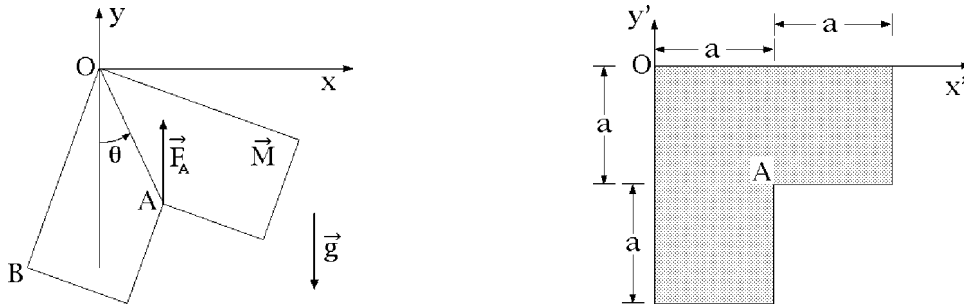


Esercizio 1

Un sistema rigido, di massa m , è costituito da tre lamine quadrate omogenee di lato a saldate fra loro come illustrato in figura e si muove nel piano verticale Oxy mantenendo il vertice O fisso. Il sistema è soggetto al proprio peso, ad una forza $mg \cos \theta \hat{e}_2$ applicata nel vertice A e ad una coppia di momento $\vec{M} = -(1/6)mga \sin \theta \hat{e}_3$.

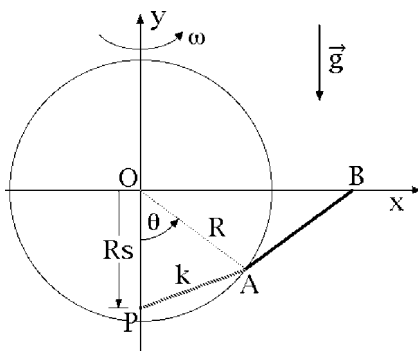


Scelto l'angolo θ come coordinata generalizzata ed assunto l'asse fisso privo di attrito, determinare:

- (a) il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse Oz ;
- (b) le equazioni pure del moto;
- (c) tutte e sole le condizioni iniziali per i moti periodici del sistema;
- (d) la forza da applicare nel vertice B affinché la configurazione $\theta = \pi/2$ sia un equilibrio.

Esercizio 2

Un'asta rigida omogenea AB , di massa $2m$ e lunghezza R , ha il vertice A vincolato a restare sulla circonferenza di centro O e raggio R nel piano verticale Oxy , mentre il secondo vertice B è costretto a muoversi lungo l'asse orizzontale Ox . Il piano Oxy ruota attorno all'asse Oy con velocità angolare costante ω , rispetto ad una terna inerziale e una molla di costante elastica $2m\omega^2/3$ collega il vertice A con un punto materiale P , di massa m , vincolato a scorrere lungo l'asse Oy . Il sistema è pesante, a vincoli ideali e parametrizzato dalle coordinate adimensionali θ ed s in figura.



Relativamente alla terna che vede il piano Oxy fisso, determinare:

- gli equilibri;
- le proprietà di stabilità dei predetti equilibri;
- l'energia cinetica;
- le equazioni pure del moto;
- un integrale primo.

Soluzione dell'esercizio 1

Si tratta di un sistema rigido con asse fisso privo di attrito e la relativa equazione del moto viene determinata considerando l'equazione cardinale del momento angolare rispetto ad un punto dell'asse — l'origine O è il candidato naturale a tale ruolo — e proiettandola lungo lo stesso asse. L'angolo di rotazione θ è compreso fra la direzione OA , assegnata sulla lamina rigida, e la direzione verticale condotta da O verso il basso, quest'ultima ovviamente fissa rispetto alla terna di riferimento $Oxyz$. Ne deriva che il vettore velocità angolare istantanea del sistema rigido rispetto a $Oxyz$ si scrive semplicemente $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3$, restando inteso che il versore \hat{e}_3 sia orientato in senso uscente rispetto al piano del foglio, in modo da rispettare la nota convenzione sinistrorsa.

(a) Momento d'inerzia rispetto all'asse Oz

Convieni procedere al calcolo del momento d'inerzia pensando la lamina come un quadrato omogeneo completo di lato $2a$, la cui densità areale coincida con quella della lamina originale e nel quale sia stato asportato un quadrato omogeneo di lato a . Il momento d'inerzia richiesto, I_{Oz} risulterà come differenza fra il momento d'inerzia I_{Oz}^c della lamina quadrata completa ed il momento I_{Oz}^a del quadrato asportato.

La densità — costante — della lamina è data dal rapporto fra la sua massa e la relativa area:

$$\sigma = \frac{m}{3a^2}$$

in modo che il quadrato completo avrà massa:

$$m_c = 4a^2\sigma = 4a^2 \frac{m}{3a^2} = \frac{4}{3}m$$

ed il suo momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrale Az si scriverà:

$$I_{Az}^c = \frac{1}{6}m_c(2a)^2 = \frac{1}{6} \frac{4}{3}m 4a^2 = \frac{8}{9}ma^2.$$

Di qui segue l'espressione per il momento d'inerzia del quadrato completo, rispetto all'asse fisso Oz :

$$I_{Oz}^c = m_c(\sqrt{2}a)^2 + I_{Az}^c = \frac{4}{3}m 2a^2 + \frac{8}{9}ma^2 = \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{9}\right)ma^2 = \frac{32}{9}ma^2.$$

Analogamente, per la massa della lamina asportata si ha:

$$m_a = a^2\sigma = a^2 \frac{m}{3a^2} = \frac{m}{3}$$

e se si indica con M il centro del quadrato asportato, il momento d'inerzia calcolato secondo l'asse baricentrale Mz diventa:

$$I_{Mz}^a = \frac{1}{6}m_a a^2 = \frac{1}{6} \frac{m}{3} a^2 = \frac{1}{18}ma^2$$

e il teorema di Huygens-Steiner implica la seguente espressione per il momento d'inerzia rispetto ad Oz :

$$\begin{aligned} I_{Oz}^a &= m_a |M - O|^2 + I_{Mz}^a = \frac{m}{3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{2} a \right)^2 + \frac{1}{18} m a^2 = \\ &= \frac{m}{3} \frac{9}{2} a^2 + \frac{1}{18} m a^2 = \frac{14}{9} m a^2 . \end{aligned}$$

Il momento d'inerzia della lamina vale pertanto:

$$I_{Oz} = I_{Oz}^c - I_{Oz}^a = \frac{32}{9} m a^2 - \frac{14}{9} m a^2 = 2 m a^2 .$$

(b) Equazioni del moto

Trattandosi di sistema pesante, è necessario in primo luogo individuare la posizione del baricentro G , in cui si intenderà applicato l'intero peso $m\vec{g} = -mg\hat{e}_2$. Conviene applicare la proprietà distributiva e scrivere l'equazione:

$$m_c(A - O) = m(G - O) + m_a(M - O)$$

che rispetto alla terna solidale $Ox'y'z'$, illustrata in figura, può anche porsi nella forma esplicita:

$$\frac{4}{3} m (a \hat{e}'_1 - a \hat{e}'_2) = m(G - O) + \frac{m}{3} \left(\frac{3}{2} a \hat{e}'_1 - \frac{3}{2} a \hat{e}'_2 \right)$$

e consente di ricavare le coordinate solidali del baricentro:

$$G - O = \frac{4}{3} a \hat{e}'_1 - \frac{4}{3} a \hat{e}'_2 - \frac{a}{2} \hat{e}'_1 + \frac{a}{2} \hat{e}'_2 = \frac{5}{6} a \hat{e}'_1 - \frac{5}{6} a \hat{e}'_2$$

con $|G - O| = 5\sqrt{2}a/6$. Indicato con \vec{K}_O il momento angolare del sistema rispetto al punto fisso O , l'equazione del moto del sistema diviene:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} \cdot \hat{e}_3 = \left[(G - O) \wedge (-mg\hat{e}_2) + (A - O) \wedge (mg \cos \theta \hat{e}_2) - \frac{1}{6} m g a \sin \theta \hat{e}_3 \right] \cdot \hat{e}_3$$

che con una semplice manipolazione dei prodotti misti si riduce a:

$$I_{Oz} \ddot{\theta} = -mg(G - O) \cdot \hat{e}_1 + mg \cos \theta (A - O) \cdot \hat{e}_1 - \frac{1}{6} m g a \sin \theta$$

e può anche riesprimersi come:

$$I_{Oz} \ddot{\theta} = -mg|G - O| \sin \theta + mg \cos \theta |A - O| \sin \theta - \frac{1}{6} m g a \sin \theta$$

dalla quale si deduce infine, sostituendo i valori ricavati per il momento d'inerzia e per la distanza $|G - O|$:

$$2ma^2 \ddot{\theta} = -\frac{5}{6} \sqrt{2} m g a \sin \theta + \sqrt{2} m g a \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{6} m g a \sin \theta .$$

L'equazione del moto cercata è pertanto:

$$2ma^2\ddot{\theta} = -\frac{5\sqrt{2}+1}{6}mga \sin \theta + \sqrt{2}mga \sin \theta \cos \theta.$$

(c) **Condizioni iniziali per i moti periodici**

Le sollecitazioni agenti sul sistema hanno natura posizionale e, data la presenza di un unico grado di libertà, ammettono potenziale. Quest'ultimo è definito da:

$$U'(\theta) = -\frac{5\sqrt{2}+1}{6}mga \sin \theta + \sqrt{2}mga \sin \theta \cos \theta$$

e si scrive perciò:

$$U(\theta) = \frac{5\sqrt{2}+1}{6}mga \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2}mga \cos^2 \theta.$$

L'energia potenziale corrispondente è data da:

$$W(\theta) = -U(\theta) = -\frac{5\sqrt{2}+1}{6}mga \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2}mga \cos^2 \theta$$

con derivata prima:

$$W'(\theta) = \frac{5\sqrt{2}+1}{6}mga \sin \theta - \sqrt{2}mga \sin \theta \cos \theta = mga \sin \theta \left(\frac{5\sqrt{2}+1}{6} - \sqrt{2} \cos \theta \right).$$

L'andamento qualitativo delle soluzioni può essere analizzato per mezzo della discussione di Weierstrass; in particolare, i criteri di Weierstrass consentono di caratterizzare completamente le condizioni iniziali associate a moti periodici del sistema. A questo scopo è necessario individuare il grafico dell'energia potenziale, con particolare riferimento alla ubicazione dei suoi punti critici.

I punti critici dell'energia potenziale si ricavano annullandone la derivata prima:

$$mga \sin \theta \left(\frac{5\sqrt{2}+1}{6} - \sqrt{2} \cos \theta \right) = 0$$

circostanza quest'ultima che ricorre per

$$\sin \theta = 0$$

portando le soluzioni

$$\theta = 0, \quad \pi,$$

oppure per

$$\frac{5\sqrt{2}+1}{6} - \sqrt{2} \cos \theta = 0$$

con le ulteriori soluzioni

$$\theta = \pm \arccos\left(\frac{5\sqrt{2}+1}{6} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\theta^*.$$

Delle configurazioni così determinate, $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ corrispondono a massimi relativi propri, mentre $\theta = +\theta^*$ e $\theta = -\theta^*$ si identificano con minimi relativi propri dell'energia potenziale. Si ha infatti:

$$W''(\theta) = mga \left[\frac{5\sqrt{2}+1}{6} \cos \theta - \sqrt{2}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right]$$

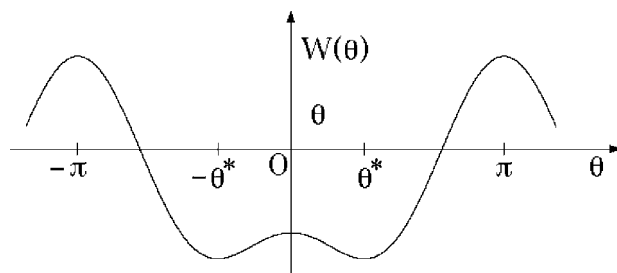
e di conseguenza:

$$\begin{aligned} W''(0) &= mga \left(\frac{5\sqrt{2}+1}{6} - \sqrt{2} \right) = mga \frac{1-\sqrt{2}}{6} < 0 \\ W''(\pi) &= mga \left(-\frac{5\sqrt{2}+1}{6} - \sqrt{2} \right) < 0 \\ W''(\pm\theta^*) &= mga \left[\frac{5\sqrt{2}+1}{6} \cos \theta^* - \sqrt{2}(2\cos^2 \theta^* - 1) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} mga \left[2 - \left(\frac{5\sqrt{2}+1}{6} \right)^2 \right] > 0. \end{aligned}$$

I valori della funzione W in corrispondenza dei punti critici:

$$\begin{aligned} W(0) &= mga \left(-\frac{5\sqrt{2}+1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -mga \frac{2\sqrt{2}+1}{6} < 0 \\ W(\pi) &= mga \left(\frac{5\sqrt{2}+1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = mga \frac{8\sqrt{2}+1}{6} > 0 \\ W(\pm\theta^*) &= -mga \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{5\sqrt{2}+1}{6} \right)^2 < 0 \end{aligned}$$

consentono perciò di determinarne qualitativamente il grafico, come illustrato nella figura seguente:



Introdotta l'integrale primo dell'energia meccanica:

$$\begin{aligned} H(\theta, \dot{\theta}) &= T + W(\theta) = \frac{1}{2} I_{Oz} |\dot{\theta} \hat{e}_3|^2 + W(\theta) = \frac{1}{2} 2ma^2 \dot{\theta}^2 + W(\theta) = \\ &= ma^2 \dot{\theta}^2 - mga \frac{5\sqrt{2} + 1}{6} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} mga \cos^2 \theta \end{aligned}$$

i criteri di Weierstrass permettono di concludere che i moti periodici del sistema si hanno tutti e soltanto per le condizioni iniziali $(\theta, \dot{\theta}) = (\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2$ del tipo:

$$W(\theta^*) < H(\theta_0, \dot{\theta}_0) < W(0) \quad \text{e} \quad W(0) < H(\theta_0, \dot{\theta}_0) < W(\pi)$$

ed appartenenti quindi all'insieme:

$$\begin{aligned} &\left\{ (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2 : -mga \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{5\sqrt{2} + 1}{6} \right)^2 < \right. \\ &\quad \left. < ma^2 \dot{\theta}^2 - mga \frac{5\sqrt{2} + 1}{6} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} mga \cos^2 \theta < -mga \frac{2\sqrt{2} + 1}{6} \right\} \cup \\ &\cup \left\{ (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2 : -mga \frac{2\sqrt{2} + 1}{6} < \right. \\ &\quad \left. < ma^2 \dot{\theta}^2 - mga \frac{5\sqrt{2} + 1}{6} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} mga \cos^2 \theta < mga \frac{8\sqrt{2} + 1}{6} \right\} \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned} &\left\{ (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{5\sqrt{2} + 1}{6} \right)^2 < \frac{a}{g} \dot{\theta}^2 - \frac{5\sqrt{2} + 1}{6} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 \theta < -\frac{2\sqrt{2} + 1}{3} \right\} \cup \\ &\cup \left\{ (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{2\sqrt{2} + 1}{3} < \frac{a}{g} \dot{\theta}^2 - \frac{5\sqrt{2} + 1}{6} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 \theta < \frac{8\sqrt{2} + 1}{6} \right\}. \end{aligned}$$

(d) **Forza da applicarsi in B affinché la configurazione $\theta = \pi/2$ sia di equilibrio**
Se \vec{F} indica la forza applicata al punto B , nella configurazione $\theta = \pi/2$, il suo momento assiale rispetto all'asse fisso vale:

$$\hat{e}_3 \cdot (B - O) \wedge \vec{F} = \hat{e}_3 \wedge (B - O) \cdot \vec{F} = \hat{e}_3 \wedge \frac{2a}{\sqrt{2}} (\hat{e}_1 - \hat{e}_2) \cdot \vec{F} = \frac{2a}{\sqrt{2}} (\hat{e}_2 + \hat{e}_1) \cdot \vec{F}$$

e la condizione per l'equilibrio diventa:

$$U' \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{2a}{\sqrt{2}} (\hat{e}_2 + \hat{e}_1) \cdot \vec{F} = 0$$

ovvero:

$$-\frac{2a}{\sqrt{2}} (\hat{e}_2 + \hat{e}_1) \cdot \vec{F} = U' \left(\frac{\pi}{2} \right) = -mga \frac{5\sqrt{2} + 1}{6}.$$

Di qui, posto $\vec{F} = F_1\hat{e}_1 + F_2\hat{e}_2 + F_3\hat{e}_3$, si conclude che:

$$F_1 + F_2 = (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \cdot \vec{F} = mg \frac{5\sqrt{2} + 1}{6\sqrt{2}}$$

per cui la sollecitazione in B deve essere del tipo:

$$\vec{F} = \left(mg \frac{5\sqrt{2} + 1}{6\sqrt{2}} - F_2 \right) \hat{e}_1 + F_2\hat{e}_2 + F_3\hat{e}_3$$

con $F_2, F_3 \in \mathbb{R}$ arbitrarie. Si osservi che la sollecitazione \vec{F} non deve necessariamente risultare costante, data l'arbitrarietà delle componenti F_2 ed F_3 — le quali possono quindi presentare una dipendenza esplicita dal tempo.

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Equilibri del sistema

Considerato che le forze di Coriolis hanno componenti lagrangiane identicamente nulle e che esse pertanto non influenzano in alcun modo i moti del sistema

$$Q_\theta^{\text{Cor}} = \sum_i -2m_i\omega \hat{e}_2 \wedge \dot{P}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = 0 \quad Q_s^{\text{Cor}} = \sum_i -2m_i\omega \hat{e}_2 \wedge \dot{P}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial s} = 0,$$

è evidente che tutte le sollecitazioni attive applicate hanno natura posizionale conservativa: il peso, il sistema delle forze centrifughe e l'interazione elastica fra i punti A e P . Il sistema è scleronomo a vincoli bilaterali, posizionale e conservativo, per cui le sue configurazioni di equilibrio si identificano con i punti critici del potenziale totale U . Questo sarà dato dalla somma dei contributi gravitazionale, centrifugo ed elastico. Dalle ovvie relazioni geometriche:

$$A - O = R \sin \theta \hat{e}_1 - R \cos \theta \hat{e}_2 \quad P - O = -Rs \hat{e}_2$$

si deduce che:

$$A - P = R \sin \theta \hat{e}_1 + R(-\cos \theta + s) \hat{e}_2$$

in modo che il potenziale associato all'interazione elastica fra i punti A e P segue direttamente dalla definizione:

$$\begin{aligned} U_{\text{el}} &= -\frac{1}{2} \frac{2m\omega^2}{3} |A - P|^2 = -\frac{m\omega^2}{3} |R \sin \theta \hat{e}_1 + R(-\cos \theta + s) \hat{e}_2|^2 = \\ &= -\frac{m\omega^2 R^2}{3} (s^2 - 2s \cos \theta + 1). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il potenziale delle forze peso, si distinguono un contributo relativo al punto materiale P :

$$U_g^P = -mg \hat{e}_2 \cdot (P - O) = -mg(-Rs) = mgRs$$

ed uno relativo all'asta AB , di massa $2m$ e baricentro G :

$$U_g^{AB} = -2mg \hat{e}_2 \cdot (G - O) = -2mg \hat{e}_2 \cdot \frac{A - O + B - O}{2} = -2mg \left(-\frac{R}{2} \cos \theta \right) = mgR \cos \theta.$$

Al potenziale centrifugo il punto P non concorre in alcun modo, dal momento che questo si mantiene sull'asse di rotazione Oy

$$U_{cf}^P = 0$$

e l'unico termine rilevante è dunque quello attribuibile all'asta AB :

$$U_{cf}^{AB} = \frac{\omega^2}{2} [2m |(G - O) \cdot \hat{e}_1|^2 + I_{Gy}^{AB}]$$

che, tenuto conto dell'ovvia espressione del momento d'inerzia

$$I_{Gy}^{AB} = \int_0^R \left| \left(\xi - \frac{R}{2} \right) \sin \theta \right|^2 \frac{2m}{R} d\xi = \frac{2mR^2}{12} \sin^2 \theta = \frac{mR^2}{6} \sin^2 \theta,$$

diventa:

$$U_{cf}^{AB} = \frac{\omega^2}{2} \left[2m \left(\frac{3}{2} R \sin \theta \right)^2 + \frac{mR^2}{6} \sin^2 \theta \right] = \frac{7}{3} m \omega^2 R^2 \sin^2 \theta.$$

Il potenziale del sistema si scrive pertanto, omettendo le costanti additive inessenziali:

$$\begin{aligned} U(\theta, s) &= -\frac{m\omega^2 R^2}{3} (s^2 - 2s \cos \theta) + mgR(s + \cos \theta) + \frac{7}{3} m \omega^2 R^2 \sin^2 \theta = \\ &= m\omega^2 R^2 \left[-\frac{s^2}{3} + \frac{2}{3} s \cos \theta + \frac{g}{R\omega^2} (s + \cos \theta) + \frac{7}{3} \sin^2 \theta \right] \end{aligned}$$

ed ammette le derivate parziali prime:

$$U_\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta} = m\omega^2 R^2 \left(-\frac{2}{3} s \sin \theta - \frac{g}{R\omega^2} \sin \theta + \frac{14}{3} \sin \theta \cos \theta \right)$$

$$U_s = \frac{\partial U}{\partial s} = m\omega^2 R^2 \left(-\frac{2}{3} s + \frac{2}{3} \cos \theta + \frac{g}{R\omega^2} \right).$$

Gli equilibri sono tutti e soli i punti critici del potenziale, soluzioni di $U_\theta = 0$, $U_s = 0$ e dunque del sistema di equazioni:

$$\begin{cases} m\omega^2 R^2 \left(-\frac{2}{3} s \sin \theta - \frac{g}{R\omega^2} \sin \theta + \frac{14}{3} \sin \theta \cos \theta \right) = 0 \\ m\omega^2 R^2 \left(-\frac{2}{3} s + \frac{2}{3} \cos \theta + \frac{g}{R\omega^2} \right) = 0 \end{cases}$$

che omissi i fattori costanti assume la forma equivalente:

$$\begin{cases} \sin \theta \left(-\frac{2}{3}s - \frac{g}{R\omega^2} + \frac{14}{3} \cos \theta \right) = 0 \\ s = \frac{3}{2} \frac{g}{R\omega^2} + \cos \theta. \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima, questa si riduce ad una equazione trigonometrica nella sola variabile angolare θ :

$$\sin \theta \left(-\frac{2}{3} \cos \theta - 2 \frac{g}{R\omega^2} + \frac{14}{3} \cos \theta \right) = 0$$

ossia:

$$\sin \theta \left(4 \cos \theta - 2 \frac{g}{R\omega^2} \right) = 0$$

per cui gli equilibri del sistema sono individuati da:

$$\begin{cases} \sin \theta \left(\cos \theta - \frac{g}{2R\omega^2} \right) = 0 \\ s = \frac{3}{2} \frac{g}{R\omega^2} + \cos \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \sin \theta \left(\cos \theta - \frac{\lambda}{2} \right) = 0 \\ s = \frac{3}{2} \lambda + \cos \theta \end{cases}$$

in cui si è posto, per brevità,

$$\lambda = \frac{g}{R\omega^2} > 0.$$

La prima equazione si presenta in forma fattorizzata ed è certamente verificata per $\sin \theta = 0$, ossia $\theta = 0, \pi$. Ne seguono gli equilibri:

$$(\theta, s) = \left(0, \frac{3}{2} \lambda + 1 \right) \quad \text{e} \quad (\theta, s) = \left(\pi, \frac{3}{2} \lambda - 1 \right)$$

che hanno peraltro una interpretazione geometrica immediata. L'altra possibilità è che si abbia

$$\cos \theta - \frac{\lambda}{2} = 0$$

dal che seguono le ulteriori soluzioni

$$\theta = \theta^*, \quad -\theta^* \quad , \quad \theta^* = \arccos \left(\frac{\lambda}{2} \right),$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che risulti $\lambda < 2$. Poiché

$$s = \frac{3}{2} \lambda + \cos(\pm \theta^*) = \frac{3}{2} \lambda + \cos \theta^* = \frac{3}{2} \lambda + \frac{\lambda}{2} = 2\lambda,$$

i corrispondenti equilibri si scriveranno pertanto

$$(\theta, s) = (\theta^*, 2\lambda), \quad (-\theta^*, 2\lambda)$$

con la condizione di esistenza $\lambda < 2$.

(b) **Stabilità degli equilibri**

Trattandosi di sistema scleronomo posizionale conservativo, la stabilità degli equilibri può essere analizzata facendo uso dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo è necessario procedere preliminarmente al calcolo delle derivate parziali seconde del potenziale:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta}(\theta, s) &= m\omega^2 R^2 \left[-\frac{2}{3}s \cos \theta - \lambda \cos \theta + \frac{14}{3}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right] \\ U_{\theta s}(\theta, s) &= U_{s\theta}(\theta, s) = -\frac{2}{3}m\omega^2 R^2 \sin \theta \\ U_{ss}(\theta, s) &= -\frac{2}{3}m\omega^2 R^2 \end{aligned}$$

in modo che la matrice hessiana di U risulta:

$$H_U(\theta, s) = m\omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}s \cos \theta - \lambda \cos \theta + \frac{14}{3}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & -\frac{2}{3} \sin \theta \\ -\frac{2}{3} \sin \theta & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

con $U_{ss}(\theta, s)$ indipendente da (θ, s) . Si può ora procedere all'analisi di stabilità delle singole configurazioni di equilibrio individuate al punto precedente.

Configurazione $(\theta, s) = \left(0, \frac{3\lambda}{2} + 1\right)$

In questo caso le derivate seconde diventano:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta}\left(0, \frac{3\lambda}{2} + 1\right) &= m\omega^2 R^2 \left[-\frac{2}{3}\left(\frac{3\lambda}{2} + 1\right) - \lambda + \frac{14}{3} \right] = m\omega^2 R^2 (4 - 2\lambda) \\ U_{\theta s}\left(0, \frac{3\lambda}{2} + 1\right) &= U_{s\theta}\left(0, \frac{3\lambda}{2} + 1\right) = 0 \end{aligned}$$

e la matrice hessiana del potenziale si riduce a:

$$H_U\left(0, \frac{3\lambda}{2} + 1\right) = m\omega^2 R^2 \begin{pmatrix} 4 - 2\lambda & 0 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

implicando:

- (i) la **stabilità** della configurazione per $4 - 2\lambda < 0$, ossia $\lambda > 2$, poiché l'hessiana risulta definita negativa e permette di riconoscere nell'equilibrio dato un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet;
- (ii) l'**instabilità** della stessa configurazione qualora sia $4 - 2\lambda > 0$, ovvero $\lambda < 2$, con una matrice hessiana indefinita che consente di applicare il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;

(iii) il ricorrere di un **caso critico** per $\lambda = 2$, quando la matrice hessiana si presenta semidefinita, non definita negativa.

In effetti, per $\lambda = 2$ la configurazione di equilibrio diventa

$$(\theta, s) = (0, 4)$$

e il potenziale del sistema vale:

$$U(\theta, s) = m\omega^2 R^2 \left[-\frac{s^2}{3} + \frac{2}{3}s \cos \theta + 2(s + \cos \theta) + \frac{7}{3}\sin^2 \theta \right].$$

Per esaminare il comportamento della funzione potenziale nell'intorno della configurazione di equilibrio $(\theta, s) = (0, 4)$, è opportuno introdurre il cambiamento di coordinate $(\theta, s) \rightarrow (\theta, \sigma)$ definito da:

$$s = 4 + \sigma$$

e considerare quindi la funzione:

$$\begin{aligned} U(\theta, 4 + \sigma) &= \frac{m\omega^2 R^2}{3} \left[-(4 + \sigma)^2 + 2(4 + \sigma) \cos \theta + 6(4 + \sigma + \cos \theta) + 7\sin^2 \theta \right] = \\ &= \frac{m\omega^2 R^2}{3} [8 - \sigma^2 - 2(1 - \cos \theta)\sigma + 14 \cos \theta + 7\sin^2 \theta]. \end{aligned}$$

Questa può porsi nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} U(\theta, 4 + \sigma) &= \frac{m\omega^2 R^2}{3} \{8 - [\sigma + (1 - \cos \theta)]^2 + (1 - \cos \theta)^2 + 14 \cos \theta + 7\sin^2 \theta\} = \\ &= \frac{m\omega^2 R^2}{3} [8 - (\sigma + 1 - \cos \theta)^2 + 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + 14 \cos \theta + 7\sin^2 \theta] \\ &= \frac{m\omega^2 R^2}{3} [10 - (\sigma + 1 - \cos \theta)^2 + 12 \cos \theta + 6\sin^2 \theta] = \\ &= \frac{m\omega^2 R^2}{3} [16 - (\sigma + 1 - \cos \theta)^2 - 6\cos^2 \theta + 12 \cos \theta] \end{aligned}$$

a sua volta riscrivibile come:

$$\begin{aligned} U(\theta, 4 + \sigma) &= \frac{m\omega^2 R^2}{3} [22 - (\sigma + 1 - \cos \theta)^2 - 6(1 - \cos \theta)^2] = \\ &= \frac{m\omega^2 R^2}{3} \left[22 - \left[\sigma + 2\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^2 - 24\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Da quest'ultima relazione segue che $(\theta, s) = (0, 4)$ è un massimo relativo proprio di U , in quanto l'equazione

$$\left[\sigma + 2\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^2 + 24\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 0$$

con la condizione $\theta^2 + \sigma^2 < \pi^2$ implica:

$$\begin{cases} \sin(\theta/2) = 0 \\ \sigma + 2\sin^2(\theta/2) = 0 \end{cases} \quad \theta^2 + \sigma^2 < \pi^2$$

e quindi

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \sigma = 0 \end{cases}$$

per cui $(\theta, s) = (0, 4)$ è l'unico massimo di U nel disco con centro nello stesso punto e di raggio π — o inferiore, evidentemente. Il teorema di Lagrange-Dirichlet comporta la stabilità della configurazione.

Configurazione $(\theta, s) = \left(\pi, \frac{3\lambda}{2} - 1\right)$

Nella fattispecie le derivate parziali seconde del potenziale sono date da:

$$U_{\theta\theta}\left(\pi, \frac{3\lambda}{2} - 1\right) = m\omega^2 R^2 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\lambda - 1 \right) + \lambda + \frac{14}{3} \right] = m\omega^2 R^2 (2\lambda + 4)$$

$$U_{\theta s}\left(\pi, \frac{3\lambda}{2} - 1\right) = U_{s\theta}\left(\pi, \frac{3\lambda}{2} - 1\right) = 0$$

e la corrispondente matrice hessiana diventa:

$$H_U\left(\pi, \frac{3\lambda}{2} - 1\right) = m\omega^2 R^2 \begin{pmatrix} 2\lambda + 4 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

con autovalori:

$$m\omega^2 R^2 (2\lambda + 4) \quad \text{e} \quad -\frac{2}{3} m\omega^2 R^2.$$

L'essere $2\lambda + 4 \geq 4 > 0$ implica la presenza di un autovalore positivo dell'hessiana e quindi l'instabilità della configurazione in forza del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Configurazioni $(\theta, s) = (\theta^*, 2\lambda), (-\theta^*, 2\lambda)$, con $\theta^* = \arccos(\lambda/2)$ e $\lambda < 2$

Le configurazioni in esame presentano le stesse proprietà di stabilità, causa la simmetria del potenziale:

$$U(\theta, s) = U(-\theta, s) \quad \forall (\theta, s) \in \mathbb{R}^2.$$

È quindi sufficiente esaminarne una soltanto, ad esempio $(\theta, s) = (\theta^*, 2\lambda)$. La derivata parziale seconda in θ del potenziale risulta:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta}(\theta^*, 2\lambda) &= m\omega^2 R^2 \left[-\frac{2}{3} 2\lambda \frac{\lambda}{2} - \lambda \frac{\lambda}{2} + \frac{14}{3} \left(2\frac{\lambda^2}{4} - 1 \right) \right] = \\ &= m\omega^2 R^2 \left(-\frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{7}{3}\lambda^2 - \frac{14}{3} \right) = \frac{7}{6} m\omega^2 R^2 (\lambda^2 - 4) \end{aligned}$$

mentre per le derivate parziali seconde miste si ha:

$$U_{\theta s}(\theta^*, 2\lambda) = U_{s\theta}(\theta^*, 2\lambda) = -\frac{2}{3}m\omega^2 R^2 \sin \theta^* .$$

La matrice hessiana del potenziale vale allora:

$$H_U(\theta^*, 2\lambda) = m\omega^2 R^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{6}(\lambda^2 - 4) & -\frac{2}{3} \sin \theta^* \\ -\frac{2}{3} \sin \theta^* & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

con determinante sempre positivo

$$\frac{\det H_U(\theta^*, 2\lambda)}{(m\omega^2 R^2)^2} = \frac{7}{9}(4 - \lambda^2) - \frac{4}{9} \sin^2 \theta^* = \frac{28}{9} - \frac{7}{9} \lambda^2 - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \frac{\lambda^2}{4} = \frac{2}{3}(4 - \lambda^2) > 0$$

e traccia negativa

$$\frac{\text{tr} H_U(\theta^*, 2\lambda)}{m\omega^2 R^2} = -\frac{7}{6}(4 - \lambda^2) - \frac{2}{3} < 0 .$$

I segni di determinante e traccia implicano che gli autovalori di $H_U(\theta^*, 2\lambda)$ siano negativi, assicurando la stabilità della configurazione in virtù del teorema di Lagrange-Dirichlet.

(c) Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica del sistema viene determinata come somma delle energie cinetiche del punto materiale P e dell'asta rigida AB . Il punto P ha massa m e vettore posizione

$$P - O = -Rs \hat{e}_2$$

cui corrisponde la velocità assoluta

$$\dot{P} = -R\dot{s} \hat{e}_2$$

e l'energia cinetica

$$T_P = \frac{m}{2} R^2 \dot{s}^2 .$$

Quanto all'asta AB , questa non presenta punti fissi e la sua energia cinetica deve essere valutata mediante il teorema di König. A questo scopo si osserva che il baricentro G dell'asta omogenea coincide con il punto medio del segmento AB e che la sua posizione nella terna assoluta $Oxyz$ è individuata dal vettore

$$\begin{aligned} G - O &= A - O + G - A = R \sin \theta \hat{e}_1 - R \cos \theta \hat{e}_2 + \frac{R}{2} \sin \theta \hat{e}_1 + \frac{R}{2} \cos \theta \hat{e}_2 = \\ &= \frac{3}{2} R \sin \theta \hat{e}_1 - \frac{R}{2} \cos \theta \hat{e}_2 \end{aligned}$$

come è immediato verificare considerando il triangolo OAB , isoscele in A . Se ne deduce l'espressione per la velocità assoluta di G :

$$\dot{G} = \frac{3}{2} R \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_1 + \frac{R}{2} \sin \theta \dot{\theta} \hat{e}_2$$

ed il relativo modulo quadrato:

$$|\dot{G}|^2 = \left(\frac{9}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\right)R^2\dot{\theta}^2 = \left(\frac{1}{4} + 2\cos^2\theta\right)R^2\dot{\theta}^2$$

in modo che l'energia cinetica dell'asta diventa

$$T_{AB} = \frac{2m}{2}|\dot{G}|^2 + \frac{1}{2}I_{Gz}^{AB}|\vec{\omega}|^2 = m\left(\frac{1}{4} + 2\cos^2\theta\right)R^2\dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{12}\dot{\theta}^2 = mR^2\left(\frac{1}{3} + 2\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2$$

formula nella quale si è fatto uso delle relazioni per il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse baricentrale Gz e per il vettore velocità angolare istantanea:

$$I_{Gz}^{AB} = \frac{2mR^2}{12} = \frac{mR^2}{6} \quad \vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{e}_3.$$

L'energia cinetica del sistema vale pertanto:

$$T = T_{AB} + T_P = mR^2\left(\frac{1}{3} + 2\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}R^2\dot{s}^2.$$

(d) Equazioni pure del moto

Nell'ipotesi di vincoli ideali, le equazioni pure del moto sono quelle di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = 0$$

con lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$ data da:

$$\mathcal{L} = mR^2\left(\frac{1}{3} + 2\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}R^2\dot{s}^2 + m\omega^2R^2\left[-\frac{s^2}{3} + \frac{2}{3}s\cos\theta + \frac{g}{R\omega^2}(s + \cos\theta) + \frac{7}{3}\sin^2\theta\right].$$

È immediato ricavare le espressioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} &= 2mR^2\left(\frac{1}{3} + 2\cos^2\theta\right)\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) &= 2mR^2\left(\frac{1}{3} + 2\cos^2\theta\right)\ddot{\theta} - 8mR^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} &= -4mR^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 + m\omega^2R^2\left(-\frac{2}{3}s\sin\theta - \frac{g}{R\omega^2}\sin\theta + \frac{14}{3}\sin\theta\cos\theta\right) \end{aligned}$$

e quelle analoghe relative alla coordinata generalizzata s :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} &= mR^2\dot{s} & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\right) &= mR^2\ddot{s} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} &= m\omega^2R^2\left(-\frac{2}{3}s + \frac{2}{3}\cos\theta + \frac{g}{R\omega^2}\right) \end{aligned}$$

in modo che le equazioni di Lagrange diventano:

$$2mR^2\left(\frac{1}{3} + 2\cos^2\theta\right)\ddot{\theta} - 4mR^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 + m\omega^2R^2\left[\frac{2}{3}s\sin\theta + \frac{g}{R\omega^2}\sin\theta - \frac{14}{3}\sin\theta\cos\theta\right] = 0$$

e

$$mR^2\ddot{s} + m\omega^2R^2\left(\frac{2}{3}s - \frac{2}{3}\cos\theta - \frac{g}{R\omega^2}\right) = 0.$$

(e) Integrale primo

Il sistema è scleronomo, posizionale e conservativo, per cui un integrale primo è quello dell'energia meccanica $H = T - U$, che assume la forma:

$$H = mR^2\left(\frac{1}{3} + 2\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}R^2\dot{s}^2 + m\omega^2R^2\left[\frac{s^2}{3} - \frac{2}{3}s\cos\theta - \frac{g}{R\omega^2}(s + \cos\theta) - \frac{7}{3}\sin^2\theta\right].$$