottengono uguagliando a zero la sollecitazione attiva applicata al punto materiale P e sono pertanto tutte e sole le soluzioni dell'equazione trigonometrica:

$$-2\sin x\cos x+\cos x \;=\; \cos x(-2\sin x+1) \;=\; 2\cos x\Big(-\sin x+\frac{1}{2}\Big) \;=\; 0\ .$$

Annullando il primo fattore si ottiene l'equazione $\cos x = 0$, le cui soluzioni sono:

$$x \;=\; +\pi/2\ ,\quad -\pi/2$$

a meno di multipli interi di 2π. Le configurazioni di equilibrio residue si deducono ponendo a zero anche il secondo fattore:

$$\sin x-\frac{1}{2} \;=\; 0$$

per cui risulta:

$$x \;=\; +\pi/6\ ,\quad 5\pi/6\ .$$

(*b*) **Stabilità degli equilibri**
L'analisi di stabilità degli equilibri richiede che si riconosca la sollecitazione posizionale come conservativa. Ciò è certamente vero trattandosi di sollecitazione posizionale in un sistema unidimensionale. Il potenziale relativo è dato dall'integrale indefinito:

$$U(x) \;=\; \int(-2\sin x\cos x+\cos x)\,dx \;=\; -\sin^2 x+\sin x$$

la cui derivata seconda si scrive:

$$U''(x) \;=\; 2(\sin^2 x-\cos^2 x)-\sin x$$

e porge:

$$U''(\pi/2) \;=\; 1>0 \qquad U''(-\pi/2) \;=\; 3>0$$
$$U''(\pi/6) \;=\; -\frac{3}{2}<0 \qquad U''(5\pi/6) \;=\; -\frac{3}{2}<0\ .$$

Dal segno della derivata seconda calcolata nelle varie configurazioni di equilibrio si conclude che:

(*i*) $x=\pi/2$ è instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, essendo $U''(\pi/2)>0$;

(*ii*) $x=-\pi/2$ è instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, avendosi ancora $U''(-\pi/2)>0$;

(*iii*) $x = \pi/6$ costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet;

(*iv*) $x = 5\pi/6$ rappresenta anch'esso un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet, come nel caso precedente.

Si osservi che in nessun caso la stabilità risulta asintotica, dal momento che l'energia meccanica del sistema è un integrale primo e si conserva dunque lungo tutti i moti del sistema.

(c) **Condizioni iniziali corrispondenti a moti a meta asintotica**
L'esistenza dell'integrale primo dell'energia meccanica:

$$H(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \sin^2 x - \sin x$$

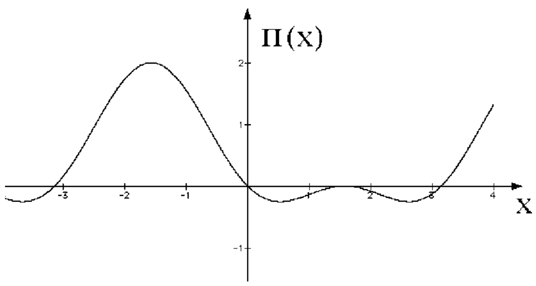
consente di applicare l'analisi qualitativa di Weierstrass allo studio dei moti del sistema. Indicata con:

$$\Pi(x) = -U(x) = \sin^2 x - \sin x$$

l'energia potenziale del sistema, dalla precedente analisi di stabilità e dalle relazioni:

$$\Pi(+\pi/2) = 0 \qquad \Pi(-\pi/2) = 2 \qquad \Pi(\pi/6) = -\frac{1}{4} \qquad \Pi(5\pi/6) = -\frac{1}{4}$$

è immediato desumere che il grafico della funzione Π deve avere l'andamento illustrato in figura:



Le condizioni iniziali $(x_0, \dot{x}_0)$ corrispondenti a moti a meta asintotica — nel passato o nel futuro — sono tutte e sole quelle per le quali l'energia meccanica totale assume i valori:

$$H(\pi/2, 0) = \Pi(\pi/2) = 0 \qquad \text{e} \qquad H(-\pi/2, 0) = \Pi(-\pi/2) = 2$$

sempreché si abbia $\dot{x}_0 \neq 0$. Nel primo caso i moti sono a meta asintotica tanto nel passato quanto nel futuro e corrispondono ad orbite omocline del sistema. Viceversa, nel secondo caso i moti risultano ancora a meta asintotica sia nel passato che nel futuro, ma sono associati ad orbite eterocline, in quanto i limiti per $t \to -\infty$ e per $t \to +\infty$ della soluzione $x(t)$ sono configurazioni di equilibrio instabile **distinte**. Pertanto le condizioni iniziali richieste sono quelle appartenenti all'insieme:

$$\left\{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \dot{x} \neq 0\,,\ \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \sin^2 x - \sin x = 0\right\} \cup$$

$$\cup\Big\{(x,\dot{x})\in\mathbb{R}^2\ :\ \dot{x}\neq 0\,,\ \frac{m}{2}\dot{x}^2+\sin^2\!x-\sin x\ =\ 2\Big\}\,.$$

(*d*) **Condizioni iniziali per i moti oscillatori**
Dal grafico dell'energia potenziale si deduce che le condizioni iniziali $(x_0,\dot{x}_0)$ per i moti oscillatori (o periodici) sono tutte e sole quelle che soddisfano le diseguaglianze:

$$\Pi(\pi/6)<H(x_0,\dot{x}_0)<\Pi(\pi/2)\qquad\text{oppure}\qquad\Pi(\pi/2)<H(x_0,\dot{x}_0)<\Pi(-\pi/2)$$

e dunque appartengono all'insieme:

$$\begin{aligned}&\Big\{(x,\dot{x})\in\mathbb{R}^2\ :\ -\frac{1}{4}<\frac{m}{2}\dot{x}^2+\sin^2\!x-\sin x<0\Big\}\cup\\ \cup&\Big\{(x,\dot{x})\in\mathbb{R}^2\ :\ 0<\frac{m}{2}\dot{x}^2+\sin^2\!x-\sin x<2\Big\}\ .\end{aligned}$$

(*e*) **Condizioni iniziali per i moti indefinitamente progressivi, non limitati**
Affinché il moto di condizioni iniziali $(x,\dot{x})=(x_0,\dot{x}_0)\in\mathbb{R}^2$ sia indefinitamente progressivo nel futuro e non limitato occorre e basta che $\dot{x}_0>0$ e inoltre:

$$H(x_0,\dot{x}_0)>H(-\pi/2,0)\ =\ \Pi(-\pi/2)\ =\ 2\ .$$

Le condizioni iniziali richieste sono dunque tutte e soltanto quelle appartenenti all'insieme:

$$\Big\{(x,\dot{x})\in\mathbb{R}^2\ :\ \dot{x}>0\,,\ \frac{m}{2}\dot{x}^2+\sin^2\!x-\sin x>2\Big\}\ .$$

Soluzione dell'esercizio 2
(*a*) **Energia cinetica**
L'energia cinetica del sistema viene determinata come somma di due contributi, l'uno dovuto alla ruota $\mathbb{W}$ e l'altro al punto materiale P.

Energia cinetica della ruota
Poiché la ruota non presenta punti fissi, conviene calcolarne l'energia cinetica facendo uso del teorema di König:

$$T_{\mathbb{W}}\ =\ \frac{M}{2}|\dot{C}|^2+\frac{1}{2}I^{\mathbb{W}}_{Cz}|\vec{\omega}_{\mathbb{W}}|^2\ .$$

La velocità del baricentro C si ottiene derivando rispetto al tempo il suo vettore posizione:

$$\begin{aligned}C-A\ &=\ B-A\,+\,C-B\ =\ s\cos\alpha\,\hat{e}_1-s\sin\alpha\,\hat{e}_2+R\sin\alpha\,\hat{e}_1+R\cos\alpha\,\hat{e}_2\ =\\ &=\ (s\cos\alpha+R\sin\alpha)\,\hat{e}_1+(-s\sin\alpha+R\cos\alpha)\,\hat{e}_2\end{aligned}\tag{1}$$

ed è data dall'espressione:

$$\dot{C}\ =\ \frac{d}{dt}(C-A)\ =\ \dot{s}\cos\alpha\,\hat{e}_1-\dot{s}\sin\alpha\,\hat{e}_2$$

Per il momento d'inerzia della ruota rispetto all'asse Cz si ha invece:

$$I_{Cz}^{\mathbb{W}} = \int_r^R d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\theta\,\rho^2 \frac{M}{\pi(R^2-r^2)} = \frac{2M}{R^2-r^2}\frac{R^4-r^4}{4} = \frac{M}{2}(R^2+r^2)$$

e la corrispondente velocità angolare vale:

$$\vec{\omega}_{\mathbb{W}} = -\frac{\dot{s}}{R}\,\hat{e}_3\ .$$

In tal modo l'energia cinetica $T_{\mathbb{W}}$ si riduce a:

$$T_{\mathbb{W}} = \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}(R^2+r^2)\Big|-\frac{\dot{s}}{R}\,\hat{e}_3\Big|^2 = \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{M}{4R^2}(R^2+r^2)\dot{s}^2 = \frac{M}{4}\Big(3+\frac{r^2}{R^2}\Big)\dot{s}^2\ .$$

Il calcolo rigoroso della velocità angolare $\vec{\omega}_{\mathbb{W}} = \omega\,\hat{e}_3$ della ruota può essere eseguito applicando la condizione di puro rotolamento, la quale impone che si abbia:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{B} = \dot{C} + \omega\,\hat{e}_3 \wedge (B-C) = \dot{s}\cos\alpha\,\hat{e}_1 - \dot{s}\sin\alpha\,\hat{e}_2 + \omega\,\hat{e}_3 \wedge (-R\sin\alpha\,\hat{e}_1 - R\cos\alpha\,\hat{e}_2) \\ &= \dot{s}\cos\alpha\,\hat{e}_1 - \dot{s}\sin\alpha\,\hat{e}_2 + \omega\,(-R\sin\alpha\,\hat{e}_2 + R\cos\alpha\,\hat{e}_1) = (\dot{s}+R\omega)(\cos\alpha\,\hat{e}_1 - \sin\alpha\,\hat{e}_2) \end{aligned}$$

e conduce pertanto all'equazione:

$$\dot{s} + R\omega = 0$$

da cui segue il risultato richiesto.

Energia cinetica del punto materiale P

La velocità assoluta del punto P si ricava dal corrispondente vettore posizione, convenientemente espresso in termini dei parametri lagrangiani:

$$\begin{aligned} P-A &= P-C+C-A = r\sin\phi\,\hat{e}_1 - r\cos\phi\,\hat{e}_2 + C - A = \\ &= (r\sin\phi + s\cos\alpha + R\sin\alpha)\,\hat{e}_1 + (-r\cos\phi - s\sin\alpha + R\cos\alpha)\,\hat{e}_2 \end{aligned} \tag{2}$$

derivandolo rispetto al tempo:

$$\dot{P} = \frac{d}{dt}(P-A) = (r\cos\phi\dot{\phi} + \dot{s}\cos\alpha)\,\hat{e}_1 + (r\sin\phi\dot{\phi} - \dot{s}\sin\alpha)\,\hat{e}_2\ .$$

L'energia cinetica si scrive perciò:

$$T_P = \frac{m}{2}|\dot{P}|^2 = \frac{m}{2}[r^2\dot{\phi}^2 + 2r\cos(\alpha+\phi)\dot{\phi}\dot{s} + \dot{s}^2]\ .$$

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale risulta dalla somma dei termini relativi alla ruota e al punto materiale P:

$$T = T_P + T_{\mathbb{W}} = \frac{m}{2}[r^2\dot{\phi}^2 + 2r\cos(\alpha+\phi)\dot{\phi}\dot{s} + \dot{s}^2] + \frac{M}{4}\Big(3+\frac{r^2}{R^2}\Big)\dot{s}^2$$

ed è costituita da una forma quadratica definita positiva delle velocità generalizzate $(\dot{\phi}, \dot{s})$:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\phi}\ \dot{s})\begin{pmatrix} mr^2 & mr\cos(\alpha+\phi) \\ mr\cos(\alpha+\phi) & m+\frac{M}{2}\Big(3+\frac{r^2}{R^2}\Big)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\phi} \\ \dot{s}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}\ \dot{s})\mathbb{A}\begin{pmatrix}\dot{\phi} \\ \dot{s}\end{pmatrix}$$

come è evidente dai segni positivi di determinante e traccia della matrice rappresentativa:

$$\det(\mathbb{A}) = m^2r^2\sin^2(\alpha+\phi)+\frac{Mmr^2}{2}\Big(3+\frac{r^2}{R^2}\Big) > 0 \qquad \mathrm{tr}(\mathbb{A}) = mr^2+m+\frac{M}{2}\Big(3+\frac{r^2}{R^2}\Big) > 0$$

ed è peraltro imposto dal carattere scleronomo del sistema.

(b) **Equazioni di Lagrange**
Per la determinazione delle equazioni lagrangiane del sistema è necessario procedere al calcolo del potenziale totale, nonché alle componenti lagrangiane delle eventuali sollecitazioni non posizionali conservative. Il sistema è soggetto per ipotesi alle forze peso, all'interazione elastica fra i punti C ed A, ed infine a un sistema di forze applicate alla ruota, di risultante e momento risultante in C:

$$\vec{R} = F\,\hat{e}_1 \qquad \vec{M}_C = \mu\,\hat{e}_3 + Fs\,\sin\phi\,\hat{e}_1$$

rispettivamente. Il potenziale elastico della molla AC segue da una immediata applicazione del teorema di Pitagora al triangolo ABC, rettangolo in B:

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}|C-A|^2 = -\frac{k}{2}(s^2+R^2)\ .$$

Per quanto riguarda il potenziale delle forze peso, questo è dato dalla somma di un termine relativo alla ruota $\mathbb{W}$ e di un termine associato al punto materiale P. Vale infatti:

$$U_{\mathrm{g}} = -Mg\,\hat{e}_2\cdot(C-A) - mg\,\hat{e}_2\cdot(P-A)$$

e quindi, sostituendo le espressioni (1) e (2) per i vettori $C-A$ e $P-A$:

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{g}} &= -Mg(-s\sin\alpha+R\cos\alpha) - mg(-r\cos\phi - s\sin\alpha + R\cos\alpha) = \\ &= Mg(s\sin\alpha - R\cos\alpha) + mg(r\cos\phi + s\sin\alpha - R\cos\alpha)\ . \end{aligned}$$

Le componenti lagrangiane del sistema di forze applicate alla ruota vengono determinate per mezzo della formula consueta, facendo uso dell'angolo $-s/R$ che esprime la rotazione della ruota rispetto all'osservatore fisso e dell'espressione del baricentro C in termini delle coordinate lagrangiane. Si ha così:

$$\begin{aligned} Q_s &= \frac{\partial C}{\partial s}\cdot\vec{R} + \frac{\partial}{\partial s}\Big(-\frac{s}{R}\Big)\hat{e}_3\cdot\vec{M}_C = \frac{\partial C}{\partial s}\cdot F\,\hat{e}_1 + \frac{\partial}{\partial s}\Big(-\frac{s}{R}\Big)\hat{e}_3\cdot(\mu\,\hat{e}_3 + Rs\sin\phi\,\hat{e}_1) = \\ &= \frac{\partial}{\partial s}(C-A)\cdot F\,\hat{e}_1 - \frac{\mu}{R} = F\frac{\partial}{\partial s}[(C-A)\cdot\hat{e}_1] - \frac{\mu}{R} = \\ &= F\frac{\partial}{\partial s}(s\cos\alpha + R\sin\alpha) - \frac{\mu}{R} = F\cos\alpha - \frac{\mu}{R} \end{aligned}$$

e:

$$Q_\phi \,=\, \frac{\partial C}{\partial \phi}\cdot \vec{R} + \frac{\partial}{\partial \phi}\Big(-\frac{s}{R}\Big)\hat{e}_3\cdot \vec{M}_C \,=\, 0\cdot \vec{R} + 0\,\hat{e}_3\cdot \vec{M}_C \,=\, 0$$

e poiché le coordinate lagrangiane sono definite nell'insieme convesso $\{(\phi,s)\in\mathbb{R}^2\,:\, s\leq L-R\}$, se ne conclude che le sollecitazioni in esame sono posizionali conservative, con potenziale:

$$U_{\mathbb{W}} \,=\, \Big(F\cos\alpha - \frac{\mu}{R}\Big)s\ .$$

Potenziale totale del sistema
Una volta stabilito che tutte le sollecitazioni attive applicate hanno natura posizionale e conservativa, il potenziale del sistema viene calcolato come somma dei potenziali elastico, gravitazionale e relativo al sistema di forze applicate alla ruota $\mathbb{W}$:

$$\begin{aligned}
U(\phi,s) \,&=\, U_{\mathrm{el}} + U_{\mathrm{g}} + U_{\mathbb{W}} \,=\\
&=\, -\frac{k}{2}s^2 + Mg\sin\alpha s + mgr\cos\phi + mg\sin\alpha s + \Big(F\cos\alpha - \frac{\mu}{R}\Big)s \,=\\
&=\, -\frac{k}{2}s^2 + \Big[Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha + F\cos\alpha - \frac{\mu}{R}\Big]s + mgr\cos\phi
\end{aligned}$$

essendosi omesse tutte le costanti additive, inessenziali.

Lagrangiana
La lagrangiana del sistema è definita dalla somma dell'energia cinetica e del potenziale totale:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \,=\, T+U \,=\, &\frac{m}{2}[r^2\dot{\phi}^2 + 2r\cos(\alpha+\phi)\dot{\phi}\dot{s} + \dot{s}^2] + \frac{M}{4}\Big(3+\frac{r^2}{R^2}\Big)\dot{s}^2 - \\
&- \frac{k}{2}s^2 + \Big[Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha + F\cos\alpha - \frac{\mu}{R}\Big]s + mgr\cos\phi\ .
\end{aligned}$$

Equazioni di Lagrange
Le equazioni lagrangiane del moto si deducono dalle espressioni che compaiono nei binomi di Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \,&=\, mr^2\dot{\phi} + mr\cos(\alpha+\phi)\dot{s}\\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\Big) \,&=\, mr^2\ddot{\phi} + mr\cos(\alpha+\phi)\ddot{s} - mr\sin(\alpha+\phi)\dot{\phi}\dot{s}\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \,&=\, -mr\sin(\alpha+\phi)\dot{\phi}\dot{s} - mgr\sin\phi\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \,&=\, \Big[m + \frac{M}{2}\Big(3+\frac{r^2}{R^2}\Big)\Big]\dot{s} + mr\cos(\alpha+\phi)\dot{\phi}\\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}}\Big) \,&=\, \Big[m + \frac{M}{2}\Big(3+\frac{r^2}{R^2}\Big)\Big]\ddot{s} + mr\cos(\alpha+\phi)\ddot{\phi} - mr\sin(\alpha+\phi)\dot{\phi}^2\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \,&=\, -ks + Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha + F\cos\alpha - \frac{\mu}{R}
\end{aligned}$$

e risultano pertanto:

$$
\begin{cases}
mr^2\ddot{\phi} + mr\cos(\alpha+\phi)\ddot{s} + mgr\sin\phi \;=\; 0 \\
mr\cos(\alpha+\phi)\ddot{\phi} + \Big[m + \dfrac{M}{2}\Big(3 + \dfrac{r^2}{R^2}\Big)\Big]\ddot{s} - mr\sin(\alpha+\phi)\dot{\phi}^2 + \\
\qquad\qquad +ks - Mg\sin\alpha - mg\sin\alpha - F\cos\alpha + \dfrac{\mu}{R} \;=\; 0\;.
\end{cases}
$$

(*c*) **Condizione affinché per $\mathbf{s = L - R}$ si abbia almeno una configurazione di equilibrio**

Qualsiasi configurazione per la quale si abbia $s = L - R$ è necessariamente di confine per il sistema; la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio viene dunque espressa per mezzo del teorema dei lavori virtuali. La configurazione $(\phi, s) = (\phi_0, L - R)$, con $\phi_0 \in \mathbb{R}$, è di equilibrio se e soltanto se:

$$
U_\phi(\phi_0, L-R)\,\delta\phi + U_s(\phi_0, L-R)\,\delta s \;\le\; 0 \qquad \forall\,\delta\phi \in \mathbb{R}\;, \quad \forall\,\delta s \le 0
$$

ossia:

$$
\begin{cases}
U_\phi(\phi_0, L-R) \;=\; 0 \\
U_s(\phi_0, L-R) \;\ge\; 0\;.
\end{cases}
$$

Questo sistema assume la forma esplicita:

$$
\begin{cases}
-mgr\sin\phi_0 \;=\; 0 \\
-k(L-R) + Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha + F\cos\alpha - \dfrac{\mu}{R} \ge 0
\end{cases}
$$

dalla quale si deduce che $\phi_0 = 0, \pi$ e:

$$
L - R \;\le\; \frac{1}{k}\Big[Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha + F\cos\alpha - \frac{\mu}{R}\Big] \;=\; s^\star
$$

che è la condizione cercata.

(*d*) **Condizione affinché il sistema ammetta almeno una configurazione di equilibrio ordinaria. Determinazione degli equilibri ordinari e analisi di stabilità**

Gli equilibri ordinari $(\phi, s) = (\phi_0, s_0)$ del sistema sono individuati da:

$$
\begin{cases}
-mgr\sin\phi_0 \;=\; 0 \\
-ks_0 + Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha + F\cos\alpha - \dfrac{\mu}{R} \;=\; 0
\end{cases}
$$

a condizione che si abbia $s_0 < L - R$. Poiché chiaramente:

$$
s_0 \;=\; \frac{1}{k}\Big[Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha + F\cos\alpha - \frac{\mu}{R}\Big] \;=\; s^\star\;,
$$

la condizione affinché sia definita almeno una configurazione di equilibrio ordinaria si esprime allora nella forma:

$$s^\star < L - R \ .$$

In tal caso le configurazioni di equilibrio sono tutte ordinarie e si riducono alle due seguenti:

$$(\phi, s) \;=\; (0, s^\star) \ , \quad (\pi, s^\star) \ .$$

Per l'analisi di stabilità basta considerare le derivate seconde del potenziale:

$$\begin{aligned} U_{\phi\phi}(\phi, s) \;&=\; -mgr\cos\phi \\ U_{\phi s}(\phi, s) \;&=\; U_{s\phi}(\phi, s) \;=\; 0 \\ U_{ss}(\phi, s) \;&=\; -k \end{aligned}$$

e la corrispondente matrice hessiana:

$$H_U(\phi, s) \;=\; \begin{pmatrix} -mgr\cos\phi & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \ .$$

In $(\phi, s) = (0, s^\star)$ l'hessiana del potenziale è definita negativa:

$$H_U(0, s^\star) \;=\; \begin{pmatrix} -mgr & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

e la configurazione risulta un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet.
Per $(\phi, s) = (\pi, s^\star)$ la matrice hessiana è indefinita:

$$H_U(\pi, s^\star) \;=\; \begin{pmatrix} mgr & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

e la configurazione di equilibrio risulta instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

(*e*) **Frequenze normali delle piccole oscillazioni**
L'unica configurazione di equilibrio ordinaria stabile del sistema è $(\phi, s) = (0, s^\star)$, per $s^\star < L - R$. L'equazione per le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni intorno a tale configurazione di equilibrio si scrive allora:

$$\det[\omega^2 \mathbb{A}(0, s^\star) + H_U(0, s^\star)] \;=\; 0$$

ossia:

$$\det\left[\omega^2 \begin{pmatrix} mr^2 & mr\cos\alpha \\ mr\cos\alpha & m + \dfrac{M}{2}\Big(3 + \dfrac{r^2}{R^2}\Big) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mgr & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}\right] \;=\; 0$$

ed equivale a:

$$\det\begin{pmatrix} mr^2\omega^2 - mgr & mr\cos\alpha\,\omega^2 \\ mr\cos\alpha\,\omega^2 & \Big[m + \dfrac{M}{2}\Big(3 + \dfrac{r^2}{R^2}\Big)\Big]\omega^2 - k \end{pmatrix} \,=\, 0\ .$$

Di qui si deduce l'equazione caratteristica:

$$r^2\Big[\sin^2\alpha + \frac{M}{2m}\Big(3 + \frac{r^2}{R^2}\Big)\Big]\omega^4 - r^2\frac{k}{m}\omega^2 - gr\Big[1 + \frac{M}{2m}\Big(3 + \frac{r^2}{R^2}\Big)\Big]\omega^2 + gr\frac{k}{m} \,=\, 0$$

le cui soluzioni in ω^2:

$$\omega_\pm^2 \,=\, \frac{r^2\dfrac{k}{m} + gr\Big[1 + \dfrac{M}{2m}\Big(3 + \dfrac{r^2}{R^2}\Big)\Big] \pm \sqrt{\Delta}}{2r^2\Big[\sin^2\alpha + \dfrac{M}{2m}\Big(3 + \dfrac{r^2}{R^2}\Big)\Big]}$$

sono entrambe reali e positive, grazie al segno positivo del discriminante

$$\begin{aligned}\Delta \,=&\, \Big(r^2\frac{k}{m}\Big)^2 + g^2r^2\Big[1 + \frac{M}{2m}\Big(3 + \frac{r^2}{R^2}\Big)\Big]^2 + 2r^2\frac{k}{m}gr\Big[1 + \frac{M}{2m}\Big(3 + \frac{r^2}{R^2}\Big)\Big] - \\ &- 4r^2\frac{k}{m}gr\sin^2\alpha - 4r^2\frac{k}{m}gr\Big[1 + \frac{M}{2m}\Big(3 + \frac{r^2}{R^2}\Big)\Big] + 4r^2\frac{k}{m}gr \,= \\ =&\, \Big(r^2\frac{k}{m}\Big)^2 + g^2r^2\Big[1 + \frac{M}{2m}\Big(3 + \frac{r^2}{R^2}\Big)\Big]^2 - 2r^2\frac{k}{m}gr\Big[1 + \frac{M}{2m}\Big(3 + \frac{r^2}{R^2}\Big)\Big] + \\ &+ 4r^2\frac{k}{m}gr\cos^2\alpha \,= \\ =&\, \Big[r^2\frac{k}{m} - gr\Big[1 + \frac{M}{2m}\Big(3 + \frac{r^2}{R^2}\Big)\Big]\Big]^2 + 4gr^3\frac{k}{m}\cos^2\alpha > 0\end{aligned}$$

e alla diseguaglianza:

$$-4\,r^2\Big[\sin^2\alpha + \frac{M}{2m}\Big(3 + \frac{r^2}{R^2}\Big)\Big]\,gr\frac{k}{m} \,<\, 0\ .$$

Le frequenze normali delle piccole oscillazioni valgono pertanto:

$$\nu_\pm \,=\, \frac{1}{2\pi}\omega_\pm \,=\, \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{r^2\dfrac{k}{m} + gr\Big[1 + \dfrac{M}{2m}\Big(3 + \dfrac{r^2}{R^2}\Big)\Big] \pm \sqrt{\Delta}}{2r^2\Big[\sin^2\alpha + \dfrac{M}{2m}\Big(3 + \dfrac{r^2}{R^2}\Big)\Big]}}\ .$$