

**Esercizio 1**

Un sistema rigido con punto fisso  $O$ , privo di attrito, in una sua configurazione  $\mathbb{S}$  è sottoposto alle sollecitazioni seguenti:

- $\vec{F}_1 = -\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3$  applicata nel punto  $P_1(1, 2, 0)$ ;
- $\vec{F}_2 = -\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_2 + \hat{e}_3$  applicata in  $P_2(-1, -3, -1)$ ,

dove  $\beta$  è una costante reale.

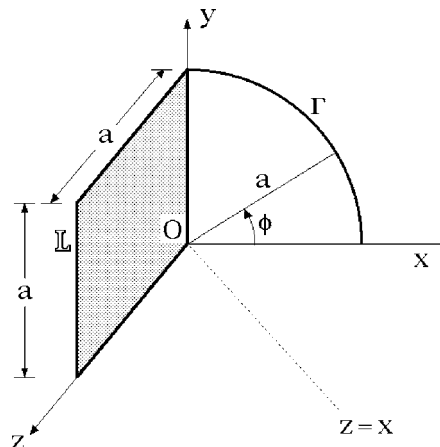
- Calcolare il valore di  $\beta$  in modo che  $\mathbb{S}$  sia un equilibrio.
- Determinare risultante e momento risultante in  $O$  delle reazioni vincolari esterne, all'equilibrio.

**Esercizio 2**

Nella terna cartesiana ortogonale  $Oxyz$  si considera un sistema rigido composto da una lamina quadrata  $\mathbb{L}$  collocata nel piano  $Oyz$  e da un arco omogeneo  $\Gamma$  ubicato in  $Oxy$ . La lamina  $\mathbb{L}$  ha lato  $a$  e la sua densità in un generico punto  $P(0, y, z)$  è data dall'espressione:

$$\sigma(P) = \frac{m}{a^4}yz, \quad y, z \in [0, a].$$

$\Gamma$  è un quarto di circonferenza di centro  $O$ , raggio  $a$  e massa  $m$ , descritto dall'angolo al centro  $\phi \in [0, \pi/2]$  — vedi figura.

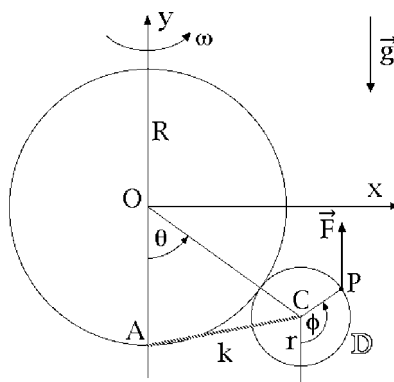


Determinare:

- la posizione del baricentro del sistema, rispetto alla terna assegnata;
- la matrice d'inerzia della lamina  $\mathbb{L}$  rispetto alla terna  $Oxyz$ ;
- il momento d'inerzia di  $\Gamma$  rispetto alla bisettrice del primo quadrante del piano  $Oxy$  —  $z = x, y = 0$ ;

### Esercizio 3

Nel piano verticale  $Oxy$  di una terna cartesiana ortogonale  $Oxyz$  un disco circolare omogeneo pesante  $\mathbb{D}$ , di massa  $m$ , raggio  $r$  e centro  $C$  rotola senza strisciare lungo il bordo esterno di una guida circolare fissa di centro  $O$  e raggio  $R$ . Una molla ideale di costante elastica  $k = mg/R$  congiunge il centro  $C$  del disco con il punto fisso  $A(-R, 0, 0)$ , mentre ad punto assegnato  $P$  sul bordo del disco è applicata una forza costante  $\vec{F} = mg \hat{e}_2$ . La terna  $Oxyz$  ruota con velocità angolare costante  $\omega$  attorno all'asse verticale  $Oy$ , relativamente ad un riferimento inerziale — non rappresentato in figura.



Nell'ipotesi di vincoli ideali, e usando gli angoli  $\theta$  e  $\phi$  mostrati in figura come coordinate lagrangiane, determinare:

- l'energia cinetica relativa a  $Oxyz$  del sistema;
- gli equilibri del sistema;
- le proprietà di stabilità degli equilibri;
- le equazioni del moto del sistema;
- un integrale primo del moto del sistema.

## Soluzione dell'esercizio 1

### (a) Condizione di equilibrio

Il sistema rigido con punto fisso  $O$  privo di attrito è un noto sistema a vincoli ideali e la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio si riduce all'annullarsi del momento risultante in  $O$  di tutte le forze attive applicate — nella configurazione data  $\mathbb{S}$  e con atto di moto nullo. La configurazione  $\mathbb{S}$  sarà dunque di equilibrio per il sistema se e soltanto se:

$$(P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 = 0$$

ossia:

$$(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) \wedge (-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3) + (-\hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 - \hat{e}_3) \wedge (-\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_2 + \hat{e}_3) = 0,$$

condizione che, eseguiti i prodotti vettore si riduce a:

$$4\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 + (-3 + \beta)\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + (-\beta - 3)\hat{e}_3 = 0$$

e quindi all'equazione:

$$(1 + \beta)\hat{e}_1 - (1 + \beta)\hat{e}_3 = 0.$$

L'equilibrio nella configurazione  $\mathbb{S}$  è quindi possibile e ricorre per il solo valore  $\beta = -1$  del parametro.

### (b) Risultante e momento risultante delle reazioni vincolari esterne

Le equazioni cardinali della statica prevedono che, all'equilibrio, risultante e momento risultante di tutte le sollecitazioni applicate al sistema, attive e di reazione vincolare, siano nulli. Risultante e momento risultante delle sollecitazioni interne sono inoltre nulli in virtù del principio di azione e reazione. Deve aversi pertanto:

$$\vec{R}^{\phi,e} = -\vec{R}^{a,e} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

$$\vec{M}_O^{\phi,e} = -\vec{M}_O^{a,e} = -(P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 - (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 = 0$$

e dunque i risultanti richiesti valgono:

$$\vec{R}^{\phi,e} = -(-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3 - \hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3) = 2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - 3\hat{e}_3.$$

## Soluzione dell'esercizio 2

### (a) Baricentro del sistema

Conviene calcolare separatamente masse e baricentri dell'arco  $\Gamma$  e della lamina  $\mathbb{L}$  per poi applicare la proprietà distributiva e ricavare il baricentro del sistema.

*Masse*

La massa dell'arco di circonferenza è per ipotesi:

$$m_\Gamma = m$$

mentre per la lamina  $\mathbb{L}$  la massa si ottiene integrando la densità sull'intera superficie:

$$m_{\mathbb{L}} = \int_0^a dy \int_0^a dz \frac{m}{a^4} yz = \frac{m}{a^4} \frac{a^2}{2} \frac{a^2}{2} = \frac{m}{4}$$

per cui la massa del sistema risulta:

$$\mu = m + \frac{m}{4} = \frac{5}{4}m.$$

*Baricentro dell'arco*

Il baricentro  $G_{\Gamma}$  di  $\Gamma$  si individua per mezzo del vettore posizione relativo alla terna  $Oxyz$ :

$$G_{\Gamma} - O = x_{\Gamma} \hat{e}_1 + y_{\Gamma} \hat{e}_2 + z_{\Gamma} \hat{e}_3$$

applicando la definizione di centro di massa e ricordando che la densità della curva omogenea si ottiene come rapporto fra la massa  $m$  e la lunghezza  $\pi a/2$ :

$$\lambda = \frac{2m}{\pi a}.$$

Si ha così che:

(i) l'ascissa  $x_{\Gamma}$  vale:

$$x_{\Gamma} = \frac{1}{m} \int_0^{\pi/2} \frac{2m}{\pi a} a \cos \phi a d\phi = \frac{2}{\pi} a \int_0^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{2a}{\pi} [\sin \phi]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} a;$$

(ii) l'ordinata  $y_{\Gamma}$  coincide con  $x_{\Gamma}$  per simmetria. La bisettrice del primo quadrante nel piano coordinato  $Oxy$  è infatti un evidente asse di simmetria dell'arco;

(iii) la quota  $z_{\Gamma}$  si annulla, per il fatto che l'arco giace nel piano  $Oxy$ .

Il vettore posizione del baricentro si scrive perciò:

$$G_{\Gamma} - O = \frac{2}{\pi} a \hat{e}_1 + \frac{2}{\pi} a \hat{e}_2.$$

*Baricentro della lamina*

Analogamente, il baricentro della lamina viene individuato per mezzo del vettore posizione:

$$G_{\mathbb{L}} - O = x_{\mathbb{L}} \hat{e}_1 + y_{\mathbb{L}} \hat{e}_2 + z_{\mathbb{L}} \hat{e}_3$$

in cui l'ascissa  $x_{\mathbb{L}}$  è ovviamente nulla per l'evidente simmetria — il piano coordinato  $Oyz$  è piano di giacitura e dunque di simmetria della lamina. L'ordinata del baricentro viene calcolata come da definizione:

$$y_{\mathbb{L}} = \frac{4}{m} \int_0^a dy \int_0^a dz \frac{m}{a^4} yz y = \frac{4}{a^4} \int_0^a y^2 dy \int_0^a z dz = \frac{2}{3} a$$

e la stessa espressione vale per la quota:

$$z_{\mathbb{L}} = \frac{4}{m} \int_0^a dy \int_0^a dz \frac{m}{a^4} yz^2 = \frac{2}{3}a,$$

in modo che il vettore posizione del baricentro diventa:

$$G_{\mathbb{L}} - O = \frac{2}{3}a \hat{e}_2 + \frac{2}{3}a \hat{e}_3.$$

### *Baricentro del sistema*

Il baricentro  $G$  del sistema viene ora calcolato per mezzo della proprietà distributiva, immaginando le masse di lamina e arco concentrate nei rispettivi baricentri e determinando il baricentro del sistema di due punti materiali così ottenuto. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_{\Gamma}(G_{\Gamma} - O) + m_{\mathbb{L}}(G_{\mathbb{L}} - O)}{m_{\Gamma} + m_{\mathbb{L}}} = \\ &= \frac{4}{5m} \left[ m \left( \frac{2}{\pi}a \hat{e}_1 + \frac{2}{\pi}a \hat{e}_2 \right) + \frac{m}{4} \left( \frac{2}{3}a \hat{e}_2 + \frac{2}{3}a \hat{e}_3 \right) \right] = \\ &= \frac{4}{5} \left[ \frac{2}{\pi}a \hat{e}_1 + \left( \frac{2}{\pi}a + \frac{a}{6} \right) \hat{e}_2 + \frac{a}{6} \hat{e}_3 \right] = \\ &= \frac{8}{5\pi}a \hat{e}_1 + \frac{4}{5} \left( \frac{2}{\pi} + \frac{1}{6} \right) a \hat{e}_2 + \frac{2}{15}a \hat{e}_3 \end{aligned}$$

che è il risultato richiesto.

### **(b) Matrice d'inerzia della lamina $\mathbb{L}$**

Siccome la lamina giace interamente nel piano coordinato  $Oyz$ , fra i momenti d'inerzia relativi agli assi coordinati sussiste la relazione generale:

$$L_{zz} = L_{xx} + L_{yy}$$

mentre i prodotti d'inerzia dipendenti dall'ascissa  $x = 0$  sono per definizione identicamente nulli:

$$L_{xy} = L_{yx} = L_{xz} = L_{zx} = 0.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse  $Oy$  si scrive:

$$L_{yy} = \int_0^a dy \int_0^a dz \frac{myz}{a^4} z^2 = \frac{m}{a^4} \int_0^a y dy \int_0^a z^3 dz = \frac{m}{a^4} \frac{a^2}{2} \frac{a^4}{4} = \frac{ma^2}{8},$$

e analogamente si calcola quello relativo all'asse  $Oz$ :

$$L_{zz} = \int_0^a dy \int_0^a dz \frac{myz}{a^4} y^2 = \frac{ma^2}{8} = L_{yy}$$

per cui il momento d'inerzia rispetto al terzo asse risulta:

$$L_{xx} = 2L_{yy} = \frac{ma^2}{4}.$$

L'unico prodotto d'inerzia non banalmente nullo vale invece:

$$L_{yz} = - \int_0^a dy \int_0^a dz \frac{myz}{a^4} yz = -\frac{m}{a^4} \int_0^a dy y^2 \int_0^a dz z^2 = -\frac{m}{a^4} \frac{a^3}{3} \frac{a^3}{3} = -\frac{ma^2}{9}.$$

Se ne conclude che la matrice d'inerzia richiesta assume la forma:

$$[L_{\mathbb{L}}] = \begin{pmatrix} ma^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & ma^2/8 & -ma^2/9 \\ 0 & -ma^2/9 & ma^2/8 \end{pmatrix} = ma^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & -1/9 \\ 0 & -1/9 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

(c) **Momento d'inerzia dell'arco  $\Gamma$  rispetto alla bisettrice  $z = x, y = 0$**

È evidente che la retta di equazione  $z = x, y = 0$ , passa per l'origine. Il momento d'inerzia dell'arco  $\Gamma$  rispetto a tale retta può quindi essere determinato partendo dalla matrice d'inerzia di  $\Gamma$  in  $Oxyz$  e dal versore associato alla stessa retta:

$$\hat{n} = n_1 \hat{e}_1 + n_2 \hat{e}_2 + n_3 \hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_3.$$

L'appartenenza dell'arco  $\Gamma$  al piano coordinato  $Oxy$  autorizza a scrivere la relativa matrice d'inerzia nella forma:

$$[L_{\Gamma}] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix}$$

sicché il momento d'inerzia rispetto alla bisettrice è dato dall'espressione:

$$\begin{aligned} I_{\Gamma}^{\text{bisettrice}} &= \hat{n} \cdot L_{\Gamma}(\hat{n}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} (L_{xx} \ L_{xy} \ L_{xx} + L_{yy}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = L_{xx} + \frac{1}{2} L_{yy}. \end{aligned}$$

Si constata che alla determinazione del risultato richiesto non concorre il prodotto d'inerzia  $L_{xy}$ , che non è pertanto necessario calcolare. Il momento d'inerzia rispetto all'asse  $Ox$  si ricava per mezzo della definizione, calcolando un integrale curvilineo:

$$\begin{aligned} L_{xx} &= \int_0^{\pi/2} \frac{2m}{\pi a} (y^2 + z^2) a \, d\phi = \frac{2m}{\pi} \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 \phi \, d\phi = \\ &= \frac{2ma^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} \, d\phi = \frac{ma^2}{\pi} \left[ \phi - \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{ma^2}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{ma^2}{2} \end{aligned}$$

e in modo analogo si perviene all'espressione del momento d'inerzia relativo all'asse coordinato  $Oy$ :

$$L_{yy} = \int_0^{\pi/2} \frac{2m}{\pi a} (x^2 + z^2) a d\phi = \frac{2m}{\pi} \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 \phi d\phi = \frac{ma^2}{2} = L_{xx}.$$

Il momento d'inerzia dell'arco rispetto alla bisettrice diventa così:

$$I_{\Gamma}^{\text{bisettrice}} = \frac{3}{2} L_{xx} = \frac{3}{2} \frac{ma^2}{2} = \frac{3}{4} ma^2.$$

### Soluzione dell'esercizio 3

#### (a) Energia cinetica

Il disco omogeneo  $\mathbb{D}$  non presenta punti fissi e la sua energia cinetica viene determinata usando il teorema di König. Il baricentro del disco coincide con il suo centro geometrico:

$$C - O = (R + r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R + r) \cos \theta \hat{e}_2$$

e la sua velocità istantanea, relativa alla terna  $Oxyz$  si scrive:

$$\dot{C} = (R + r)(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \dot{\theta}.$$

D'altra parte, l'angolo  $\phi$  descrive la rotazione del disco attorno al proprio asse  $Cz$ , e quale angolo compreso fra una direzione fissata nella terna assoluta — la verticale condotta da  $C$  verso il basso — e la direzione  $CP$  assegnata sul disco stesso, consente di esprimere la velocità angolare istantanea di  $\mathbb{D}$  nella forma:

$$\vec{\omega}_{\mathbb{D}} = \dot{\phi} \hat{e}_3$$

in cui si è tenuto conto della usuale regola della mano destra. Il teorema di König porge pertanto:

$$T = \frac{m}{2} \dot{C}^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} |\vec{\omega}_{\mathbb{D}}|^2 = \frac{m}{2} (R + r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} |\dot{\phi} \hat{e}_3|^2$$

e conduce al risultato richiesto:

$$T = \frac{m}{2} (R + r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{mr^2}{4} \dot{\phi}^2.$$

#### (b) Equilibri del sistema

Si osserva in primo luogo che la terna  $Oxyz$  costituisce un riferimento non inerziale ed è perciò sede di forze fittizie, centrifughe e di Coriolis. Le sollecitazioni di Coriolis, essendo applicate ai punti del disco nel piano fissato  $Oxy$ , contenente l'asse di rotazione  $Oy$ , risultano ortogonali al piano del moto e le loro componenti lagrangiane sono identicamente nulle. Tutte le altre sollecitazioni attive hanno natura posizionale e conservativa, e vengono descritte per mezzo dei rispettivi potenziali.

### Potenziale elastico

La molla ideale di costante elastica  $k = mg/R$  dà luogo ad una interazione elastica fra i punti  $C$  ed  $A$ , che sono individuati dai vettori posizione:

$$C - O = (R + r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R + r) \cos \theta \hat{e}_2 \quad A - O = -R \hat{e}_2 .$$

Si ha pertanto:

$$C - A = (R + r) \sin \theta \hat{e}_1 + [R - (R + r) \cos \theta] \hat{e}_2$$

ed il relativo potenziale elastico diventa:

$$\begin{aligned} U_{\text{el}} &= -\frac{k}{2}(C - A)^2 = \\ &= -\frac{mg}{2R} [(R + r)^2 \sin^2 \theta + R^2 - 2R(R + r) \cos \theta + (R + r)^2 \cos^2 \theta] = \\ &= mg(R + r) \cos \theta + \text{costante} . \end{aligned}$$

### Potenziale gravitazionale

Il potenziale gravitazionale del disco si calcola direttamente applicando l'espressione generale:

$$U_g = -mg(C - O) \cdot \hat{e}_2 = mg(R + r) \cos \theta .$$

### Potenziale centrifugo

Anche per il potenziale centrifugo il calcolo è immediato, come da definizione:

$$\begin{aligned} U_{\text{cf}} &= \frac{\omega^2}{2} I_{Oy} = \frac{\omega^2}{2} [I_{Cy} + m[(C - O) \cdot \hat{e}_1]^2] = \\ &= \frac{\omega^2}{2} \left[ \frac{mr^2}{4} + m(R + r)^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{m\omega^2}{2} (R + r)^2 \sin^2 \theta + \text{costante} \end{aligned}$$

ed omettendo le costanti additive inessenziali il risultato si scrive:

$$U_{\text{cf}} = \frac{m\omega^2}{2} (R + r)^2 \sin^2 \theta .$$

### Potenziale della forza costante

Alla forza costante  $\vec{F} = mg \hat{e}_2$  applicata in  $P$  si associa il potenziale:

$$U_F = \vec{F} \cdot (P - O) = mg \hat{e}_2 \cdot (P - O)$$

in cui vale:

$$P - O = C - O + P - C = (R + r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R + r) \cos \theta \hat{e}_2 + r \sin \phi \hat{e}_1 - r \cos \phi \hat{e}_2 .$$

Perciò:

$$U_F = -mg(R + r) \cos \theta - mgr \cos \phi .$$

### Potenziale del sistema

Il potenziale del sistema è la somma dei potenziali parziali delle singole sollecitazioni:

$$U = U_{el} + U_g + U_{cf} + U_F = mg(R+r)\cos\theta + \frac{m\omega^2}{2}(R+r)^2\sin^2\theta - mgr\cos\phi$$

e risulta definito  $\forall (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$ .

### Equilibri

Trattandosi di sistema scleronomo posizionale e conservativo, a vincoli bilaterali e ideali, le configurazioni di equilibrio sono tutti e soli i punti critici del potenziale  $U$ . Poiché le componenti del gradiente di  $U$  si scrivono:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = U_\theta = -mg(R+r)\sin\theta + m\omega^2(R+r)^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = U_\phi = mgr\sin\phi$$

gli equilibri si ottengono risolvendo il sistema di equazioni trigonometriche:

$$\begin{cases} m\omega^2(R+r)^2\sin\theta\left[-\frac{g}{\omega^2(R+r)} + \cos\theta\right] = 0 \\ mgr\sin\phi = 0 \end{cases}$$

che equivale a:

$$\begin{cases} \sin\theta\left[-\frac{g}{\omega^2(R+r)} + \cos\theta\right] = 0 \\ \sin\phi = 0. \end{cases}$$

Il sistema ottenuto si disaccoppia in due equazioni distinte, l'una nella sola incognita  $\theta$  e l'altra nella sola variabile  $\phi$ . La prima equazione è soddisfatta per  $\sin\theta = 0$ , ovvero per:

$$-\frac{g}{\omega^2(R+r)} + \cos\theta = 0.$$

Nel primo caso si hanno le radici  $\theta = 0, \pi$ , sempre definite, mentre dal secondo risultano le radici distinte

$$\theta = \pm\theta^* = \pm\arccos\lambda$$

a patto che si ponga, per brevità,  $\lambda = g/\omega^2(R+r) > 0$  e si abbia  $\lambda < 1$ . La seconda delle equazioni del sistema porge invece  $\phi = 0, \pi$ . Le configurazioni di equilibrio sono quindi individuate da tutte le possibili combinazioni dei valori di  $\theta$  e  $\phi$  ottenuti, vale a dire dai punti critici:

$$(\theta, \phi) = (0, 0), \quad (0, \pi), \quad (\pi, 0), \quad (\pi, \pi),$$

che sono definiti per qualsiasi scelta delle costanti caratteristiche del sistema, e da:

$$(\theta, \phi) = (\theta^*, 0), \quad (\theta^*, \pi), \quad (-\theta^*, 0), \quad (-\theta^*, \pi)$$

definiti se e soltanto se  $\lambda < 1$ , con  $\theta^* = \arccos \lambda$ .

**(c) Stabilità degli equilibri**

Il sistema è posizionale e conservativo, per cui la stabilità degli equilibri può essere studiata ricorrendo ai teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo, conviene ricavare preliminarmente le derivate parziali seconde del potenziale:

$$\begin{cases} U_{\theta\theta} = -mg(R+r)\cos\theta + m\omega^2(R+r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ U_{\theta\phi} = U_{\phi\theta} = 0 \\ U_{\phi\phi} = mgr\cos\phi \end{cases}$$

e la relativa matrice hessiana, che risulta diagonale:

$$H_U(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} m\omega^2(R+r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta - \lambda\cos\theta) & 0 \\ 0 & mgr\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Per  $\phi = 0$  si ha  $U_{\phi\phi}(\theta, 0) = mgr > 0$  e tutte le configurazioni con tale valore della coordinata lagrangiana  $\phi$  risultano instabili per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Nel caso di  $\phi = \pi$  è  $U_{\phi\phi}(\theta, \pi) = -mgr < 0$  e le proprietà di stabilità o instabilità dell'equilibrio dipendono unicamente dal segno di  $U_{\theta\theta}(\theta, \pi)$ .

**Configurazione**  $(\theta, \phi) = (0, \pi)$

Si ha:

$$U_{\theta\theta}(0, \pi) = m\omega^2(R+r)^2(1 - \lambda)$$

e debbono perciò distinguersi tre casi:

- (i) se  $\lambda > 1$  risulta  $U_{\theta\theta}(0, \pi) < 0$  e la configurazione  $(\theta, \phi) = (0, \pi)$  si riconosce essere un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet;
- (ii) per  $\lambda < 1$  si ha invece  $U_{\theta\theta}(0, \pi) > 0$  e la configurazione è instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- (iii) se infine  $\lambda = 1$  ricorre un caso critico, avendosi  $U_{\theta\theta}(0, \pi) = 0$  e risultando perciò l'hessiana soltanto semidefinita non definita negativa. In questo caso la sola speranza di trarre in modo semplice una qualche conclusione circa la stabilità o instabilità della configurazione è quella di accertare la presenza in  $(\theta, \phi) = (0, \pi)$  un massimo relativo proprio del potenziale  $U$ , così da poter applicare ugualmente il teorema di Lagrange-Dirichlet e provare la stabilità. Vale in effetti:

$$\begin{aligned} U(\theta, \phi) &= m\omega^2(R+r)^2 \left[ \frac{1}{2}\sin^2\theta + \lambda\cos\theta \right] - mgr\cos\phi = \\ &= m\omega^2(R+r)^2 \left[ \frac{1}{2}\sin^2\theta + \cos\theta \right] - mgr\cos\phi = \\ &= m\omega^2(R+r)^2 \left[ 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - mgr\cos\phi = \\ &= m\omega^2(R+r)^2 \left[ 1 - 2\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - mgr\cos\phi \end{aligned}$$

e da tale espressione si deduce che  $(\theta, \phi) = (0, \pi)$  è un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet.

**Configurazione**  $(\theta, \phi) = (\pi, \pi)$

In questo caso la derivata seconda in  $\theta$  del potenziale si scrive:

$$U_{\theta\theta}(\pi, \pi) = m\omega^2(R+r)^2(1+\lambda) > 0$$

ed implica l'instabilità della configurazione per il teorema di inversione parziale.

**Configurazioni**  $(\theta, \phi) = (\theta^*, \pi), (-\theta^*, \pi)$

Le proprietà di stabilità di queste configurazioni sono identiche per via della simmetria del potenziale:

$$U(\theta, \phi) = U(-\theta, -\phi) \quad \forall (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$$

e possono quindi essere studiate per una sola delle due configurazioni. La derivata seconda rispetto a  $\theta$  assume la forma:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta}(\theta^*, \pi) &= m\omega^2(R+r)^2(\cos^2\theta^* - \sin^2\theta^* - \lambda \cos \theta^*) = \\ &= m\omega^2(R+r)^2(\cos^2\theta^* - \sin^2\theta^* - \cos^2\theta^*) = -m\omega^2(R+r)^2\sin^2\theta^* < 0. \end{aligned}$$

Quando definite, le configurazioni di equilibrio  $(\theta, \phi) = (\pm\theta^*, \pi)$  costituiscono perciò dei massimi relativi propri del potenziale e la loro stabilità si riconosce grazie al teorema di Lagrange-Dirichlet.

**(d) Equazioni del moto**

Il sistema è olonomo e a vincoli bilaterali ideali, a due gradi di libertà. Le equazioni del moto sono quindi quelle di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

con lagrangiana:

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{m}{2}(R+r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{mr^2}{4}\dot{\phi}^2 + mg(R+r)\cos\theta + \frac{m\omega^2}{2}(R+r)^2\sin^2\theta - mgr\cos\phi$$

dalla quale si deducono le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= m(R+r)^2\dot{\theta} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m(R+r)^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -mg(R+r)\sin\theta + m\omega^2(R+r)^2\sin\theta\cos\theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{mr^2}{2}\dot{\phi} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{mr^2}{2}\ddot{\phi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= mgr\sin\phi \end{aligned}$$

e le relative equazioni di Lagrange:

$$\begin{cases} m(R+r)^2\ddot{\theta} + mg(R+r)\sin\theta - m\omega^2(R+r)^2\sin\theta\cos\theta = 0 \\ \frac{mr^2}{2}\ddot{\phi} - mgr\sin\phi = 0. \end{cases}$$

Si noti che le equazioni del moto sono disaccoppiate, la prima descrivendo l'evoluzione nel tempo del solo parametro  $\theta$  e la seconda relativamente al solo parametro  $\phi$ .

**(e) Un integrale primo del moto**

Il sistema è scleronomo e soggetto esclusivamente a sollecitazioni posizionali e conservative. Un ovvio integrale primo è perciò costituito dall'energia meccanica  $H = T - U$ :

$$H(\theta, \phi) = \frac{m}{2}(R+r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{mr^2}{4}\dot{\phi}^2 - mg(R+r)\cos\theta - \frac{m\omega^2}{2}(R+r)^2\sin^2\theta + mgr\cos\phi.$$

Si osservi che l'energia meccanica può esprimersi come somma di due contributi relativi, separatamente, alla sola coordinata  $\theta$  e alla sola coordinata  $\phi$ :

$$H(\theta, \phi) = \frac{m}{2}(R+r)^2\dot{\theta}^2 - mg(R+r)\cos\theta - \frac{m\omega^2}{2}(R+r)^2\sin^2\theta + \frac{mr^2}{4}\dot{\phi}^2 + mgr\cos\phi$$

per cui, essendo disaccoppiate le relative equazioni di Lagrange, risultano conservate separatamente le espressioni:

$$H_1(\theta) = \frac{m}{2}(R+r)^2\dot{\theta}^2 - mg(R+r)\cos\theta - \frac{m\omega^2}{2}(R+r)^2\sin^2\theta$$

e:

$$H_2(\phi) = \frac{mr^2}{4}\dot{\phi}^2 + mgr\cos\phi,$$

interpretabili come energie meccaniche del moto in  $\theta$  ed in  $\phi$  rispettivamente.