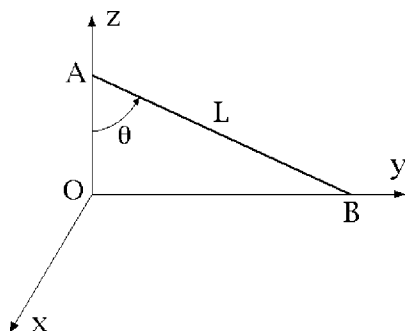


Esercizio 1

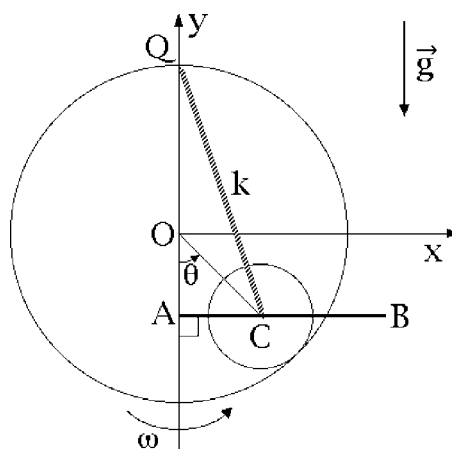
In una terna di riferimento cartesiana ortogonale $Oxyz$ si considera un'asta rigida AB di lunghezza L , i cui estremi A e B sono vincolati a scorrere lungo gli assi Oz e Oy rispettivamente. In un generico punto P dell'asta la densità è espressa da $\lambda(\xi) = m\xi/L^2$, essendo $\xi = |P - A|$. L'asta si muove secondo la legge oraria descritta da $\theta(t) = \pi t^2/2$, con $t \in [0, 1]$ (l'angolo θ è indicato in figura). Determinare:



- (a) l'asse di rotazione istantanea dell'asta all'istante $t = 1/\sqrt{3}$;
- (b) il vettore velocità angolare dell'asta a $t = 1/\sqrt{2}$;
- (c) la velocità del punto medio M dell'asta a $t = 1/\sqrt{2}$;
- (d) il baricentro dell'asta quando $\theta = \pi/3$;
- (e) la matrice d'inerzia dell'asta rispetto alla terna $Oxyz$ per $\theta = \pi/4$.

Esercizio 2

Nel piano verticale Oxy di una terna cartesiana ortogonale $Oxyz$ sono dati una guida circolare fissa, di centro O e raggio R , e un disco circolare omogeneo di raggio $r < R$ e massa m , quest'ultimo vincolato a rotolare senza strisciare lungo il bordo della guida e all'interno di questa (vedi figura). Un'asta rigida AB , di massa M , si muove inoltre lungo la direzione verticale con l'estremo A sull'asse Oy , mantenendosi ortogonale allo stesso asse e passando per il centro C del disco. Una molla ideale di costante elastica $k = \alpha mg/R$ congiunge il centro C con il punto $Q(0, R, 0)$ assegnato sulla guida, mentre su AB agisce un sistema S di forze di risultante $\vec{R} = -\beta mg \hat{e}_2$ e momento risultante in A $\vec{M}_A = \beta mg R \hat{e}_3$.



Supposti i vincoli ideali, introdotto come parametro lagrangiano l'angolo θ indicato in figura e sapendo che la terna $Oxyz$ ruota attorno all'asse Oy con velocità angolare costante $\omega \hat{e}_2$ rispetto a un riferimento inerziale, determinare:

- (a) l'espressione dell'energia cinetica del sistema;
- (b) le equazioni di Lagrange del sistema;
- (c) le configurazioni di equilibrio, analizzandone la stabilità;
- (d) le frequenze normali delle piccole oscillazioni nell'intorno di una configurazione di equilibrio a scelta.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) **Asse di rotazione istantanea a $t = 1/\sqrt{3}$**

Il moto del sistema è chiaramente piano in quanto, $\forall P \in AB$, $|P - A| = \xi \in [0, L]$, vale:

$$P - O = \xi \sin \theta(t) \hat{e}_2 + (L - \xi) \cos \theta(t) \hat{e}_3 = \xi \sin(\pi t^2/2) \hat{e}_2 + (L - \xi) \cos(\pi t^2/2) \hat{e}_3 \quad \forall t \in [0, 1].$$

L'asse di Mozzi è dunque un asse istantaneo di rotazione e risulta definito se e soltanto se la velocità angolare dell'asta è diversa da zero. Ad un generico istante $t \in [0, 1]$, tenuto conto dell'orientamento relativo dell'asse Ox e dell'angolo θ , la velocità angolare dell'asta si scrive

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\theta}(t) \hat{e}_1 = \pi t \hat{e}_1 \quad \forall t \in [0, 1] \quad (0.1)$$

e all'istante $t = 1/\sqrt{3}$ risulta diversa da zero:

$$\vec{\omega}(1/\sqrt{3}) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \hat{e}_1 \neq 0,$$

per cui l'asse istantaneo di rotazione è certamente definito, ortogonale al piano fisso Oyz e passante per il centro di rotazione istantaneo $C \in Oyz$. La posizione di C può determinarsi osservando che $\dot{A} \parallel Oz$ e $\dot{B} \parallel Oy$ e che C deve giacere sulle rette condotte per A e per B ed ortogonali ad \dot{A} e \dot{B} rispettivamente. Dunque:

$$\begin{aligned} C - O &= (B - O) \cdot \hat{e}_2 \hat{e}_2 + (A - O) \cdot \hat{e}_3 \hat{e}_3 = L \sin \theta(1/\sqrt{3}) \hat{e}_2 + L \cos \theta(1/\sqrt{3}) \hat{e}_3 = \\ &= L \sin(\pi/6) \hat{e}_2 + L \cos(\pi/6) \hat{e}_3 = \frac{L}{2} \hat{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} L \hat{e}_3 \end{aligned}$$

e l'asse di rotazione istantanea è individuato dalle equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} y = L/2 \\ z = \sqrt{3}L/2 \end{cases}$$

ovvero dalle relazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = L/2 \\ z = \sqrt{3}L/2 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

che possono anche porsi in forma vettoriale:

$$Q - O = \lambda \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \hat{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} L \hat{e}_3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

essendo Q un generico punto dell'asse.

(b) **Velocità angolare dell'asta a $t = 1/\sqrt{2}$**

Per ottenere il vettore richiesto è sufficiente sostituire il valore $t = 1/\sqrt{2}$ nell'espressione generale (0.1) già determinata. Si ha così:

$$\vec{\omega}(1/\sqrt{2}) = \dot{\theta}(1/\sqrt{2}) \hat{e}_1 = \pi \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \hat{e}_1.$$

(c) **Velocità del punto medio dell'asta a $t = 1/\sqrt{2}$**

Al generico istante $t \in [0, 1]$ gli estremi dell'asta sono individuati dalle relazioni:

$$A(t) - O = L \cos \theta(t) \hat{e}_3 \quad B(t) - O = L \sin \theta(t) \hat{e}_2$$

ed il vettore posizione del punto medio è dunque:

$$M(t) - O = \frac{1}{2} [A(t) - O + B(t) - O] = \frac{L}{2} \sin \theta(t) \hat{e}_2 + \frac{L}{2} \cos \theta(t) \hat{e}_3.$$

La velocità di M si ricava derivando in t l'espressione precedente:

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= \left[\frac{L}{2} \cos \theta(t) \hat{e}_2 - \frac{L}{2} \sin \theta(t) \hat{e}_3 \right] \dot{\theta}(t) = \frac{L}{2} [\cos \theta(t) \hat{e}_2 - \sin \theta(t) \hat{e}_3] \dot{\theta}(t) = \\ &= \frac{L}{2} [\cos(\pi t^2/2) \hat{e}_2 - \sin(\pi t^2/2) \hat{e}_3] \pi t \end{aligned}$$

che per $t = 1/\sqrt{2}$ porge:

$$\dot{M}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{L}{2} [\cos(\pi/4) \hat{e}_2 - \sin(\pi/4) \hat{e}_3] \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{L}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_3 \right] \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi L}{4} (\hat{e}_2 - \hat{e}_3).$$

(d) **Baricentro dell'asta quando $\theta = \pi/3$**

Per $\theta = \pi/3$ la parametrizzazione dell'asta è

$$P(\xi) - O = \xi \sin(\pi/3) \hat{e}_2 + (L - \xi) \cos(\pi/3) \hat{e}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \xi \hat{e}_2 + \frac{1}{2} (L - \xi) \hat{e}_3 \quad \xi \in [0, L].$$

Da questa si deduce immediatamente la massa μ dell'asta, che viene determinata per mezzo della definizione:

$$\mu = \int_{[0, L]} \lambda(\xi) |P'(\xi)| d\xi = \int_0^L \frac{m\xi}{L^2} \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{e}_2 - \frac{1}{2} \hat{e}_3 \right| d\xi = \int_0^L \frac{m\xi}{L^2} d\xi = \frac{m}{2}.$$

Il vettore posizione del baricentro G dell'asta rispetto alla terna di riferimento $Oxyz$ è allora dato dall'espressione:

$$\begin{aligned}
 G - O &= \frac{1}{\mu} \int_{[0,L]} [P(\xi) - O] \lambda(\xi) |P'(\xi)| d\xi = \\
 &= \frac{2}{m} \int_0^L \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \xi \hat{e}_2 + \frac{1}{2} (L - \xi) \hat{e}_3 \right] \frac{m\xi}{L^2} \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{e}_2 - \frac{1}{2} \hat{e}_3 \right| d\xi = \\
 &= \frac{2}{L^2} \int_0^L \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \xi^2 \hat{e}_2 + \frac{1}{2} (L\xi - \xi^2) \hat{e}_3 \right] d\xi = \\
 &= \frac{2}{L^2} \left[\frac{\sqrt{3}}{6} L^3 \hat{e}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right) \hat{e}_3 \right] = \frac{\sqrt{3}}{3} L \hat{e}_2 + \frac{L}{6} \hat{e}_3 .
 \end{aligned}$$

Osservazione. Metodo alternativo per il calcolo del baricentro.

Per il teorema dell'involuppo convesso, il baricentro dell'asta deve identificarsi con un punto G della stessa asta, individuato dal valore ξ_G del parametro ξ . Questo valore si determina per mezzo della definizione di baricentro, applicata in una terna di riferimento dove l'asta sia disposta secondo uno degli assi coordinati, con origine nell'estremo A :

$$\xi_G = |G - A| = \frac{2}{m} \int_0^L \xi \lambda(\xi) |P'(\xi)| d\xi = \frac{2}{m} \int_0^L \xi \frac{m\xi}{L^2} d\xi = \frac{2}{L^2} \int_0^L \xi^2 d\xi = \frac{2}{3} L .$$

Il vettore posizione del baricentro rispetto alla terna $Oxyz$ segue infine inserendo ξ_G nella parametrizzazione:

$$G - O = \frac{\sqrt{3}}{2} \xi_G \hat{e}_2 + \frac{1}{2} (L - \xi_G) \hat{e}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} L \hat{e}_2 + \frac{L}{6} \hat{e}_3 ,$$

risultato che coincide con quello già ottenuto.

(e) Matrice d'inerzia dell'asta rispetto alla terna $Oxyz$ per $\theta = \pi/4$

Poiché l'asta giace nel piano coordinato Oyz , comunque si assegni il valore dell'angolo θ , la matrice d'inerzia rispetto a $Oxyz$ deve assumere la forma

$$[L] = \begin{pmatrix} L_{yy} + L_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy} & L_{yz} \\ 0 & L_{yz} & L_{zz} \end{pmatrix} .$$

D'altra parte la parametrizzazione dell'asta si scrive

$$P(\xi) - O = \xi \sin(\pi/4) \hat{e}_2 + (L - \xi) \cos(\pi/4) \hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi \hat{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (L - \xi) \hat{e}_3 \quad \forall \xi \in [0, L]$$

e, posto $P(\xi) - O = x(\xi) \hat{e}_1 + y(\xi) \hat{e}_2 + z(\xi) \hat{e}_3$, il prodotto d'inerzia L_{yz} sarà dato dall'espressione:

$$L_{yz} = - \int_{[0,L]} y(\xi) z(\xi) \lambda(\xi) |P'(\xi)| d\xi = - \int_0^L \frac{\xi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (L - \xi) \frac{m\xi}{L^2} d\xi =$$

$$= -\frac{m}{2L^2} \int_0^L (L\xi^2 - \xi^3) d\xi = -\frac{m}{2L^2} \left(\frac{L^4}{3} - \frac{L^4}{4} \right) = -\frac{mL^2}{24}.$$

In modo analogo, per il momento d'inerzia rispetto a Oy vale la relazione:

$$\begin{aligned} L_{yy} &= \int_{[0,L]} z(\xi)^2 \lambda(\xi) |P'(\xi)| d\xi = \int_0^L \frac{1}{2} (L - \xi)^2 \frac{m\xi}{L^2} d\xi = \\ &= \frac{m}{2L^2} \int_0^L (L^2\xi - 2L\xi^2 + \xi^3) d\xi = \frac{m}{2L^2} \left(\frac{L^4}{2} - \frac{2}{3}L^4 + \frac{L^4}{4} \right) = \frac{mL^2}{24} \end{aligned}$$

mentre il momento d'inerzia relativo all'asse Oz risulta:

$$L_{zz} = \int_{[0,L]} y(\xi)^2 \lambda(\xi) |P'(\xi)| d\xi = \int_0^L \frac{1}{2} \xi^2 \frac{m\xi}{L^2} d\xi = \frac{mL^2}{8}$$

ed infine:

$$L_{xx} = L_{yy} + L_{zz} = \frac{mL^2}{24} + \frac{mL^2}{8} = \frac{mL^2}{6}.$$

La matrice d'inerzia cercata si riduce pertanto a:

$$[L] = mL^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/24 & -1/24 \\ 0 & -1/24 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica del sistema si determina come somma delle energie cinetiche delle due parti rigide costituenti, il disco e l'asta AB :

$$T = T_{\text{disco}} + T_{\text{asta}}.$$

Per quel che riguarda il disco, occorre determinarne preliminarmente la velocità angolare istantanea in termini del parametro lagrangiano e della sua derivata rispetto al tempo. A questo scopo, indicato con P il punto di contatto fra il disco e la guida circolare ad un istante arbitrario, la velocità di P deve coincidere con quella del punto corrispondente sulla guida, a causa della condizione di puro rotolamento. Poiché detto punto risulta chiaramente in quiete rispetto alla terna $Oxyz$ e tenuto conto che il moto del disco avviene nel piano coordinato Oxy e costituisce dunque un moto rigido piano, deve aversi $\vec{\omega}_{\text{disco}} = \nu \hat{e}_3$ e

$$0 = \dot{P} = \dot{C} + \nu \hat{e}_3 \wedge (P - C) = \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (C - O) + \nu \hat{e}_3 \wedge (P - C)$$

relazione che per il parallelismo di $P - C$ e $C - O$ assume la forma equivalente:

$$0 = \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (C - O) + \nu \hat{e}_3 \wedge (C - O) \frac{r}{R - r} = \left(\dot{\theta} + \nu \frac{r}{R - r} \right) \hat{e}_3 \wedge (C - O)$$

dalla quale si deduce infine:

$$\dot{\theta} + \nu \frac{r}{R-r} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nu = -\frac{R-r}{r} \dot{\theta} .$$

Il disco non ha punti fissi e la sua energia cinetica viene ottenuta dal teorema di König:

$$T_{\text{disco}} = \frac{m}{2} |\dot{C}|^2 + \frac{1}{2} I_{Cz}^{\text{disco}} \nu^2$$

osservando che:

$$C - O = (R-r)(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2)$$

per cui

$$\dot{C} = (R-r)(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \dot{\theta}$$

e quindi $|\dot{C}|^2 = (R-r)^2 \dot{\theta}^2$. Si ha così:

$$T_{\text{disco}} = \frac{m}{2} (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \frac{(R-r)^2}{r^2} \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 .$$

Vale la pena sottolineare che allo stesso risultato si perviene per mezzo della relazione:

$$T_{\text{disco}} = \frac{1}{2} I_{Pz}^{\text{disco}} \nu^2 = \frac{1}{2} (mr^2 + I_{Cz}^{\text{disco}}) \nu^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} mr^2 \frac{(R-r)^2}{r^2} \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$$

considerato che l'energia cinetica dipende dall'atto di moto — e non già dal moto — del sistema e che l'atto di moto del disco coincide con quello di un disco collocato nella stessa posizione istantanea e posto in rotazione attorno all'asse Pz — asse istantaneo di rotazione del disco.

Quanto all'asta AB , questa è vincolata a muoversi di moto traslatorio lungo la direzione verticale; la velocità angolare risulta quindi identicamente nulla e l'energia cinetica si scrive considerando la velocità di un qualsiasi punto di AB :

$$T_{\text{asta}} = \frac{1}{2} M |\dot{A}|^2 = \frac{M}{2} \left| \frac{d}{dt} [-(R-r) \cos \theta \hat{e}_2] \right|^2 = \frac{M}{2} (R-r)^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 .$$

Pertanto:

$$T = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{M}{2} (R-r)^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 .$$

(b) Equazioni di Lagrange

La determinazione delle equazioni lagrangiane del moto richiede che si calcolino le componenti generalizzate di tutte le sollecitazioni attive agenti sul sistema, con gli eventuali potenziali. La forza peso agisce sia sull'asta AB che sul disco circolare ed ammette un potenziale dato dalla somma dei potenziali gravitazionali delle due parti rigide:

$$\begin{aligned} U_g &= U_g^{\text{asta}} + U_g^{\text{disco}} = -Mg(C-O) \cdot \hat{e}_2 - mg(C-O) \cdot \hat{e}_2 = \\ &= -(M+m)g(C-O) \cdot \hat{e}_2 = (M+m)g(R-r) \cos \theta . \end{aligned}$$

Lo stesso dicasi per il potenziale delle forze centrifughe, che facendo uso del teorema di König si scrive:

$$\begin{aligned} U_{\text{cf}} &= U_{\text{cf}}^{\text{asta}} + U_{\text{cf}}^{\text{disco}} = \frac{\omega^2}{2} I_{Oy}^{\text{asta}} + \frac{\omega^2}{2} I_{Oy}^{\text{disco}} = \frac{\omega^2}{2} I_{Oy}^{\text{asta}} + \frac{\omega^2}{2} m(R-r)^2 \sin^2 \theta + \frac{\omega^2}{2} I_{Cy}^{\text{disco}} = \\ &= m \frac{\omega^2}{2} (R-r)^2 \sin^2 \theta + \text{costante} , \end{aligned}$$

mentre per l'interazione elastica dovuta alla molla QC il potenziale vale:

$$\begin{aligned} U_{\text{el}} &= -\frac{k}{2} |C-Q|^2 = -\frac{\alpha mg}{2R} [(R-r)^2 + R^2 + 2(R-r)R \cos \theta] = \\ &= -\alpha mg(R-r) \cos \theta + \text{costante} \end{aligned}$$

come si deduce immediatamente applicando il teorema di Carnot al triangolo OBQ .

L'unica componente lagrangiana delle sollecitazioni agenti sull'asta è data formalmente dall'espressione:

$$Q_\theta = \sum_{P \in AB} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

con

$$P-O = \xi \hat{e}_1 - (R-r) \cos \theta \hat{e}_2 \quad \forall \xi \in [0, L] ,$$

essendo $L > R$ la lunghezza dell'asta. Di qui segue:

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \sum_{P \in AB} \vec{F}_P \cdot (R-r) \sin \theta \hat{e}_2 = (R-r) \sin \theta \vec{R} \cdot \hat{e}_2 = \\ &= (R-r) \sin \theta (-\beta mg \hat{e}_2) \cdot \hat{e}_2 = -\beta mg(R-r) \sin \theta \end{aligned}$$

che ammette il potenziale:

$$U_S = \beta mg(R-r) \cos \theta .$$

Si osservi che il momento risultante \vec{M}_A non ha alcun effetto sul moto del sistema. Il potenziale totale è ora definito come somma dei potenziali relativi alle singole sollecitazioni posizionali e conservative:

$$U(\theta) = U_g + U_{\text{cf}} + U_{\text{el}} + U_S = mg(R-r) \left(\frac{M}{m} + 1 - \alpha + \beta \right) \cos \theta + \frac{m\omega^2}{2} (R-r)^2 \sin^2 \theta ,$$

per cui la lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$ del sistema assume la forma:

$$\mathcal{L} = \left(\frac{3}{4}m + \frac{M}{2} \sin^2 \theta \right) (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + mg(R-r) \left(\frac{M}{m} + 1 - \alpha + \beta \right) \cos \theta + \frac{m\omega^2}{2} (R-r)^2 \sin^2 \theta .$$

Oltre alle forze centrifughe, nella terna di riferimento non inerziale $Oxyz$ agiscono anche le forze di Coriolis, la cui sola componente lagrangiana è tuttavia identicamente nulla:

$$Q_\theta^{\text{Cor}} = \sum_i -2m_i \omega \hat{e}_2 \wedge \dot{P}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = \sum_i 0 = 0$$

a causa della ortogonalità fra sollecitazione e derivata parziale in θ del generico punto di applicazione P_i . Le equazioni lagrangiane del moto si riducono pertanto all'equazione scalare:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

e poiché:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\theta} + M(R-r)^2\sin^2\theta\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \left(\frac{3}{2}m + M\sin^2\theta \right) (R-r)^2\ddot{\theta} + 2M(R-r)^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= M(R-r)^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 - \\ &\quad - mg(R-r) \left(\frac{M}{m} + 1 - \alpha + \beta \right) \sin\theta + m\omega^2(R-r)^2\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

si conclude che:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3}{2}m + M\sin^2\theta \right) (R-r)^2\ddot{\theta} + M(R-r)^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 + \\ &+ mg(R-r) \left(\frac{M}{m} + 1 - \alpha + \beta \right) \sin\theta - m\omega^2(R-r)^2\sin\theta\cos\theta = 0 \end{aligned}$$

è l'equazione cercata.

(c) Configurazioni di equilibrio ed analisi di stabilità delle stesse

Data la natura posizionale conservativa del sistema, le configurazioni di equilibrio di questo sono tutti e soli i punti critici del potenziale totale, determinabili uguagliando a zero la derivata prima di U :

$$U_\theta(\theta) = \frac{\partial U}{\partial \theta}(\theta) = -mg(R-r) \left(\frac{M}{m} + 1 - \alpha + \beta \right) \sin\theta + m\omega^2(R-r)^2\sin\theta\cos\theta$$

e quindi risolvendo l'equazione trigonometrica:

$$\sin\theta \left[-mg(R-r) \left(\frac{M}{m} + 1 - \alpha + \beta \right) + m\omega^2(R-r)^2\cos\theta \right] = 0 . \quad (0.2)$$

Per semplicità si supporrà che

$$\frac{M}{m} + 1 - \alpha + \beta > 0 .$$

L'equazione (0.2) si presenta in forma fattorizzata e viene risolta equagliando a zero i singoli fattori a primo membro. Più precisamente:

(i) l'equazione $\sin\theta = 0$ implica gli equilibri:

$$\theta = 0 , \quad \pi ,$$

che sono sempre definiti;

(ii) l'equazione residua

$$-g\left(\frac{M}{m} + 1 - \alpha + \beta\right) + \omega^2(R - r) \cos \theta = 0$$

conduce alle ulteriori soluzioni:

$$\theta = \pm\theta^* = \pm \arccos \left[\frac{g}{\omega^2(R - r)} \left(\frac{M}{m} + 1 - \alpha + \beta \right) \right] = \pm \arccos \lambda$$

definite e distinte dalle precedenti a patto che si abbia

$$\lambda := \frac{g}{\omega^2(R - r)} \left(\frac{M}{m} + 1 - \alpha + \beta \right) < 1 .$$

Per l'analisi di stabilità occorre esaminare la derivata seconda:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta}(\theta) &= \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta) = -mg(R - r) \left(\frac{M}{m} + 1 - \alpha + \beta \right) \cos \theta + m\omega^2(R - r)^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \\ &= m\omega^2(R - r)^2 \left[-\frac{g}{\omega^2(R - r)} \left(\frac{M}{m} + 1 - \alpha + \beta \right) \cos \theta + 2\cos^2 \theta - 1 \right] = \\ &= m\omega^2(R - r)^2(-\lambda \cos \theta + 2\cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

per ciascuna delle configurazioni di equilibrio individuate.

Configurazione $\theta = 0$. La derivata seconda del potenziale è data in questo caso dall'espressione:

$$U_{\theta\theta}(0) = m\omega^2(R - r)^2(1 - \lambda)$$

che non avendo segno definito richiede la discussione di tre diversi casi.

- Se $\lambda > 1$ vale $U_{\theta\theta}(0) < 0$ per cui la configurazione $\theta = 0$ è un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet;
- per $\lambda < 1$ risulta $U_{\theta\theta}(0) > 0$ e si ha instabilità per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- se infine $\lambda = 1$ segue che $U_{\theta\theta}(0) = 0$ e ricorre un caso critico. In effetti il potenziale del sistema diventa:

$$U(\theta) = m\omega^2(R - r)^2 \left(\lambda \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) = m\omega^2(R - r)^2 \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right)$$

e poiché:

$$\begin{aligned} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + O(\theta^5) + \frac{1}{2} \theta^2 \left[1 - \frac{\theta^2}{6} + O(\theta^4) \right]^2 = \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + O(\theta^5) + \frac{\theta^2}{2} \left[1 - \frac{\theta^2}{3} + O(\theta^4) \right] = 1 - \frac{\theta^4}{8} + O(\theta^5) \quad (\theta \rightarrow 0), \end{aligned}$$

la configurazione risulta un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue sempre dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $\theta = \pi$. In questo caso la derivata seconda del potenziale si presenta sempre positiva:

$$U_{\theta\theta}(\pi) = m\omega^2(R-r)^2(1+\lambda) > 0$$

e comporta l'instabilità della configurazione in virtù del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Configurazioni $\theta = \pm\theta^*$. Queste configurazioni manifestano necessariamente le stesse proprietà di stabilità in quanto U è funzione pari del suo argomento:

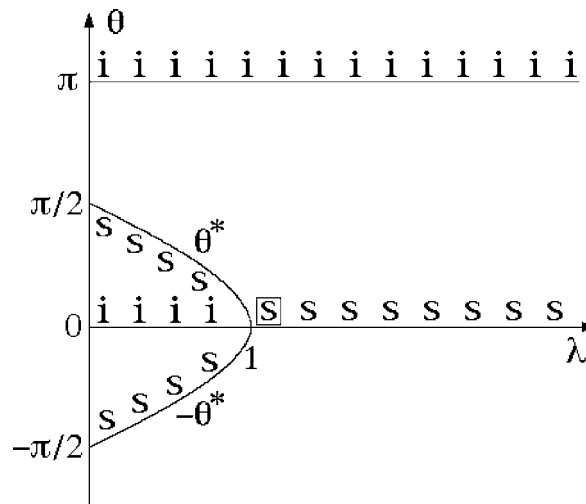
$$U(\theta) = m\omega^2(R-r)^2\left(\lambda\cos\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) = U(-\theta) \quad \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

È pertanto sufficiente prendere in esame una sola di dette configurazioni, ad esempio la prima. Per $\theta = \theta^*$ si ha così:

$$U_{\theta\theta}(\theta^*) = m\omega^2(R-r)^2(-\lambda^2 + 2\lambda^2 - 1) = -m\omega^2(R-r)^2(1-\lambda^2)$$

che per via della condizione di esistenza $\lambda < 1$ assume sempre segno negativo. θ^* e $-\theta^*$ costituiscono dunque dei punti di massimo relativo proprio del potenziale e sono stabili per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

I risultati dell'analisi di stabilità appena completata possono essere riassunti nel diagramma di biforcazione riportato di seguito:



(d) Frequenze normali delle piccole oscillazioni

Lo studio delle piccole oscillazioni può essere condotto nell'intorno della configurazione $\theta = 0$ per $\lambda > 1$, oppure delle configurazioni θ^* e $-\theta^*$, quando definite e distinte dalla precedente — ossia per $\lambda < 1$. In tutti i casi considerati, infatti, le configurazioni risultano stabili per Lagrange-Dirichlet e la derivata seconda del potenziale è strettamente negativa.

Configurazione $\theta = 0$, per $\lambda > 1$. La lagrangiana delle piccole oscillazioni nell'intorno del punto $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ dello spazio delle fasi si scrive facilmente calcolando in $\theta = 0$ il coefficiente dell'energia cinetica e approssimando il potenziale con il corrispondente polinomio di Taylor al secondo ordine:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{p.o.} &= \left[\frac{3}{4}m(R-r)^2 + \frac{M}{2}(R-r)^2 \sin^2\theta \right] \Big|_{\theta=0} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}U_{\theta\theta}(0)\theta^2 = \\ &= \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(R-r)^2(1-\lambda)\theta^2 .\end{aligned}$$

L'equazione delle piccole oscillazioni nell'intorno della configurazione di equilibrio prescelta diventa allora:

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} - m\omega^2(R-r)^2(1-\lambda)\theta = 0$$

ed equivale a:

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\omega^2(\lambda-1)\theta = 0$$

per cui l'unica pulsazione normale risulta:

$$\omega_{p.o.} = \sqrt{\frac{2}{3}(\lambda-1)} \omega$$

alla quale corrisponde la frequenza normale:

$$\nu_{p.o.} = \frac{1}{2\pi}\omega_{p.o.} = \sqrt{\frac{2}{3}(\lambda-1)} \frac{\omega}{2\pi} .$$

Configurazioni $\theta = \pm\theta^*$ — $\lambda < 1$. Nel caso della configurazione $\theta = \theta^*$ la lagrangiana delle piccole oscillazioni assume la forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{p.o.} &= \left[\frac{3}{4}m(R-r)^2 + \frac{M}{2}(R-r)^2 \sin^2\theta \right] \Big|_{\theta=\theta^*} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}U_{\theta\theta}(\theta^*)(\theta - \theta^*)^2 = \\ &= \left[\frac{3}{4}m(R-r)^2 + \frac{M}{2}(R-r)^2(1-\lambda) \right] \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(R-r)^2(1-\lambda^2)(\theta - \theta^*)^2\end{aligned}$$

cui corrispondono l'equazione delle piccole oscillazioni:

$$\left[\frac{3}{2}m(R-r)^2 + M(R-r)^2(1-\lambda) \right] \ddot{\theta} + m\omega^2(R-r)^2(1-\lambda^2)(\theta - \theta^*) = 0$$

e la frequenza normale:

$$\nu_{p.o.} = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{1-\lambda^2} \left[\frac{3}{2} + \frac{M}{m}(1-\lambda) \right]^{-1/2} .$$

Come un calcolo immediato consente di verificare agevolmente, la stessa frequenza normale caratterizza anche le piccole oscillazioni nell'intorno della configurazione $\theta = -\theta^*$.