

Esercizio 1

Nella terna di riferimento inerziale $Oxyz$, con asse Oy verticale, si considera un punto materiale P di massa m vincolato a rimanere sulla circonferenza liscia di equazione $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$. Il punto materiale è pesante e soggetto alla sollecitazione $\vec{F} = \alpha mgx/R \hat{e}_1$, con $|\alpha| > 1$. Assumendo come parametro l'angolo θ mostrato in figura, determinare:

- (a) le equazioni del moto del sistema;
- (b) un integrale primo del sistema;
- (c) tutte e sole le condizioni iniziali corrispondenti a moti periodici del sistema;
- (d) tutte e sole le condizioni iniziali per le quali si hanno moti a meta asintotica del sistema (nel passato o nel futuro).

Esercizio 2

In una terna $Oxyz$, rotante con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale Oy rispetto ad un riferimento inerziale, si considera un sistema pesante costituito da un semidisco circolare rigido omogeneo \mathbb{D} , di centro O , raggio R e massa M , e da due punti materiali A e P di uguale massa m . \mathbb{D} ruota nel piano Oxy attorno all'asse Oz , mentre il punto P è vincolato a scorrere lungo l'asse Oy e A è rigidamente fissato al punto medio della semicirconferenza che delimita \mathbb{D} . Una molla ideale di costante elastica $k = \gamma m \omega^2$, $\gamma > 1$, congiunge inoltre i punti A e P . I vincoli si assumono ideali.

Posto $P - O = -sR \hat{e}_2$ e scelti i parametri θ, s in figura come coordinate lagrangiane:

- (a) determinare l'energia cinetica relativa a $Oxyz$ del sistema;
- (b) scrivere le equazioni lagrangiane del moto del sistema;
- (c) individuare le configurazioni di equilibrio del sistema, analizzandone la stabilità;
- (d) ricavare, per un equilibrio a scelta, le reazioni vincolari applicate al semidisco in O ed al punto materiale P ;
- (e) individuare le configurazioni di equilibrio, studiandone la stabilità, nell'ipotesi che su P agisca una forza $\vec{F} = -\beta |\dot{P}| \dot{P}$, essendo \dot{P} la velocità di P relativa ad $Oxyz$ e β una costante positiva.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) **Equazioni del moto del sistema**

In termini dell'angolo θ la circonferenza vincolare è descritta per mezzo della parametrizzazione regolare C^∞

$$x = R \sin \theta \quad y = -R \cos \theta \quad z = 0, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

in modo che il vettore posizione del punto materiale P si scrive

$$P - O = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 + z \hat{e}_3 = R(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2).$$

Si hanno allora le ovvie relazioni

$$\frac{dP}{d\theta} = R(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \quad \left| \frac{dP}{d\theta} \right| = R$$

e quindi l'espressione del versore tangente alla circonferenza in P

$$\hat{\tau} = \left| \frac{dP}{d\theta} \right|^{-1} \frac{dP}{d\theta} = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2 .$$

La velocità istantanea del punto P si scrive, di conseguenza,

$$\dot{P} = R\dot{\theta} \hat{\tau}$$

mentre per l'accelerazione istantanea si ha

$$\ddot{P} = R\ddot{\theta} \hat{\tau} + R\dot{\theta}^2 \frac{d\hat{\tau}}{d\theta} = R\ddot{\theta} \hat{\tau} + R\dot{\theta}^2 (-\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2) = R\ddot{\theta} \hat{\tau} + R\dot{\theta}^2 \hat{n}$$

e la seconda legge della dinamica diventa

$$m\ddot{P} = \vec{\psi} - mg \hat{e}_2 + \vec{F}$$

essendo $\vec{\psi}$ la reazione vincolare esercitata su P dalla guida circolare liscia. Detta reazione vincolare viene rimossa proiettando l'equazione precedente lungo il versore tangente alla circonferenza in P :

$$m\ddot{P} \cdot \hat{\tau} = \vec{\psi} \cdot \hat{\tau} - mg \hat{e}_2 \cdot \hat{\tau} + \vec{F} \cdot \hat{\tau} = -mg \hat{e}_2 \cdot \hat{\tau} + \vec{F} \cdot \hat{\tau}$$

in forza della condizione $\vec{\psi} \cdot \hat{\tau} = 0$ (la curva è liscia e costituisce quindi un vincolo ideale). Si ha così

$$\begin{aligned} mR\ddot{\theta} &= \left(-mg \hat{e}_2 + \alpha mg \frac{x}{R} \hat{e}_1 \right) \cdot (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) = \\ &= \alpha mg \frac{x}{R} \cos \theta - mg \sin \theta = \alpha mg \sin \theta \cos \theta - mg \sin \theta \end{aligned}$$

ossia

$$mR\ddot{\theta} = \alpha mg \sin \theta \cos \theta - mg \sin \theta .$$

che è l'equazione del moto cercata.

(b) **Integrale primo**

L'equazione del moto di cui al punto precedente equivale a

$$mR^2 \ddot{\theta} = \alpha mgR \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta$$

per cui, moltiplicando membro a membro per $\dot{\theta}$ si perviene all'equazione

$$mR^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = \alpha mgR \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} - mgR \sin \theta \dot{\theta}$$

che può risciversi nella forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha}{2} mgR \sin^2 \theta + mgR \cos \theta \right)$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2} - \frac{\alpha}{2} mgR \sin^2 \theta - mgR \cos \theta \right) = 0 .$$

Dal momento che la relazione precedente è soddisfatta per qualsivoglia soluzione $\theta(t)$ dell'equazione del moto, si conclude che la funzione C^∞

$$H(\theta, \dot{\theta}) = \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2} - \frac{\alpha}{2} mgR \sin^2 \theta - mgR \cos \theta$$

è un integrale primo del sistema. Esso è identificabile con l'energia meccanica, in quanto

$$T = \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2} = \frac{m}{2} |\dot{P}|^2$$

è l'energia cinetica del punto P , mentre

$$\frac{\alpha}{2} mgR \sin^2 \theta + mgR \cos \theta = \alpha mg \frac{R^2 \sin^2 \theta}{2R} - mg(-R \cos \theta) = \alpha mg \frac{x^2}{2R} - mgy$$

coincide con il potenziale totale delle sollecitazioni posizionali conservative $\alpha mgx/R \hat{e}_1$ e $-mgy \hat{e}_2$ rispettivamente.

(c) Condizioni iniziali corrispondenti ai moti periodici del sistema

L'esistenza dell'integrale primo H consente di fare uso della discussione di Weierstrass nello studio delle soluzioni e del loro comportamento qualitativo. L'energia potenziale del sistema è data dalla relazione

$$W(\theta) = -U(\theta) = -\frac{\alpha}{2} mgR \sin^2 \theta - mgR \cos \theta$$

ed è una funzione di classe C^∞ su tutta la retta reale, con derivata

$$W'(\theta) = -\alpha mgR \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta .$$

Le configurazioni di equilibrio del sistema sono tutti e soli i punti critici del potenziale, ovvero dell'energia potenziale, e si ottengono quindi risolvendo l'equazione trigonometrica

$$-\alpha mgR \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta = 0$$

nella quale è conveniente raccogliere il fattore comune $\sin \theta$ e semplificare i fattori costanti inessenziali

$$(-\alpha \cos \theta + 1) \sin \theta = 0 .$$

Per $\sin \theta = 0$ si ottengono, a meno di multipli interi di 2π , le configurazioni di equilibrio

$$\theta = 0, \pi ,$$

mentre $\cos \theta = 1/\alpha$ implica le ulteriori soluzioni

$$\theta = \pm \arccos(1/\alpha) = \pm \theta^*$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia $|1/\alpha| < 1$, ossia $|\alpha| > 1$, come esplicitamente assunto. Per poter applicare i teoremi di Weierstrass è necessario stabilire la natura dei punti critici appena determinati, nonché calcolare il valore dell'energia potenziale in ognuno di essi.

La derivata seconda di W si scrive

$$W''(\theta) = -\alpha mgR (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta$$

e deve essere calcolata in tutte le configurazioni di equilibrio:

per $\theta = 0$ si ha

$$W''(0) = -\alpha mgR + mgR = mgR(-\alpha + 1) \begin{cases} < 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ > 0 & \text{se } \alpha < -1 \end{cases}$$

in modo che la configurazione risulta un massimo relativo proprio di W per $\alpha > 1$ ed un minimo relativo proprio per $\alpha < -1$;

per $\theta = \pi$ vale invece

$$W''(\pi) = -\alpha mgR - mgR = mgR(-\alpha - 1) \begin{cases} < 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ > 0 & \text{se } \alpha < -1 \end{cases}$$

e si perviene alla conclusione che $\theta = \pi$ è un massimo relativo proprio di W se $\alpha > 1$ ed un minimo se $\alpha < -1$;

per $\theta = \pm \theta^* = \pm \arccos(1/\alpha)$ l'espressione della derivata seconda diventa infine

$$\begin{aligned} W''(\pm \theta^*) &= -\alpha mgR (2\cos^2 \theta^* - 1) + mgR \cos \theta^* = -\alpha mgR \left(\frac{2}{\alpha^2} - 1 \right) + mgR \frac{1}{\alpha} = \\ &= mgR \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) = mgR (\alpha^2 - 1) \frac{1}{\alpha} \begin{cases} > 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ < 0 & \text{se } \alpha < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

ed entrambe le configurazioni risultano minimi relativi propri dell'energia potenziale nell'ipotesi che sia $\alpha > 1$, mentre sono entrambi dei massimi relativi propri se al contrario $\alpha < -1$.

Inoltre

$$W(0) = -mgR \quad W(\pi) = mgR$$

e

$$\begin{aligned}
 W(\pm\theta^*) &= -\frac{\alpha}{2}mgR(1 - \cos^2\theta^*) - mgR \cos\theta^* = mgR\left[-\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) - \frac{1}{\alpha}\right] = \\
 &= -\frac{mgR}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{mgR}{2} \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \begin{cases} < -mgR & \text{se } \alpha > 1 \\ > +mgR & \text{se } \alpha < -1 . \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dai risultati precedenti si conclude che il grafico dell'energia potenziale ha l'andamento illustrato nelle figure seguenti:

grafico dell'energia potenziale per $\alpha > 1$

grafico dell'energia potenziale per $\alpha < -1$

L'esame di tali grafici consente di individuare le condizioni iniziali per le quali si hanno moti periodici del sistema nella forma

$$\begin{aligned}
 &\left\{(\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{mgR}{2} \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} < H(\theta_0, \dot{\theta}_0) < -mgR\right\} \cup \\
 &\cup \left\{(\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2 : -mgR < H(\theta_0, \dot{\theta}_0) < mgR\right\}
 \end{aligned}$$

per $\alpha > 1$ e

$$\left\{(\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2 : -mgR < H(\theta_0, \dot{\theta}_0) < -\frac{mgR}{2} \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right\} \setminus \{(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (\pi + 2\pi n, 0), n \in \mathbb{Z}\}$$

qualora sia $\alpha < -1$.

(d) Condizioni iniziali corrispondenti ai moti a meta asintotica del sistema

Le condizioni iniziali corrispondenti a moti a meta asintotica (nel passato o nel futuro) si ricavano applicando i teoremi di Weierstrass e tenendo conto del grafico di W . Per $\alpha > 1$ i moti a meta asintotica si hanno per tutte le condizioni iniziali prese nell'insieme

$$\begin{aligned}
 &\{(\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2 : H(\theta_0, \dot{\theta}_0) = -mgR, \dot{\theta}_0 \neq 0\} \cup \\
 &\cup \{(\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2 : H(\theta_0, \dot{\theta}_0) = +mgR, \dot{\theta}_0 \neq 0\}
 \end{aligned}$$

mentre nel caso di $\alpha < -1$ dette condizioni iniziali sono tutti e soli i punti di

$$\left\{(\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2 : H(\theta_0, \dot{\theta}_0) = -\frac{mgR}{2} \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}, \dot{\theta}_0 \neq 0\right\} .$$

Soluzione dell'esercizio 2

È opportuno procedere preliminarmente alla determinazione della matrice d'inerzia del semidisco omogeneo rispetto ad una terna di riferimento solidale $Ox'y'z'$, che si converrà di scegliere con origine in O , asse Oy' parallelo e concorde a $O - A$, asse Oz' ortogonale al piano del semidisco ed asse Ox' diretto secondo il diametro dello stesso. Tale matrice d'inerzia di indicherà con

$$L' = \begin{pmatrix} L_{x'x'} & L_{x'y'} & L_{x'z'} \\ L_{y'x'} & L_{y'y'} & L_{y'z'} \\ L_{z'x'} & L_{z'y'} & L_{z'z'} \end{pmatrix} .$$

Il momento d'inerzia rispetto ad Oz' è uguale alla metà del corrispondente momento d'inerzia, relativo allo stesso asse, di un disco circolare completo di pari raggio R e densità $2M/\pi R^2$ (ovvero di massa doppia $2M$)

$$L_{z'z'} = \frac{1}{2} \frac{2MR^2}{2} = \frac{MR^2}{2} ;$$

poiché inoltre il piano coordinato $Ox'y'$ coincide con quello di giacitura della figura, vale la relazione generale

$$L_{z'z'} = L_{x'x'} + L_{y'y'}$$

nella quale per simmetria $L_{x'x'} = L_{y'y'}$ e dunque

$$L_{x'x'} = L_{y'y'} = \frac{1}{2} L_{z'z'} = \frac{MR^2}{4} .$$

Allo stesso risultato si può pervenire, naturalmente, mediante integrazione diretta in coordinate polari piane (ρ, ϕ) (vedi figura):

$$L_{x'x'} = \int_{[0,R]_{\rho} \times [0,\pi]_{\phi}} \rho^2 \sin^2 \phi \frac{2M}{\pi R^2} \rho \, d\rho d\phi = \frac{2M}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} \, d\phi = \frac{MR^2}{4}$$

$$L_{y'y'} = \int_{[0,R]_{\rho} \times [0,\pi]_{\phi}} \rho^2 \cos^2 \phi \frac{2M}{\pi R^2} \rho \, d\rho d\phi = \frac{2M}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2\phi}{2} \, d\phi = \frac{MR^2}{4} .$$

I prodotti d'inerzia relativi agli assi $x'z'$ e $y'z'$ sono nulli

$$L_{x'z'} = L_{z'x'} = L_{y'z'} = L_{z'y'} = 0$$

in quanto per ogni punto del semidisco risulta $z' = 0$; infine $L_{x'y'} = L_{y'x'} = 0$ per la presenza del piano di simmetria $Oy'z'$. Si conclude quindi che $Ox'y'z'$ è una terna principale d'inerzia per il semidisco, con matrice d'inerzia

$$L' = \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{pmatrix}$$

e Oz' asse giroscopico.

(a) **Energia cinetica relativa a $Oxyz$**

L'energia cinetica del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche del semidisco \mathbb{D} e dei punti materiali A e P .

Nella terna $Oxyz$ il semidisco costituisce un sistema rigido con asse fisso Oz e la sua velocità angolare si scrive come $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3$, l'angolo θ essendo compreso fra la il semiasse Oy negativo (fisso rispetto alla terna considerata) ed il raggio OA (fissato sul semidisco rigido). Per l'energia cinetica del semidisco vale quindi l'espressione

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{1}{2} I_{Oz}^{\mathbb{D}} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} L_{z'z'} \dot{\theta}^2 = \frac{MR^2}{4} \dot{\theta}^2 .$$

Il vettore posizione rispetto all'origine O e la velocità relativa ad $Oxyz$ del punto materiale A si ottengono immediatamente con semplici relazioni trigonometriche e derivando rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} A - O &= R \sin \theta \hat{e}_1 - R \cos \theta \hat{e}_2 \\ \dot{A} &= (R \cos \theta \hat{e}_1 + R \sin \theta \hat{e}_2) \dot{\theta} \end{aligned}$$

in modo che la corrispondente energia cinetica risulta

$$T_A = \frac{m}{2} |\dot{A}|^2 = \frac{mR^2}{2} \dot{\theta}^2 .$$

Per il punto P si procede in maniera del tutto analoga, notando preliminarmente che

$$P - O = -Rs \hat{e}_2 \quad \text{e} \quad \dot{P} = -R\dot{s} \hat{e}_2$$

e che di conseguenza

$$T_P = \frac{m}{2} |\dot{P}|^2 = \frac{mR^2}{2} \dot{s}^2 .$$

L'energia cinetica del sistema rispetto alla terna $Oxyz$ diventa pertanto

$$T = T_{\mathbb{D}} + T_A + T_P = \frac{MR^2}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{2} \dot{s}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2} + m \right) R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{2} \dot{s}^2 ,$$

forma quadratica definita positiva delle velocità generalizzate $\dot{\theta}, \dot{s}$.

(b) **Equazioni lagrangiane del moto del sistema**

Poiché l'energia cinetica è già stata determinata, si tratta di calcolare il potenziale totale del sistema, osservando che tutte le sollecitazioni applicate hanno natura posizionale conservativa: le forze peso applicate al semidisco ed ai punti A, P , le forze di interazione elastica dovute alla molla ideale tesa fra A e P , quelle centrifughe agenti su tutti i punti del semidisco e su A (il punto P ne è esente in quanto collocato sull'asse di rotazione Oy). Accanto alle forze centrifughe, che agiscono sul sistema perché la terna $Oxyz$ non è inerziale, sono presenti anche quelle di Coriolis. In ogni punto Q del sistema le forze di Coriolis sono ortogonali al piano coordinato Oxy , mentre le derivate parziali del punto di

applicazione rispetto ai parametri lagrangiani, $\partial Q/\partial\theta$ e $\partial Q/\partial s$, sono comunque parallele a tale piano. Ne segue che le componenti lagrangiane D_θ, D_s delle sollecitazioni di Coriolis consistono in somme di contributi costantemente nulli, e sono nulle a loro volta:

$$D_\theta = \sum_Q -2\omega \hat{e}_2 \wedge \dot{Q} m_Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial \theta} = \sum_Q 0 = 0$$

$$D_s = \sum_Q -2\omega \hat{e}_2 \wedge \dot{Q} m_Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial s} = \sum_Q 0 = 0 .$$

Allo scopo di determinare il potenziale totale, conviene individuare separatamente i contributi delle singole sollecitazioni e ricavare quindi il potenziale richiesto come somma dei contributi parziali.

◦ **Potenziale gravitazionale del semidisco**

La presenza dell'asse OA , di simmetria per il semidisco, unitamente al fatto che il semidisco è una figura convessa, implica che il baricentro G di \mathbb{D} debba necessariamente appartenere al segmento $[O, A]$, intersezione fra l'asse di simmetria e l'involuppo convesso della figura piana. Rispetto alla terna di riferimento solidale $Ox'y'z'$, già introdotta in precedenza, il calcolo della posizione di G si riduce quindi alla determinazione della sola componente $(G-O) \cdot \hat{e}'_2$, le altre due risultando entrambe nulle per simmetria. Non è possibile evitare il calcolo esplicito della componente incognita mediante integrazione diretta, che peraltro non comporta difficoltà particolari se condotto nelle coordinate polari piane (ρ, θ) già utilizzate:

$$(G-O) \cdot \hat{e}'_2 = \frac{1}{M} \int_{[0,R]_\rho \times [0,\pi]_\phi} (-\rho \sin \phi) \frac{2M}{\pi R^2} \rho d\rho d\theta = -\frac{2}{\pi R^2} \int_{[0,R]_\rho \times [0,\pi]_\phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi =$$

$$= -\frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin \phi d\phi = -\frac{2}{\pi R^2} \frac{R^3}{3} [-\cos \phi]_0^\pi = -\frac{4}{3\pi} R .$$

Ne segue, in particolare, che la distanza fra l'origine ed il baricentro del semidisco è data da $|G-O| = (4/3\pi)R$. Pertanto il potenziale gravitazionale del semidisco assume la forma

$$U_G^{\mathbb{D}} = -Mg(-|G-O| \cos \theta) = Mg|G-O| \cos \theta = Mg \frac{4}{3\pi} R \cos \theta = \frac{4}{3\pi} MgR \cos \theta .$$

◦ **Potenziale gravitazionale del punto A**

Si deduce immediatamente dall'espressione generale, sostituendo la componente lungo Oy del vettore posizione $A-O$:

$$U_g^A = -mg(A-O) \cdot \hat{e}_2 = -mg(-R \cos \theta) = mgR \cos \theta .$$

◦ **Potenziale gravitazionale del punto P**

Poiché, per definizione di s , $P-O = -Rs \hat{e}_2$, si ha

$$U_g^P = -mg(P-O) \cdot \hat{e}_2 = -mg(-Rs) = mgRs .$$

◦ **Potenziale elastico della molla AP**

Dalle relazioni geometriche

$$A - O = R \sin \theta \hat{e}_1 - R \cos \theta \hat{e}_2 \quad P - O = -Rs \hat{e}_2$$

si deduce

$$A - P = R \sin \theta \hat{e}_1 + R(s - \cos \theta) \hat{e}_2$$

e quindi l'espressione del potenziale elastico di interazione fra i punti A e P :

$$U_{el} = -\frac{k}{2}|A - P|^2 = -\frac{k}{2}[R^2 \sin^2 \theta + R^2(s - \cos \theta)^2] = -\frac{k}{2}R^2(1 + s^2 - 2s \cos \theta),$$

dove per definizione $k = \gamma m \omega^2$, con $\gamma > 1$. L'omissione delle costanti additive inessenziali conduce al risultato richiesto:

$$U_{el} = -\frac{k}{2}R^2(s^2 - 2s \cos \theta) = -\frac{\gamma m \omega^2}{2}R^2(s^2 - 2s \cos \theta).$$

◦ **Potenziale centrifugo del semidisco**

Il potenziale centrifugo del semidisco si deduce applicando la relazione generale

$$U_{cf}^{\mathbb{D}} = \frac{\omega^2}{2} I_{Oy}^{\mathbb{D}}$$

nella quale il momento d'inerzia $I_{Oy}^{\mathbb{D}}$ di \mathbb{D} rispetto all'asse di rotazione Oy segue facilmente dalla matrice d'inerzia L' del semidisco rispetto alla terna $Ox'y'z'$, osservando $\hat{e}_2 = \sin \theta \hat{e}'_1 + \cos \theta \hat{e}'_2$ e che pertanto

$$I_{Oy}^{\mathbb{D}} = (\sin \theta \quad \cos \theta \quad 0) L' \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

cosicch 

$$U_{cf}^{\mathbb{D}} = \frac{\omega^2}{2} (\sin \theta \quad \cos \theta \quad 0) \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{M\omega^2 R^2}{8}.$$

Il potenziale centrifugo del semidisco risulta perci  costante e pu  essere ignorato nella stesura della lagrangiana e delle equazioni di Lagrange. Questo risultato, a ben guardare, non   troppo sorprendente: il fatto che il momento d'inerzia $I_{Oy}^{\mathbb{D}}$ non dipenda dall'angolo di rotazione θ   una conseguenza immediata dell'essere Oz asse giroscopico per il semidisco.

◦ **Potenziale centrifugo del punto A**

Il potenziale centrifugo si calcola direttamente utilizzando l'espressione generale

$$U_{cf}^A = \frac{\omega^2}{2} m(R \sin \theta)^2 = \frac{m\omega^2 R^2}{2} \sin^2 \theta.$$

I risultati ottenuti consentono di scrivere per il potenziale del sistema l'espressione seguente:

$$\begin{aligned}
U &= U_g^{\mathbb{D}} + U_g^A + U_g^P + U_{el} + U_{cf}^A = \\
&= \frac{4}{3\pi} MgR \cos \theta + mgR \cos \theta + mgR s - \frac{\gamma}{2} m\omega^2 R^2 s^2 + \gamma m\omega^2 R^2 s \cos \theta + \frac{m\omega^2 R^2}{2} \sin^2 \theta = \\
&= \left(\frac{4M}{3\pi} + m \right) Rg \cos \theta + \frac{m\omega^2 R^2}{2} \sin^2 \theta + mgR s - \frac{\gamma m\omega^2 R^2}{2} s^2 + \gamma m\omega^2 R^2 s \cos \theta ,
\end{aligned}$$

in modo che la lagrangiana diventa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = T + U &= \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2} + m \right) R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{2} \dot{s}^2 + \\
&+ \left(\frac{4M}{3\pi} + m \right) Rg \cos \theta + \frac{m\omega^2 R^2}{2} \sin^2 \theta + mgR s - \frac{\gamma m\omega^2 R^2}{2} s^2 + \gamma m\omega^2 R^2 s \cos \theta .
\end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange seguono senza particolari difficoltà, visto che i coefficienti dell'energia cinetica sono costanti e le componenti lagrangiane delle forze di Coriolis risultano uguali a zero. In particolare l'equazione

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

diviene

$$\left(\frac{M}{2} + m \right) R^2 \ddot{\theta} + \left(\frac{4M}{3\pi} + m \right) Rg \sin \theta - m\omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta + \gamma m\omega^2 R^2 s \sin \theta = 0$$

mentre la

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0$$

si riduce a

$$mR^2 \ddot{s} - mgR + \gamma m\omega^2 R^2 s - \gamma m\omega^2 R^2 \cos \theta = 0 .$$

(c) Configurazioni di equilibrio del sistema ed analisi di stabilità delle stesse

Trattandosi di sistema posizionale conservativo, le configurazioni di equilibrio del sistema sono tutti e soli i punti critici del potenziale U :

$$U(\theta, s) = \left(\frac{4M}{3\pi} + m \right) Rg \cos \theta + \frac{m\omega^2 R^2}{2} \sin^2 \theta + mgR s - \frac{\gamma m\omega^2 R^2}{2} s^2 + \gamma m\omega^2 R^2 s \cos \theta$$

e si ottengono quindi annullando le derivate parziali prime:

$$\begin{aligned}
U_\theta(\theta, s) &= - \left(\frac{4M}{3\pi} + m \right) Rg \sin \theta + m\omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta - \gamma m\omega^2 R^2 s \sin \theta \\
U_s(\theta, s) &= mgR - \gamma m\omega^2 R^2 s + \gamma m\omega^2 R^2 \cos \theta .
\end{aligned}$$

Il sistema di equazioni trascendenti

$$\begin{cases} R \sin \theta \left[-\left(\frac{4M}{3\pi} + m\right)g + m\omega^2 R \cos \theta - \gamma m\omega^2 R s \right] = 0 \\ g - \gamma\omega^2 R s + \gamma\omega^2 R \cos \theta = 0 \end{cases}$$

può essere risolto in modo esplicito senza eccessive difficoltà, grazie al fatto che la prima equazione si presenta in forma fattorizzata. Si distinguono due casi.

(i) Per $\sin \theta = 0$ la prima equazione è certamente verificata, con $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$ (modulo inessenziali multipli interi di 2π). Se $\theta = 0$ la seconda equazione del sistema diventa

$$g - \gamma\omega^2 R s + \gamma\omega^2 R = 0$$

ed implica

$$s = 1 + \frac{g}{\gamma R \omega^2};$$

per $\theta = \pi$ si ha invece

$$g - \gamma\omega^2 R s - \gamma\omega^2 R = 0$$

e quindi

$$s = -1 + \frac{g}{\gamma R \omega^2}.$$

(ii) Se $\sin \theta \neq 0$ il sistema di equazioni si riduce a

$$\begin{cases} -\left(\frac{4M}{3\pi m} + 1\right)g + \omega^2 R \cos \theta - \gamma\omega^2 R s = 0 \\ g - \gamma\omega^2 R s + \gamma\omega^2 R \cos \theta = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$-\gamma\omega^2 R s = -g - \gamma\omega^2 R \cos \theta$$

che sostituita nella prima conduce a

$$-\left(\frac{4M}{3\pi m} + 1\right)g + \omega^2 R \cos \theta - g - \gamma\omega^2 R \cos \theta = 0$$

ossia, equivalentemente,

$$-\left(\frac{4M}{3\pi m} + 2\right)g = (\gamma - 1)\omega^2 R \cos \theta$$

e quindi

$$\cos \theta = -\left(2 + \frac{4M}{3\pi m}\right) \frac{g}{(\gamma - 1)R\omega^2} = -\lambda$$

con $\lambda > 0$. Le soluzioni di quest'ultima equazione sono, beninteso,

$$\theta = \theta^* , \quad -\theta^* , \quad \text{con} \quad \theta^* = \arccos(-\lambda) ,$$

a condizione che $\lambda \in (0, 1)$. Conseguentemente

$$s = \cos \theta^* + \frac{g}{\gamma R \omega^2} = -\lambda + \frac{g}{\gamma R \omega^2} = s^* .$$

In conclusione, le configurazioni di equilibrio del sistema sono:

$$(\theta, s) = \left(0, 1 + \frac{g}{\gamma R \omega^2}\right) , \quad \left(0, -1 + \frac{g}{\gamma R \omega^2}\right)$$

sempre definite, e

$$(\theta, s) = (\theta^*, s^*) , \quad (-\theta^*, s^*) ,$$

con $\theta^* = \arccos(-\lambda)$ ed $s^* = -\lambda + \frac{g}{\gamma R \omega^2}$, definite e distinte dalle precedenti se e soltanto se $0 < \lambda < 1$.

Stabilità

L'analisi di stabilità viene condotta ricavando in primo luogo l'espressione delle derivate parziali seconde del potenziale, necessaria premessa al calcolo della matrice hessiana del potenziale nelle configurazioni di equilibrio ed all'applicazione dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta}(\theta, s) &= -\left(\frac{4M}{3\pi} + m\right)Rg \cos \theta + m\omega^2 R^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \gamma m\omega^2 R^2 s \cos \theta \\ U_{\theta s}(\theta, s) &= U_{s\theta}(\theta, s) = -\gamma m\omega^2 R^2 \sin \theta \\ U_{ss}(\theta, s) &= -\gamma m\omega^2 R^2 . \end{aligned}$$

Si procede quindi ad analizzare le singole configurazioni di equilibrio una ad una.

Configurazione $(\theta, s) = \left(0, 1 + \frac{g}{\gamma R \omega^2}\right)$. In questa configurazione le derivate seconde del potenziale assumono la forma

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta}\left(0, 1 + \frac{g}{\gamma R \omega^2}\right) &= -\left(\frac{4M}{3\pi} + m\right)Rg + m\omega^2 R^2 - \gamma m\omega^2 R^2\left(1 + \frac{g}{\gamma R \omega^2}\right) = \\ &= -\left(\frac{4M}{3\pi} + 2m\right)Rg - (\gamma - 1)m\omega^2 R^2 < 0 \\ U_{\theta s}\left(0, 1 + \frac{g}{\gamma R \omega^2}\right) &= U_{s\theta}\left(0, 1 + \frac{g}{\gamma R \omega^2}\right) = 0 \\ U_{ss}\left(0, 1 + \frac{g}{\gamma R \omega^2}\right) &= -\gamma m\omega^2 R^2 < 0 \end{aligned}$$

per cui la matrice hessiana $H_U\left(0, 1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2}\right)$ è diagonale con elementi diagonali negativi. Si tratta dunque di una matrice reale simmetrica definita negativa che individua la configurazione come massimo relativo proprio del potenziale, stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(\theta, s) = \left(\pi, -1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2}\right)$. In questo caso, diversamente dal precedente, gli autovalori della matrice hessiana di U non hanno segno definito, per cui è necessario distinguere alcuni sottocasi. Infatti le derivate seconde diventano:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta}\left(\pi, -1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2}\right) &= \left(\frac{4M}{3\pi} + m\right)Rg + m\omega^2 R^2 + \gamma m\omega^2 R^2\left(-1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2}\right) = \\ &= -(\gamma - 1)m\omega^2 R^2 + \left(\frac{4M}{3\pi} + 2m\right)Rg = -(\gamma - 1)m\omega^2 R^2(1 - \lambda) \\ U_{\theta s}\left(\pi, -1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2}\right) &= U_{s\theta}\left(\pi, -1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2}\right) = 0 \\ U_{ss}\left(\pi, -1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2}\right) &= -\gamma m\omega^2 R^2 < 0 \end{aligned}$$

in modo che l'hessiana $H_U\left(\pi, -1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2}\right)$ risulta diagonale, con autovalori $-\gamma m\omega^2 R^2 < 0$ e $-(\gamma - 1)m\omega^2 R^2(1 - \lambda)$. Si hanno i tre casi seguenti.

- (i) Per $\lambda \in (0, 1)$ anche il secondo autovalore è negativo, la configurazione si presenta come un massimo relativo proprio del potenziale e risulta dunque stabile per Lagrange-Dirichlet;
- (ii) se $\lambda > 1$ detto autovalore assume segno positivo e la configurazione diventa instabile per l'inversione parziale del teorema di Lagrange-Dirichlet (la configurazione è un punto di sella per U e l'assenza del massimo segue precisamente dall'esame della matrice hessiana);
- (iii) se infine $\lambda = 1$ gli autovalori risultano l'uno negativo e l'altro nullo, sicché ricorre un caso critico, non potendosi né affermare che la configurazione costituisca un massimo relativo proprio del potenziale, né escludere la presenza di un massimo dall'esame delle derivate seconde.

In effetti, la configurazione di equilibrio *non* è un massimo relativo proprio del potenziale. Per $\lambda = 1$, infatti, nell'espressione del potenziale adimensionalizzato

$$\frac{U(\theta, s)}{m\omega^2 R^2} = \left(2 + \frac{4M}{3\pi m}\right) \frac{g}{R\omega^2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{g}{R\omega^2} s - \frac{\gamma}{2} s^2 + \gamma s \cos \theta - \frac{g}{R\omega^2} \cos \theta$$

si può porre $\left(2 + \frac{4M}{3\pi m}\right) \frac{g}{R\omega^2} = \gamma - 1$ ed ottenere l'espressione particolare

$$\frac{U(\theta, s)}{m\omega^2 R^2} = (\gamma - 1) \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{g}{R\omega^2} s - \frac{\gamma}{2} s^2 + \gamma s \cos \theta - \frac{g}{R\omega^2} \cos \theta .$$

Volendosi studiare l'andamento della funzione nell'intorno della configurazione $(\theta, s) = \left(\pi, -1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2}\right)$, conviene introdurre il cambiamento di variabili:

$$\theta = \pi + \eta \quad s = -1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2} + \xi$$

in modo che il nuovo potenziale adimensionalizzato $\tilde{U}(\eta, \xi)$ risulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\omega^2 R^2} U\left(\pi + \eta, -1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2} + \xi\right) &= (1 - \gamma) \cos \eta + \frac{1}{2} \sin^2 \eta + \frac{g}{R\omega^2} \left(-1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2}\right) + \\ &+ \frac{g}{R\omega^2} \xi - \frac{\gamma}{2} \left(-1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2} + \xi\right)^2 - \gamma \left(-1 + \frac{g}{\gamma R\omega^2} + \xi\right) \cos \eta + \frac{g}{R\omega^2} \cos \eta \end{aligned}$$

ovvero, a meno di una costante additiva inessenziale,

$$\tilde{U}(\eta, \xi) = \cos \eta + \frac{1}{2} \sin^2 \eta + \gamma \xi - \frac{\gamma}{2} \xi^2 - \gamma \xi \cos \eta .$$

Anziché ricorrere ad uno sviluppo di Taylor di ordine superiore al secondo nell'intorno di $(\eta, \xi) = (0, 0)$, è vantaggioso riscrivere il potenziale per mezzo di una serie di manipolazioni trigonometriche. Da

$$\tilde{U}(\eta, \xi) = (1 - \cos \eta) \gamma \xi + \cos \eta + \frac{1}{2} \sin^2 \eta - \frac{\gamma}{2} \xi^2$$

per mezzo delle formule di bisezione per seno e coseno si ottiene

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\eta, \xi) &= 2 \sin^2(\eta/2) \gamma \xi + 1 - 2 \sin^2(\eta/2) + 2 \sin^2(\eta/2) \cos^2(\eta/2) - \frac{\gamma}{2} \xi^2 = \\ &= -\frac{\gamma}{2} [\xi^2 - 4 \sin^2(\eta/2) \xi] + 1 - 2 \sin^2(\eta/2) + 2 \sin^2(\eta/2) \cos^2(\eta/2) \end{aligned}$$

ed evidenziando il quadrato che contiene tutti i termini in ξ

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\eta, \xi) &= -\frac{\gamma}{2} [\xi - 2 \sin^2(\eta/2)]^2 + \frac{\gamma}{2} 4 \sin^4(\eta/2) + 1 - 2 \sin^2(\eta/2) + 2 \sin^2(\eta/2) \cos^2(\eta/2) = \\ &= -\frac{\gamma}{2} [\xi - 2 \sin^2(\eta/2)]^2 + 2(\gamma - 1) \sin^4(\eta/2) + 1 . \end{aligned}$$

Dall'espressione ottenuta è evidente che $(\eta, \xi) = (0, 0)$ non risulta né un massimo né un minimo relativo proprio del potenziale. Basta infatti assumere $\eta = 0$ per ottenere

$$\tilde{U}(0, \xi) = -\frac{\gamma}{2} \xi^2 + 1 < 1 = \tilde{U}(0, 0) \quad \forall \xi \neq 0$$

ed escludere che il punto possa essere un minimo relativo proprio del potenziale; per contro, se i punti (η, ξ) vengono scelti in modo che

$$\xi = 2 \sin^2(\eta/2) \quad , \quad \eta \in \mathbb{R} ,$$

il quadrato si annulla sistematicamente e si perviene alla diseuguaglianza

$$\tilde{U}(\eta, \xi) = 2(\gamma - 1) \sin^4(\eta/2) + 1 > 1 = \tilde{U}(0, 0) \quad \forall \eta \neq 0, \quad |\eta| < 2\pi,$$

che esclude altresì il ricorrere di un massimo relativo proprio.

La conclusione che se ne trae è che la configurazione di equilibrio nel caso critico non costituisce un massimo relativo proprio del potenziale totale e che pertanto il teorema di Lagrange-Dirichlet non ne assicura la stabilità. D'altra parte, l'assenza del massimo è sì verificabile, ma non dall'esame della matrice hessiana del potenziale; perciò neppure il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet è applicabile. La questione della stabilità nel caso critico rimane quindi aperta.

Configurazioni $(\theta, s) = (\theta^*, s^*), (-\theta^*, s^*)$. Queste due configurazioni di equilibrio presentano le stesse proprietà di stabilità per via della simmetria del potenziale:

$$U(-\theta, s) = U(\theta, s) \quad \forall (\theta, s) \in \mathbb{R}^2$$

per cui è possibile limitare l'analisi ad una sola di esse, ad esempio (θ^*, s^*) . Le derivate seconde del potenziale si scrivono:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta}(\theta^*, s^*) &= -\left(\frac{4M}{3\pi} + m\right) Rg \cos \theta^* + m\omega^2 R^2 (2 \cos^2 \theta^* - 1) - \gamma m\omega^2 R^2 s^* \cos \theta^* = \\ &= \left(\frac{4M}{3\pi} + m\right) Rg\lambda + m\omega^2 R^2 (2\lambda^2 - 1) + \gamma m\omega^2 R^2 \left(-\lambda + \frac{g}{\gamma R\omega^2}\right)\lambda = \\ &= \left(\frac{4M}{3\pi} + 2m\right) Rg\lambda + m\omega^2 R^2 (2\lambda^2 - 1 - \gamma\lambda^2) \\ U_{\theta s}(\theta^*, s^*) &= U_{s\theta}(\theta^*, s^*) = -\gamma m\omega^2 R^2 \sin \theta^* \\ U_{ss}(\theta^*, s^*) &= -\gamma m\omega^2 R^2. \end{aligned}$$

La matrice hessiana $H_U(\theta^*, s^*)$ ha determinante:

$$\begin{aligned} \det H_U(\theta^*, s^*) &= U_{\theta\theta}(\theta^*, s^*) U_{ss}(\theta^*, s^*) - U_{\theta s}(\theta^*, s^*)^2 = \\ &= -\gamma m\omega^2 R^2 \left[\left(\frac{4M}{3\pi} + 2m\right) Rg\lambda + m\omega^2 R^2 (2\lambda^2 - 1 - \gamma\lambda^2) \right] - \gamma^2 m^2 \omega^4 R^4 \sin^2 \theta^* = \\ &= -\gamma (m\omega^2 R^2)^2 \left[\left(\frac{4M}{3\pi m} + 2\right) \frac{g}{R\omega^2} \lambda + 2\lambda^2 - 1 - \gamma\lambda^2 + \gamma(1 - \cos^2 \theta^*) \right] \end{aligned}$$

ovvero, ricordando la definizione di λ ,

$$\begin{aligned} \det H_U(\theta^*, s^*) &= -\gamma (m\omega^2 R^2)^2 [(\gamma - 1)\lambda^2 + 2\lambda^2 - 1 - \gamma\lambda^2 + \gamma(1 - \lambda^2)] = \\ &= -\gamma (m\omega^2 R^2)^2 [\lambda^2 - 1 - \gamma(\lambda^2 - 1)] = -\gamma (m\omega^2 R^2)^2 (1 - \lambda^2)(\gamma - 1) < 0 \end{aligned}$$

in quanto $0 < \lambda < 1$ in forza della condizione di esistenza della configurazione e $\gamma > 1$ per ipotesi. Poiché il determinante coincide con il prodotto degli autovalori (reali) di

$H_U(\theta^*, s^*)$, si deduce che questi sono di segno opposto. La presenza di un autovalore positivo consente allora di escludere che la configurazione costituisca un massimo relativo proprio del potenziale e di concludere che detta configurazione è instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

I risultati ottenuti circa le configurazioni di equilibrio e le loro proprietà di stabilità sono riassunti nel seguente diagramma di biforcazione dove, per semplicità è stata riportata la sola componente θ delle configurazioni (la componente s residua è individuata univocamente da quella in θ).

diagramma di biforcazione

(d) Reazioni vincolari applicate al semidisco in O ed al punto materiale P , per un equilibrio a scelta

Si vogliono determinare le reazioni vincolari $\vec{\psi}_P$ e $\vec{\psi}_O$ applicate, all'equilibrio, rispettivamente nel punto materiale P e nell'origine O del semidisco. Il risultato si ottiene facilmente applicando le equazioni cardinali della quantità di moto al punto materiale ed al semidisco. Per completezza, si esegue il calcolo relativamente a tutte le configurazioni di equilibrio, sebbene, potendosi scegliere, la configurazione di equilibrio più agevole a discutersi sia quella per $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

Configurazione $(\theta, s) = \left(0, 1 + \frac{g}{\gamma R \omega^2}\right)$. Il punto P è soggetto al proprio peso $-mg \hat{e}_2$ ed alla forza elastica

$$k(A - P) = \gamma m \omega^2 [R \sin \theta \hat{e}_1 + R(s - \cos \theta) \hat{e}_2] = \gamma m \omega^2 R \left(1 + \frac{g}{\gamma R \omega^2} - 1\right) \hat{e}_2 = mg \hat{e}_2 ,$$

mentre la forza centrifuga risulta nulla in quanto P giace sull'asse di rotazione Oy . Dall'equazione cardinale dell'impulso si ha allora che la reazione vincolare $\vec{\psi}_P$ applicata in P soddisfa

$$0 = -mg \hat{e}_2 + mg \hat{e}_2 + \vec{\psi}_P$$

e quindi $\vec{\psi}_P = 0$. Al semidisco sono applicate le forze peso $-Mg \hat{e}_2$, $-mg \hat{e}_2$ ed elastica $-k(A - P) = -mg \hat{e}_2$ (in A). La forza centrifuga ha risultante nulla per il fatto che in questa configurazione l'asse di rotazione Oy è asse di simmetria del semidisco, mentre il punto materiale A si colloca sullo stesso asse di rotazione. L'equazione cardinale dell'impulso applicata al sistema formato dal semidisco e dal punto materiale A porge perciò

$$0 = -Mg \hat{e}_2 - 2mg \hat{e}_2 + \vec{\psi}_O$$

e da essa si deduce che $\vec{\psi}_O = (M + 2m)g \hat{e}_2$.

Configurazione $(\theta, s) = \left(\pi, -1 + \frac{g}{\gamma R \omega^2}\right)$. In questo caso si ottengono gli stessi risultati ricavati per la precedente configurazione, procedendo esattamente allo stesso modo.

Configurazione $(\theta, s) = (\theta^*, s^*)$. Sul punto P agiscono la forza peso $-mg \hat{e}_2$ e quella elastica

$$k(A - P) = kR \sin \theta^* \hat{e}_1 + kR(s^* - \cos \theta^*) \hat{e}_2 ,$$

oltre alla reazione vincolare $\vec{\psi}_P$. L'equazione cardinale dell'impulso si scrive pertanto

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\psi}_P - mg \hat{e}_2 + kR \sin \theta^* \hat{e}_1 + kR \left(-\lambda + \frac{g}{\gamma R \omega^2} + \lambda \right) \hat{e}_2 = \\ &= \vec{\psi}_P - mg \hat{e}_2 + \gamma m \omega^2 R \sin \theta^* \hat{e}_1 + mg \hat{e}_2 \end{aligned}$$

e porge quindi

$$\vec{\psi}_P = -\gamma m \omega^2 R \sin \theta^* \hat{e}_1$$

vettore ortogonale all'asse vincolare Oy . Al semidisco \mathbb{D} sono applicate le forze peso $-Mg \hat{e}_2$ in G e $-mg \hat{e}_2$ in A , nonché la forza elastica

$$\begin{aligned} -k(A - P) &= -kR \sin \theta^* \hat{e}_1 - kR(s^* - \cos \theta^*) \hat{e}_2 = \\ &= -\gamma m \omega^2 R \sin \theta^* \hat{e}_1 - \gamma m \omega^2 R \frac{g}{\gamma R \omega^2} \hat{e}_2 = -\gamma m \omega^2 R \sin \theta^* \hat{e}_1 - mg \hat{e}_2 \end{aligned}$$

e quella centrifuga totale

$$\vec{F}_{cf}^{\mathbb{D}} = \int_{\mathbb{D}} \omega^2 x \sigma \, dx dy \hat{e}_1 = M \omega^2 \frac{1}{M} \int_{\mathbb{D}} x \sigma \, dx dy \hat{e}_1 = M \omega^2 (G - O) \cdot \hat{e}_1 \hat{e}_1 = M \omega^2 \frac{4R}{3\pi} \sin \theta^* \hat{e}_1$$

cui va sommata la forza centrifuga agente sul punto materiale A

$$\vec{F}_{cf}^A = m \omega^2 (A - O) \cdot \hat{e}_1 \hat{e}_1 = m \omega^2 R \sin \theta^* \hat{e}_1 ,$$

oltre alla reazione vincolare $\vec{\psi}_O$ in O . L'equazione cardinale dell'impulso si scrive

$$-Mg \hat{e}_2 - mg \hat{e}_2 - \gamma m \omega^2 R \sin \theta^* \hat{e}_1 - mg \hat{e}_2 + \frac{4}{3\pi} M \omega^2 R \sin \theta^* \hat{e}_1 + m \omega^2 R \sin \theta^* \hat{e}_1 + \vec{\psi}_O = 0$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_O &= (M + 2m)g \hat{e}_2 + \left(\gamma m - \frac{4M}{3\pi} \right) \omega^2 R \sin \theta^* \hat{e}_1 - m \omega^2 R \sin \theta^* \hat{e}_1 = \\ &= (M + 2m)g \hat{e}_2 + \left[(\gamma - 1)m - \frac{4M}{3\pi} \right] \omega^2 R \sin \theta^* \hat{e}_1 . \end{aligned}$$

Configurazione $(\theta, s) = (-\theta^*, s^*)$. Il calcolo è identico a quello precedente, a meno della sostituzione $\theta^* \rightarrow -\theta^*$, per cui l'espressione della reazione vincolare in P risulta

$$\vec{\psi}_P = \gamma m \omega^2 R \sin \theta^* \hat{e}_1$$

e quella della reazione vincolare in O diviene

$$\vec{\psi}_O = (M + 2m)g \hat{e}_2 - \left[(\gamma - 1)m - \frac{4M}{3\pi} \right] \omega^2 R \sin \theta^* \hat{e}_1 .$$

Come ci si aspetta, considerato che le due configurazioni di equilibrio sono simmetriche rispetto all'asse coordinato Oy , le componenti orizzontali delle reazioni vincolari risultano opposte rispetto a quelle calcolate nella configurazione precedente.

(e) Configurazioni di equilibrio e relative proprietà di stabilità in presenza della sollecitazione addizionale di resistenza idraulica applicata al punto P

Poiché $P - O = -Rs \hat{e}_2$, le componenti lagrangiane della sollecitazione $\vec{F} = -\beta|\dot{P}|\dot{P}$ si scrivono

$$D_\theta = -\beta|\dot{P}|\dot{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} = -\beta|\dot{P}|\dot{P} \cdot 0 = 0$$

$$D_s = -\beta|\dot{P}|\dot{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial s} = -\beta|-R\dot{s}\hat{e}_2|(-R\dot{s}\hat{e}_2) \cdot (-R\hat{e}_2) = -\beta R^3|\dot{s}|\dot{s}$$

e la potenza della sollecitazione è

$$\pi = D_\theta \dot{\theta} + D_s \dot{s} = -\beta R^3|\dot{s}|\dot{s}^2 \leq 0 \quad \forall (\theta, s, \dot{\theta}, \dot{s}) \in \mathbb{R}^4,$$

per cui la sollecitazione può essere classificata come dissipativa. Essa non ha tuttavia natura *completamente* dissipativa, in quanto

$$\pi = 0 \quad \implies \quad -\beta R^3|\dot{s}|\dot{s}^2 = 0 \quad \implies \quad \dot{s} = 0$$

ma non $\dot{\theta} = 0$. I criteri di Barbasin e Krasovskii non sono dunque applicabili nella discussione delle proprietà di stabilità.

Le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole quelle determinate nel caso posizionale conservativo, dal momento che $(D_\theta, D_s) = (0, 0)$ per $(\dot{\theta}, \dot{s}) = (0, 0)$. I massimi relativi propri del potenziale U rimangono stabili per il teorema di Lagrange-Dirichlet. Alle configurazioni che non sono massimi relativi propri di U , e che come tali risultano riconoscibili dall'esame della matrice hessiana, non è direttamente applicabile il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, causa la presenza della sollecitazione dissipativa (si ricorda che l'inversione parziale di L.-D. vale nel caso posizionale conservativo). Nondimeno, è facile convincersi che le configurazioni suddette sono instabili. A questo scopo basta osservare che l'introduzione della sollecitazione dissipativa porta a modificare le equazioni di Lagrange nella forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = D_\theta = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = D_s = -\beta R^3|\dot{s}|\dot{s}$$

che linearizzate nell'intorno di una qualsiasi soluzione statica si identificano con le corrispondenti equazioni linearizzate del sistema posizionale conservativo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0$$

in conseguenza del fatto che il termine $D_s = -\beta R^3|\dot{s}|\dot{s}$, di classe C^1 , è del secondo ordine in \dot{s} e viene comunque rimosso dalla procedura di linearizzazione. Il teorema di stabilità per linearizzazione applicato al primo o al secondo dei due sistemi di equazioni conduce

esattamente alle stesse conclusioni, visto che le equazioni linearizzate intorno alla stessa soluzione statica sono identiche. *Ma l'analisi lineare di stabilità delle soluzioni statiche per il sistema posizionale conservativo non è altro che il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.* Pertanto le configurazioni di equilibrio che non sono massimi relativi propri del potenziale (riconoscibili mediante lo studio della matrice hessiana) e che risultano instabili per il teorema di inversione parziale di L.-D. nel caso posizionale conservativo, si mantengono tali anche in presenza della dissipazione, *essendo questa ininfluyente sull'analisi lineare di stabilità.*

Osservazione.

L'assunto che le reazioni vincolari esterne si riducano ad una $\vec{\psi}_P$ applicata in P e ad una $\vec{\psi}_O$ agente sul centro O del semidisco è compatibile con la condizione dei vincoli ideali e con le equazioni cardinali della dinamica?

Per un generico punto $Q \in \mathbb{D} \cup \{A\}$, poichè il disco \mathbb{D} ed il punto materiale A ad esso solidale ruotano attorno all'asse Oz , la velocità virtuale relativa ad $Oxyz$ assume la forma

$$\vec{v}_Q = \alpha \hat{e}_3 \wedge (Q - O) \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad ,$$

mentre per il punto P , vincolato a traslare lungo Oy , vale

$$\vec{v}_P = \beta \hat{e}_2 \quad , \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad .$$

La potenza virtuale delle forze di reazione vincolare (interne ed esterne) applicate ai vari punti del sistema si scrive pertanto, formalmente, come

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{Q \in \mathbb{D} \cup \{A\}} \alpha \hat{e}_3 \wedge (Q - O) \cdot \vec{\psi}_Q + \beta \hat{e}_2 \cdot \vec{\psi}_P = \\ &= \alpha \hat{e}_3 \cdot \sum_{Q \in \mathbb{D} \cup \{A\}} (Q - O) \wedge \vec{\psi}_Q + \beta \hat{e}_2 \cdot \vec{\psi}_P = \alpha \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\psi + \beta \hat{e}_2 \cdot \vec{\psi}_P \end{aligned}$$

essendo \vec{M}_O^ψ il momento risultante in O di tutte le reazioni vincolari applicate al sistema. La condizione dei vincoli ideali diventa

$$\alpha \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\psi + \beta \hat{e}_2 \cdot \vec{\psi}_P = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad ,$$

che, data l'arbitrarietà dei coefficienti indipendenti α e β , è equivalente ad assumere:

$$\hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\psi = 0 \quad \text{e} \quad \hat{e}_2 \cdot \vec{\psi}_P = 0$$

come si verifica immediatamente. Si osserva così come la condizione dei vincoli ideali non richieda a priori che $\vec{M}_O^\psi = 0$, ma soltanto che $\hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\psi = 0$: potrebbe dunque non essere corretto assumere che al semidisco sia applicata un'unica reazione vincolare esterna nel punto O (il che implicherebbe, di necessità $\vec{M}_O^\psi = 0$).

All'equilibrio deve tuttavia aversi, per l'equazione cardinale del momento angolare di $\mathbb{D} \cup \{A\}$:

$$0 = \vec{M}_O^{\mathbb{D},g} + \vec{M}_O^{A,g} + \vec{M}_O^{A,el} + \vec{M}_O^{\mathbb{D},cf} + \vec{M}_O^{A,cf} + \vec{M}_O^\psi$$

dove i momenti in O delle forze peso agenti sul semidisco \mathbb{D} e sul punto materiale A sono rispettivamente dati da

$$\vec{M}_O^{\mathbb{D},g} = (G - O) \wedge (-Mg \hat{e}_2) \quad \vec{M}_O^{A,g} = (A - O) \wedge (-mg \hat{e}_2)$$

mentre il momento della forza elastica applicata ad A si scrive

$$\vec{M}_O^{A,el} = (A - O) \wedge k(P - A) = (A - O) \wedge [-kR \sin \theta \hat{e}_1 - kR(s - \cos \theta) \hat{e}_2]$$

e quindi, essendo $k = \gamma m \omega^2$ e $s - \cos \theta = g/\gamma \omega^2 R$ (in una qualsiasi configurazione di equilibrio),

$$\vec{M}_O^{A,el} = (A - O) \wedge (-\gamma m \omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 - mg \hat{e}_2) .$$

Il momento in O delle forze centrifughe su \mathbb{D} si calcola direttamente dalla definizione, individuando con $P - O = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2$ un punto arbitrario del semidisco, di densità costante σ , ed integrando sull'intera superficie di questo:

$$\vec{M}_O^{\mathbb{D},cf} = \int_{\mathbb{D}} (x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2) \wedge \hat{e}_1 \omega^2 x \sigma \, dx dy .$$

Più semplice è il calcolo del momento per la forza centrifuga agente sul punto materiale A :

$$\vec{M}_O^{A,cf} = (A - O) \wedge m \omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 .$$

L'equazione cardinale del momento per $\mathbb{D} \cup \{A\}$ diventa allora, all'equilibrio,

$$0 = (G - O) \wedge (-Mg \hat{e}_2) + (A - O) \wedge (-mg \hat{e}_2) + (A - O) \wedge (-\gamma m \omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 - mg \hat{e}_2) + \\ + \int_{\mathbb{D}} (x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2) \wedge \hat{e}_1 \omega^2 x \sigma \, dx dy + (A - O) \wedge m \omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 + \vec{M}_O^\psi$$

ossia, riconosciuto che $G - O = \frac{4}{3\pi}(A - O)$ e raccolto il fattore comune $A - O$:

$$0 = (A - O) \wedge \left[-\left(\frac{4M}{3\pi} + 2m\right)g \hat{e}_2 - (\gamma - 1)m\omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 \right] - \hat{e}_3 \omega^2 \int_{\mathbb{D}} xy \sigma \, dx dy + \vec{M}_O^\psi .$$

Se poi si introduce la relazione $A - O = R(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2)$ e si osserva che $-\int_{\mathbb{D}} xy \sigma \, dx dy$ è il prodotto d'inerzia L_{xy} del semidisco rispetto agli assi $Ox-Oy$, l'equazione diventa

$$0 = R(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) \wedge \left[-\left(\frac{4M}{3\pi} + 2m\right)g \hat{e}_2 - (\gamma - 1)m\omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 \right] + L_{xy} \omega^2 \hat{e}_3 + \vec{M}_O^\psi = \\ = R \left[-\left(\frac{4M}{3\pi} + 2m\right)g \sin \theta - (\gamma - 1)m\omega^2 R \sin \theta \cos \theta \right] \hat{e}_3 + L_{xy} \omega^2 \hat{e}_3 + \vec{M}_O^\psi = \\ = -R \sin \theta \left[\left(\frac{4M}{3\pi} + 2m\right)g + (\gamma - 1)m\omega^2 R \cos \theta \right] \hat{e}_3 + L_{xy} \omega^2 \hat{e}_3 + \vec{M}_O^\psi .$$

La relazione così ottenuta si semplifica un poco grazie al fatto che $L_{xy} = 0$, in quanto $Oxyz$ è una terna principale (seppure non solidale) per il semidisco \mathbb{D} , il quale ammette Oz come asse giroscopico. Una ulteriore, drastica semplificazione si deduce ricordando come per tutte le configurazioni di equilibrio determinate al punto (c) valga

$$-R \sin \theta \left[\left(\frac{4M}{3\pi} + 2m\right)g + (\gamma - 1)m\omega^2 R \cos \theta \right] = -(\gamma - 1)m\omega^2 R^2 \sin \theta (-\lambda + \cos \theta) = 0$$

in modo che, all'equilibrio, l'equazione cardinale del momento angolare in O del sistema rigido $\mathbb{D} \cup \{A\}$ si riduce semplicemente a

$$\vec{M}_O^\psi = 0 .$$

In altre parole, all'equilibrio l'equazione cardinale del momento angolare implica che si abbia $\vec{M}_O^\psi = 0$. È dunque lecito assumere che una sola reazione vincolare esterna agisca sul semidisco nel punto O .

Qualora il sistema fosse in moto, in linea di principio dall'equazione cardinale del momento angolare potrebbe seguire che $\vec{M}_O^\psi \neq 0$ lungo il moto, nel qual caso il modello della reazione vincolare singola in O non sarebbe più accettabile, non potendo rendere conto del momento risultante non nullo in O . Questa è precisamente la condizione che ricorre, verificabile scrivendo esplicitamente l'equazione cardinale del momento angolare per $\mathbb{D} \cup \{A\}$ rispetto al polo fisso O . Indicato con $\vec{K}_O^{\mathbb{D} \cup \{A\}}$ il momento angolare in O del sistema rigido $\mathbb{D} \cup \{A\}$ e con \vec{M}_O^{Cor} il momento rispetto allo stesso polo delle forze di Coriolis, si ha infatti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{K}_O^{\mathbb{D} \cup \{A\}} &= (G - O) \wedge (-Mg \hat{e}_2) + (A - O) \wedge (-mg \hat{e}_2) + (A - O) \wedge \gamma m \omega^2 (P - A) + \\ &+ \int_{\mathbb{D}} (x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2) \wedge \hat{e}_1 \omega^2 x \sigma \, dx dy + (A - O) \wedge m \omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 + \vec{M}_O^{\text{Cor}} + \vec{M}_O^\psi = \\ &= (A - O) \wedge \left[-\left(\frac{4M}{3\pi} + m\right) g \hat{e}_2 + \gamma m \omega^2 [-R \sin \theta \hat{e}_1 + R(\cos \theta - s) \hat{e}_2] \right] + \\ &+ L_{xy} \omega^2 \hat{e}_3 + (A - O) \wedge m \omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 + \vec{M}_O^{\text{Cor}} + \vec{M}_O^\psi = \\ &= (A - O) \wedge \left[-\left(\frac{4M}{3\pi} + m\right) g \hat{e}_2 - (\gamma - 1) m \omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 + \gamma m \omega^2 R (\cos \theta - s) \hat{e}_2 \right] + \vec{M}_O^{\text{Cor}} + \vec{M}_O^\psi \end{aligned}$$

dove $A - O = R(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2)$ e

$$\vec{K}_O^{\mathbb{D} \cup \{A\}} = \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \hat{e}_3 + (A - O) \wedge m \dot{A} = \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \hat{e}_3 +$$

$$+ mR^2 (\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) \wedge (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \dot{\theta} = \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \hat{e}_3 + mR^2 \dot{\theta} \hat{e}_3 = \left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \dot{\theta} \hat{e}_3 .$$

Sostituendo nell'equazione cardinale, si perviene alla relazione:

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \ddot{\theta} \hat{e}_3 &= R(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) \wedge \\ &\wedge \left[-(\gamma - 1) m \omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 - \left(\frac{4M}{3\pi} + m\right) g \hat{e}_2 + \gamma m \omega^2 R (\cos \theta - s) \hat{e}_2 \right] + \vec{M}_O^{\text{Cor}} + \vec{M}_O^\psi = \\ &= \left[-\left(\frac{4M}{3\pi} + m\right) Rg \sin \theta + \gamma m \omega^2 R^2 (\cos \theta - s) \sin \theta - (\gamma - 1) m \omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta \right] \hat{e}_3 + \vec{M}_O^{\text{Cor}} + \vec{M}_O^\psi . \end{aligned}$$

Il momento in O delle forze di Coriolis è costituito dalla somma di due contributi, l'uno dovuto al semidisco omogeneo e l'altro al punto materiale A . Indicato con P un punto generico del semidisco, di coordinate cartesiane x, y , in modo che si abbia $P - O = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2$, si ha per il contributo del semidisco l'espressione seguente:

$$\int_{\mathbb{D}} (P - O) \wedge \{-2\omega \hat{e}_2 \wedge [\dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (P - O)]\} \sigma \, dx dy$$

che, sviluppando il doppio prodotto vettoriale entro parentesi graffe, diventa

$$\begin{aligned} & -2\omega \dot{\theta} \int_{\mathbb{D}} (P - O) \wedge \{\hat{e}_3 \hat{e}_2 \cdot (P - O) - (P - O) \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3\} \sigma \, dx dy = \\ & = -2\omega \dot{\theta} \int_{\mathbb{D}} (P - O) \wedge \hat{e}_3 \hat{e}_2 \cdot (P - O) \sigma \, dx dy = 2\omega \dot{\theta} \int_{\mathbb{D}} \hat{e}_3 \wedge (P - O) y \sigma \, dx dy = \\ & = 2\omega \dot{\theta} \int_{\mathbb{D}} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} y \sigma \, dx dy = 2\omega \dot{\theta} \int_{\mathbb{D}} (-y \hat{e}_1 + x \hat{e}_2) y \sigma \, dx dy = \\ & = 2\omega \dot{\theta} (-L_{xx} \hat{e}_1 - L_{xy} \hat{e}_2) = 2\omega \dot{\theta} \left(-\frac{MR^2}{4}\right) \hat{e}_1 = -\frac{MR^2}{2} \omega \dot{\theta} \hat{e}_1 . \end{aligned}$$

Il termine relativo al punto materiale A si deduce in modo analogo:

$$\begin{aligned} & (A - O) \wedge (-2m\omega \hat{e}_2 \wedge \dot{A}) = (A - O) \wedge \{-2m\omega \hat{e}_2 \wedge [\dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (A - O)]\} = \\ & = -2m\omega \dot{\theta} (A - O) \wedge [\hat{e}_3 \hat{e}_2 \cdot (A - O) - (A - O) \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3] = \\ & = -2m\omega \dot{\theta} (A - O) \wedge \hat{e}_3 \hat{e}_2 \cdot (A - O) = -2m\omega \dot{\theta} (A - O) \wedge \hat{e}_3 (-R \cos \theta) = \\ & = 2mR\omega \dot{\theta} \cos \theta R(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) \wedge \hat{e}_3 = 2mR^2 \omega \dot{\theta} \cos \theta (-\sin \theta \hat{e}_2 - \cos \theta \hat{e}_1) . \end{aligned}$$

L'inserimento di queste espressioni nell'equazione cardinale del momento angolare per $\mathbb{D} \cup \{A\}$ rispetto al polo O conduce a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \ddot{\theta} \hat{e}_3 = \left[-\left(\frac{4M}{3\pi} + m\right) Rg \sin \theta + \gamma m \omega^2 R^2 (\cos \theta - s) \sin \theta - \right. \\ & \left. - (\gamma - 1) m \omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta\right] \hat{e}_3 - \frac{MR^2}{2} \omega \dot{\theta} \hat{e}_1 + 2mR^2 \omega \dot{\theta} \cos \theta (-\sin \theta \hat{e}_2 - \cos \theta \hat{e}_1) + \vec{M}_O^\psi . \end{aligned}$$

L'equazione ottenuta può essere utilizzata in due modi:

(i) moltiplicando scalarmente per il versore \hat{e}_3 risulta $\vec{M}_O^\psi \cdot \hat{e}_3 = 0$, e l'equazione residua

$$\left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \ddot{\theta} = -\left(\frac{4M}{3\pi} + m\right) Rg \sin \theta - \gamma m \omega^2 R^2 s \sin \theta + m \omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta$$

coincide con l'equazione di Lagrange già determinata

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 ;$$

(ii) risolvendo in \vec{M}_O^ψ si deduce che il momento in O delle reazioni vincolari applicate a $\mathbb{D} \cup \{A\}$ è dato dalla relazione:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O^\psi &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \right] \hat{e}_3 + \frac{MR^2}{2} \omega \dot{\theta} \hat{e}_1 + 2mR^2 \omega \dot{\theta} \cos \theta (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) = \\ &= \frac{MR^2}{2} \omega \dot{\theta} \hat{e}_1 + 2mR^2 \omega \dot{\theta} \cos \theta (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \neq 0\end{aligned}$$

come richiesto.

Si può completare la discussione dell'esercizio ricavando l'espressione della reazione vincolare agente sul punto materiale P lungo un moto naturale qualsiasi del sistema.

L'equazione "cardinale" dell'impulso per il punto P si scrive

$$m\ddot{P} = -mg \hat{e}_2 + \gamma m \omega^2 (A - P) + \vec{\psi}_P$$

ed equivale alla

$$-mR\ddot{s} \hat{e}_2 = -mg \hat{e}_2 + \gamma m \omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 + \gamma m \omega^2 R (s - \cos \theta) \hat{e}_2 + \vec{\psi}_P .$$

Proiettando lungo \hat{e}_2 , essendo $\vec{\psi}_P \cdot \hat{e}_2 = 0$ per la condizione di idealità dei vincoli, si deduce

$$-mR\ddot{s} = -mg + \gamma m \omega^2 R s - \gamma m \omega^2 R \cos \theta$$

che a meno di un fattore R coincide con la seconda equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0 .$$

L'equazione cardinale si riduce allora a

$$0 = \frac{1}{R} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \right] \hat{e}_2 + \gamma m \omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 + \vec{\psi}_P$$

ossia

$$0 = \gamma m \omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 + \vec{\psi}_P$$

per cui

$$\vec{\psi}_P = -\gamma m \omega^2 R \sin \theta \hat{e}_1 .$$

Si osservi che l'equazione simbolica della dinamica risulta

$$\alpha \hat{e}_3 \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{K}_O^{\mathbb{D} \cup \{A\}} - \vec{M}_O^{\mathbb{D} \cup \{A\}} \right] + \beta \hat{e}_2 \cdot [m\ddot{P} - \vec{R}^P] = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

essendo $\vec{M}_O^{\mathbb{D} \cup \{A\}}$ il momento in O delle forze attive applicate al sistema $\mathbb{D} \cup \{A\}$ e \vec{R}^P il risultante delle forze attive agenti su P . Tale equazione equivale, per quanto detto, alla seguente

$$\alpha \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \right] - \beta \frac{1}{R} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \right] = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

e quindi alle due equazioni di Lagrange, come deve essere.