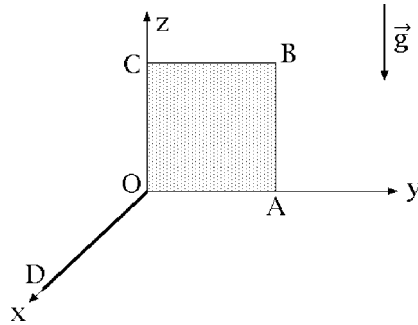


Esercizio 1

In una terna di riferimento $Oxyz$ si consideri un corpo rigido pesante costituito da una lamina quadrata $OABC$ e da un'asta OD , saldate rigidamente in O . L'asta OD — omogenea — è collocata lungo l'asse Ox , ha lunghezza L e massa m . La lamina ha lato L ed è posta nel primo quadrante del piano coordinato Oyz , con una densità areale di massa data dall'espressione:

$$\sigma(y, z) = \frac{m}{L^4}y(L - z)$$

nel generico punto $P \in OABC$ di coordinate $(y, z) \in [0, L]^2$. L'intero sistema poggia sul piano orizzontale Oxy , che si assumere perfettamente liscio.

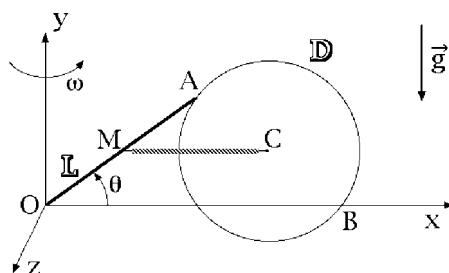


Determinare:

- la massa totale del sistema;
- la posizione del centro di massa del sistema;
- il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse verticale Oz ;
- se la configurazione del sistema è di equilibrio;
- se la natura della configurazione (equilibrio/non equilibrio) può essere alterata fissando rigidamente sulla superficie del quadrato un punto materiale S di massa conveniente μ in una posizione opportuna.

Esercizio 2

Un sistema pesante è formato da un'asta \mathbb{L} di estremi O ed A e da un disco circolare \mathbb{D} , entrambi rigidi. \mathbb{L} ha l'estremo O fisso nell'origine di una terna cartesiana ortogonale $Oxyz$, con l'asse Oy verticale, mentre A è incernierato ad un punto fissato sul bordo del disco \mathbb{D} . \mathbb{L} ha massa m_1 e lunghezza L , con densità in un generico punto $P \in \mathbb{L}$ data da $\lambda(\xi)$, essendo $\xi = |P - O| \in [0, L]$. Il disco \mathbb{D} è omogeneo, con massa m_2 , raggio $L/2$ e centro C . Il punto B del bordo del disco diametralmente opposto ad A è vincolato a muoversi lungo l'asse orizzontale Ox . Asta e disco si muovono nel piano verticale Oxy , che ruota attorno ad Oy con velocità angolare costante ω rispetto ad una terna inerziale. Infine, una molla di costante elastica $k > 0$ è applicata fra C ed il punto medio M dell'asta.



Nell'ipotesi che i vincoli siano ideali, e facendo uso dell'angolo θ mostrato in figura come coordinata lagrangiana, determinare:

- l'energia cinetica del sistema nel riferimento $Oxyz$;
- le equazioni lagrangiane del moto del sistema;
- le configurazioni di equilibrio relative alla stessa terna;
- le proprietà di stabilità delle configurazioni di equilibrio;
- la frequenza delle piccole oscillazioni nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile a scelta.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Massa del sistema

La massa M del sistema viene determinata come somma delle masse dell'asta e della lamina quadrata. Poiché la massa m dell'asta OA si assume nota, si tratta di ricavare la massa di $OABC$ integrando la densità σ sull'intera superficie del quadrato. La massa viene quindi determinata dall'espressione:

$$\begin{aligned} M &= m + \int_0^L dy \int_0^L dz \frac{m}{L^4} y(L-z) = m + \int_0^L y dy \int_0^L (L-z) dz \frac{m}{L^4} = \\ &= m + \frac{m}{L^4} \frac{L^2}{2} \left[-\frac{(L-z)^2}{2} \right]_0^L = m + \frac{m}{L^4} \frac{L^2}{2} \frac{L^2}{2} = m + \frac{m}{4} = \frac{5}{4}m \end{aligned}$$

(b) Centro di massa

Il vettore posizione del baricentro del sistema, rispetto alla terna $Oxyz$, si ricava applicando la proprietà distributiva all'asta ed alla lamina quadrata. Il baricentro dell'asta omogenea OA coincide con il suo punto medio, mentre per la lamina quadrata il centro di massa deve essere individuato per mezzo della definizione, che richiede il calcolo di un integrale doppio. Per il baricentro G del sistema si ha pertanto:

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{4}{5m} \left[m \frac{L}{2} \hat{e}_1 + \int_0^L dy \int_0^L dz \frac{m}{L^4} y(L-z) (y \hat{e}_2 + z \hat{e}_3) \right] = \\ &= \frac{4}{5} \left[\frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{1}{L^4} \int_0^L y^2 dy \int_0^L (L-z) dz \hat{e}_2 + \frac{1}{L^4} \int_0^L y dy \int_0^L (L-z)z dz \hat{e}_3 \right] = \end{aligned}$$

ed eseguendo gli integrali:

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{4}{5} \left\{ \frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{1}{L^4} \frac{L^3}{3} \frac{L^2}{2} \hat{e}_2 + \frac{1}{L^4} \frac{L^2}{2} \left[\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^L \hat{e}_3 \right\} = \\ &= \frac{4}{5} \left\{ \frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{L}{6} \hat{e}_2 + \frac{1}{2L^2} \left[\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right] \hat{e}_3 \right\} = \\ &= \frac{4}{5} \left[\frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{L}{6} \hat{e}_2 + \frac{L}{12} \hat{e}_3 \right] = \frac{2}{5}L \hat{e}_1 + \frac{2}{15}L \hat{e}_2 + \frac{1}{15}L \hat{e}_3 \end{aligned}$$

che costituisce il risultato richiesto.

(c) Momento d'inerzia rispetto all'asse verticale Oz

Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse Oz è la somma dei momenti d'inerzia, relativi allo stesso asse, di asta e lamina quadrata. Risulta perciò:

$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^L x^2 \frac{m}{L} dx + \int_0^L dy \int_0^L dz y^2 \frac{m}{L^4} y(L-z) = \frac{m}{L} \frac{L^3}{3} + \int_0^L y^3 dy \int_0^L (L-z) dz \frac{m}{L^4} = \\ &= \frac{mL^2}{3} + \frac{L^4}{4} \frac{L^2}{2} \frac{m}{L^4} = \frac{mL^2}{3} + \frac{mL^2}{8} = \frac{11}{24}mL^2. \end{aligned}$$

(d) **Equilibrio**

L'involuppo convesso della base d'appoggio, costituita dai segmenti OD ed OA , è il triangolo rettangolo isoscele OAD , i cui punti $P(x, y)$ soddisfano tutti e soli il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq L \end{cases}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché la configurazione sia di equilibrio è che la proiezione ortogonale Q del baricentro G sul piano d'appoggio Oxy — centro di pressione — appartenga ad OAD . Nella fattispecie:

$$x_Q = x_G = \frac{2}{5}L \geq 0 \quad y_Q = y_G = \frac{2}{15}L \geq 0$$

per cui:

$$x_Q + y_Q = \frac{2}{5}L + \frac{2}{15}L = \frac{8}{15}L < L$$

e quindi la configurazione costituisce un equilibrio per il sistema.

(e) **Variazione dell'equilibrio a seguito della introduzione di un punto materiale addizionale sulla superficie della lamina quadrata**

Il baricentro del sistema lamina-punto, $OABC \cup S$, appartiene sempre al relativo involuppo convesso, lo stesso quadrato $OABC$. Indicate con y^* e z^* le coordinate di tale baricentro, si avrà per il baricentro del sistema l'espressione:

$$G - O = \frac{1}{\frac{5}{4}m + \mu} \left[m \frac{L}{2} \hat{e}_1 + (y^* \hat{e}_2 + z^* \hat{e}_3) \left(\frac{m}{4} + \mu \right) \right] \quad y^*, z^* \in [0, L]$$

mentre il centro di pressione sarà individuato da:

$$Q - O = \frac{m}{\frac{5}{4}m + \mu} \frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{\frac{m}{4} + \mu}{\frac{5}{4}m + \mu} y^* \hat{e}_2 \quad y^* \in [0, L]$$

in modo che:

$$x_Q = \frac{m}{\frac{5}{4}m + \mu} \frac{L}{2} > 0 \quad y_Q = \frac{\frac{m}{4} + \mu}{\frac{5}{4}m + \mu} y^* \geq 0$$

e

$$x_Q + y_Q = \frac{m \frac{L}{2} + \left(\frac{m}{4} + \mu \right) y^*}{\frac{5}{4}m + \mu} < \frac{mL + \left(\frac{m}{4} + \mu \right) L}{\frac{5}{4}m + \mu} = L$$

e la condizione di equilibrio risulta sempre verificata, quali che siano la massa $\mu > 0$ e le coordinate $y_S \in [0, L]$ e $z_S \in [0, L]$ del punto addizionale S .

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Energia cinetica

L'energia cinetica del sistema viene determinata come somma di due contributi, l'uno dovuto all'asta \mathbb{L} e l'altro al disco \mathbb{D} .

Energia cinetica dell'asta

L'asta ha l'estremo O fisso e la sua velocità angolare è data dall'espressione:

$$\vec{\omega}_{\mathbb{L}} = \dot{\theta} \hat{e}_3 ;$$

per l'energia cinetica si ha dunque:

$$T_{\mathbb{L}} = \frac{1}{2} \Lambda \dot{\theta}^2$$

essendo Λ il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse fisso Oz :

$$\Lambda = \int_0^L \xi^2 \lambda(\xi) d\xi .$$

Energia cinetica del disco \mathbb{D}

Il disco \mathbb{D} è privo di punti fissi e la sua energia cinetica può essere convenientemente espressa per mezzo del teorema di König. A questo scopo si ricava preliminarmente il vettore posizione del baricentro C in termini della coordinata lagrangiana θ :

$$\begin{aligned} C - O &= A - O + C - A = L \cos \theta \hat{e}_1 + L \sin \theta \hat{e}_2 + \frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_2 = \\ &= \frac{3}{2} L \cos \theta \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_2 \end{aligned}$$

e si deriva rispetto al tempo la relazione così ottenuta per avere la velocità del baricentro stesso rispetto alla terna $Oxyz$:

$$\dot{C} = \left(-\frac{3}{2} L \sin \theta \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_2 \right) \dot{\theta} .$$

L'energia cinetica del baricentro risulta perciò:

$$\frac{m_2}{2} |\dot{C}|^2 = \frac{m_2}{2} \left[\frac{9}{4} L^2 \sin^2 \theta + \frac{L^2}{4} \cos^2 \theta \right] \dot{\theta}^2 = \frac{m_2}{2} L^2 \dot{\theta}^2 \left[\frac{1}{4} + 2 \sin^2 \theta \right]$$

mentre quella del moto attorno al baricentro si deduce osservando che detto moto è di tipo rotatorio attorno all'asse fisso Cz e con velocità angolare $-\dot{\theta} \hat{e}_3$:

$$T'_{\mathbb{D}} = \frac{1}{2} I_{Cz} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{L}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{m_2 L^2}{16} \dot{\theta}^2 .$$

Il teorema di König consente allora di scrivere l'espressione dell'energia cinetica di \mathbb{D} nella forma:

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{m_2}{2} |\dot{C}|^2 + T'_{\mathbb{D}} = m_2 L^2 \dot{\theta}^2 \left(\sin^2 \theta + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) = m_2 L^2 \dot{\theta}^2 \left(\frac{3}{16} + \sin^2 \theta \right) .$$

Energia cinetica del sistema

Basta ora sommare le energie cinetiche dell'asta \mathbb{L} e del disco \mathbb{D} per pervenire all'energia cinetica totale del sistema, relativa alla terna $Oxyz$:

$$T = T_{\mathbb{L}} + T_{\mathbb{D}} = \left[\frac{\Lambda}{2} + m_2 L^2 \left(\frac{3}{16} + \sin^2 \theta \right) \right] \dot{\theta}^2 .$$

(b) Equazioni di Lagrange

Tutte le sollecitazioni attive applicate al sistema sono di natura posizionale e conservativa. Si tratta quindi di procedere alla determinazione del potenziale del sistema, che risulterà dalla somma dei potenziali delle singole sollecitazioni. Una volta individuato il potenziale totale, la somma di questo con l'energia cinetica ottenuta al punto precedente definirà la lagrangiana del sistema, la quale a sua volta consentirà di scrivere l'unica equazione lagrangiana del moto del sistema.

Potenziale

Le sollecitazioni attive agenti sul sistema sono il peso, l'interazione elastica fra i punti M e C e le forze centrifughe, unitamente alle forze di Coriolis. Si verificherà nel seguito che le sollecitazioni di Coriolis hanno componente lagrangiana nulla e che non influiscono perciò sul moto del sistema. Ci si può dunque limitare a ricavare i soli potenziali delle sollecitazioni residue. Il potenziale della forza peso è la somma dei potenziali gravitazionali dell'asta \mathbb{L} e del disco \mathbb{D} . Per l'asta si ha immediatamente l'espressione:

$$U_g^{\mathbb{L}} = -m_1 g \xi_G \sin \theta$$

in cui:

$$\xi_G = \frac{1}{m_1} \int_0^L \xi \lambda(\xi) d\xi ,$$

mentre per il disco vale invece:

$$U_g^{\mathbb{D}} = -m_2 g \frac{L}{2} \sin \theta$$

in modo che il potenziale gravitazionale totale diventa:

$$U_g = U_g^{\mathbb{L}} + U_g^{\mathbb{D}} = - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g \sin \theta .$$

Il calcolo del potenziale elastico è altrettanto semplice e porge:

$$U_{el} = -\frac{k}{2} |C - M|^2 = -\frac{k}{2} (L \cos \theta)^2 = -\frac{kL^2}{2} \cos^2 \theta .$$

Quanto alle sollecitazioni centrifughe, il corrispondente potenziale viene espresso come somma di un contributo relativo all'asta:

$$U_{\text{cf}}^{\text{L}} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^L \xi^2 \cos^2 \theta \lambda(\xi) d\xi = \frac{\omega^2}{2} \Lambda \cos^2 \theta$$

e di uno relativo al disco:

$$U_{\text{cf}}^{\text{D}} = \frac{\omega^2}{2} \left[m_2 \left(L \cos \theta + \frac{L}{2} \cos \theta \right)^2 + I_{Cy} \right]$$

che peraltro, essendo I_{Cy} costante per simmetria, si può scrivere nella forma ridotta:

$$U_{\text{cf}}^{\text{D}} = \frac{9}{8} m_2 L^2 \omega^2 \cos^2 \theta .$$

Il potenziale centrifugo del sistema diviene pertanto:

$$U_{\text{cf}} = \frac{\omega^2}{2} \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \cos^2 \theta .$$

Si è ora in condizione di determinare il potenziale totale del sistema, come somma dei potenziali gravitazionale, elastico e centrifugo:

$$U = U_{\text{g}} + U_{\text{el}} + U_{\text{cf}} = - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g \sin \theta - \frac{kL^2}{2} \cos^2 \theta + \frac{\omega^2}{2} \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \cos^2 \theta .$$

Lagrangiana

La lagrangiana del sistema è per definizione la somma dell'energia cinetica e del potenziale totale, e si scrive perciò:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T + U = & \left[\frac{\Lambda}{2} + m_2 L^2 \left(\frac{3}{16} + \sin^2 \theta \right) \right] \dot{\theta}^2 - \\ & - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g \sin \theta - \frac{kL^2}{2} \cos^2 \theta + \frac{\omega^2}{2} \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \cos^2 \theta . \end{aligned}$$

Equazioni di Lagrange

Poiché il sistema è olonomo e ad un grado di libertà, le equazioni di Lagrange si riducono all'unica equazione:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_{\theta}^{\text{Cor}}$$

con $Q_{\theta}^{\text{Cor}} = 0$ in quanto il moto del sistema avviene in un piano passante per l'asse di rotazione Oy della terna di riferimento $Oxyz$ rispetto alla terna inerziale. Sostituendo l'espressione della lagrangiana si perviene dunque all'equazione pura del moto:

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{\theta} \left[\Lambda + m_2 L^2 \left(\frac{3}{8} + 2 \sin^2 \theta \right) \right] \right] =$$

$$= -\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g \cos \theta + \left[kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)\right] \sin \theta \cos \theta .$$

(c) **Configurazioni di equilibrio relativo**

Le configurazioni di equilibrio relative alla terna non inerziale $Oxyz$ sono i punti critici del potenziale totale U e si ottengono dunque risolvendo l'equazione trigonometrica:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}(\theta) = -\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g \cos \theta + \left[kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)\right] \sin \theta \cos \theta = 0$$

ovvero l'equazione equivalente:

$$\cos \theta \left[-1 + \frac{kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)}{g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)} \sin \theta \right] = 0 .$$

Tutte le soluzioni di tale equazione si ottengono annullando i singoli fattori presenti a primo membro. Da $\cos \theta = 0$ si deducono le soluzioni:

$$\theta = +\frac{\pi}{2} , \quad -\frac{\pi}{2}$$

sempre definite. Le soluzioni associate a:

$$-1 + \frac{kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)}{g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)} \sin \theta = 0$$

sono invece definite e distinte dalle precedenti se e solo se

$$\frac{g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)}{\left|kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)\right|} < 1 \tag{0.1}$$

nel qual caso risulta:

$$\theta = \theta^* , \quad \pi - \theta^*$$

essendosi posto:

$$\theta^* = \arcsin \left[\frac{g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)}{kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)} \right] .$$

(d) **Stabilità degli equilibri**

Per l'analisi di stabilità delle configurazioni di equilibrio occorre analizzare il segno della derivata seconda del potenziale totale:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta) = U_{\theta\theta}(\theta) = \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2}\right) g \sin \theta + \left[kL^2 - \omega^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \right] (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

che conviene studiare separatamente per ogni singola configurazione di equilibrio. Nella discussione che segue è anche opportuno introdurre, per brevità, le notazioni:

$$\alpha = \frac{kL^2 + g \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right)}{\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2} \quad \beta = \frac{kL^2 - g \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right)}{\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2}$$

con

$$\beta < \alpha \quad \text{e} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{kL^2}{\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2} .$$

Configurazione $\theta = +\pi/2$. Nel caso di $\theta = +\pi/2$ vale:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta}(\pi/2) &= \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g - \left[kL^2 - \omega^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \right] = \\ &= \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g - kL^2 + \omega^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \end{aligned}$$

in modo che:

(i) per $U_{\theta\theta}(+\pi/2) > 0$, ovvero:

$$\omega^2 > \frac{kL^2 - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g}{\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2} = \beta ,$$

la configurazione $\theta = \pi/2$ risulta instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;

(ii) se viceversa $U_{\theta\theta}(+\pi/2) < 0$ si ha equivalentemente

$$\omega^2 < \frac{kL^2 - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g}{\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2} = \beta$$

e quindi $\theta = \pi/2$ è un massimo relativo proprio del potenziale U , stabile in forza del teorema di Lagrange-Dirichlet;

(iii) qualora infine si verifichi la condizione $U_{\theta\theta}(+\pi/2) = 0$, ossia:

$$\omega^2 = \frac{kL^2 - \left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g}{\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2} = \beta ,$$

ricorre un caso critico, non potendosi riconoscere in $\theta = +\pi/2$ la presenza di un massimo relativo proprio di U per mezzo della sola derivata seconda e non potendosi perciò applicare né il teorema di Lagrange-Dirichlet né quello di inversione parziale.

Configurazione $\theta = -\pi/2$. La configurazione $\theta = -\pi/2$ conduce a:

$$U_{\theta\theta}(-\pi/2) = -\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g - kL^2 + \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)$$

e risulta perciò:

(i) instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet qualora si abbia:

$$\omega^2 > \frac{kL^2 + \left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g}{\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2} = \alpha ;$$

(ii) stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet nel caso che:

$$\omega^2 < \frac{kL^2 + \left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g}{\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2} = \alpha ;$$

(iii) critica per

$$\omega^2 = \frac{kL^2 + \left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g}{\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2} = \alpha ,$$

avendosi $U_{\theta\theta}(-\pi/2) = 0$.

Configurazioni $\theta = \theta^*$, $\pi - \theta^*$. Vale la pena di osservare preliminarmente che $U(\pi - \theta) = U(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}$, per cui le proprietà di stabilità di θ^* e $\pi - \theta^*$ sono le stesse. È dunque sufficiente analizzare la stabilità di una sola delle due configurazioni di equilibrio, ad esempio di θ^* . Dall'espressione di θ^* si ricava:

$$U_{\theta\theta}(\theta^*) = \cos^2\theta^* \left[\frac{kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)}{g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)} \right] \neq 0$$

in forza della condizione di esistenza (0.1). Il segno di $U_{\theta\theta}(\theta^*)$ coincide con quello di:

$$kL^2 - \omega^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)$$

e dunque $\theta = \theta^*$ risulta:

stabile per $\omega^2 > kL^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)^{-1}$ in virtù del teorema di Lagrange-Dirichlet;

instabile per $\omega^2 < kL^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)^{-1}$ in conseguenza del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Le configurazioni di equilibrio θ^* e $\pi - \theta^*$ sono definite a condizione che si abbia

$$g \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) < \left| kL^2 - \omega^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \right|.$$

Per $\omega^2 < kL^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)^{-1}$ detta condizione equivale a:

$$\omega^2 < \left[kL^2 - g \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) \right] \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)^{-1}$$

mentre per $\omega^2 > kL^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)^{-1}$ essa si riduce a:

$$\omega^2 > \left[kL^2 + g \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) \right] \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)^{-1}.$$

Le condizioni di esistenza degli equilibri θ^* e $\pi - \theta^*$ possono quindi esprimersi semplicemente come:

$$\omega^2 < \beta \quad \text{oppure :} \quad \omega^2 > \alpha .$$

Osservazione. Casi critici per il potenziale

È possibile precisare le proprietà di stabilità delle configurazioni di equilibrio $\theta = +\pi/2$ e $\theta = -\pi/2$ anche nei due casi critici precedentemente individuati. A questo scopo è sufficiente procedere ad una analisi locale del potenziale:

$$U(\theta) = - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g \sin \theta - \frac{kL^2}{2} \cos^2 \theta + \frac{\omega^2}{2} \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \cos^2 \theta$$

che non si limiti al semplice calcolo della derivata seconda.

Primo caso critico: $\theta = +\pi/2$ con $\omega^2 = \beta$.

Il potenziale diventa:

$$U(\theta) = - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g \left(\sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{2} \right) = - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)(2\sin\theta - \sin^2\theta + 1) = -\frac{1}{2}g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)[-(1 - \sin\theta)^2 + 2] = \\
&= -g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{2}(1 - \sin\theta)^2\right]
\end{aligned}$$

e quindi, posto $\theta = \pi/2 + \eta$:

$$\begin{aligned}
U\left(\frac{\pi}{2} + \eta\right) &= -g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{2}(1 - \cos\eta)^2\right] = \\
&= -g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[1 - 2\sin^4\left(\frac{\eta}{2}\right)\right] = \\
&= +g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[2\sin^4\left(\frac{\eta}{2}\right) - 1\right] > U\left(\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\forall \eta \in \mathbb{R}$, $|\eta| < 2\pi$, $\eta \neq 0$. In definitiva, $\theta = \pi/2$ è un minimo relativo proprio di U , per la cui stabilità o instabilità nulla potrebbe concludersi sulla base dei teoremi generali noti — Lagrange-Dirichlet e inversione parziale relativa. Trattandosi tuttavia di sistema posizionale conservativo ad un solo grado di libertà, l'analisi qualitativa dei moti può essere condotta mediante la **discussione di Weierstrass**, dalla quale segue direttamente ed immediatamente l'**instabilità** della configurazione in esame.

Secondo caso critico: $\theta = -\pi/2$ con $\omega^2 = \alpha$.

Per il potenziale si ha l'espressione:

$$\begin{aligned}
U(\theta) &= -g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\cos^2\theta\right) = -\frac{1}{2}g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)(2\sin\theta - 1 + \sin^2\theta) \\
&= -\frac{1}{2}g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[(1 + \sin\theta)^2 - 2\right] = g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{2}(1 + \sin\theta)^2\right]
\end{aligned}$$

e con la sostituzione $\theta = -\pi/2 + \eta$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
U\left(-\frac{\pi}{2} + \eta\right) &= g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{2}(1 - \cos\eta)^2\right] = \\
&= g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[1 - 2\sin^4\left(\frac{\eta}{2}\right)\right] < U\left(-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\forall \eta \in \mathbb{R}$, $|\eta| < 2\pi$, $\eta \neq 0$. La configurazione $\theta = -\pi/2$ costituisce pertanto un massimo relativo proprio del potenziale ed è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Il grafico riportato nella pagina seguente illustra il diagramma di biforcazione del sistema, nell'ipotesi che si abbia $\beta > 0$.

(e) **Frequenze normali delle piccole oscillazioni**

Consideriamo ad esempio $\theta = -\pi/2$ per

$$\omega^2 < \frac{kL^2 + g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)}{\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2} = \alpha .$$

La derivata seconda del potenziale in $\theta = -\pi/2$ è già stata determinata:

$$U_{\theta\theta}(-\pi/2) = \left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)(\omega^2 - \alpha) < 0$$

in modo che risulta:

$$U(\theta) = U(-\pi/2) + \left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)(\omega^2 - \alpha)\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left[\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)^2\right] \quad (\theta \rightarrow -\pi/2).$$

L'energia cinetica nell'intorno di $(\theta, \dot{\theta}) = (-\pi/2, 0)$ si approssima invece con:

$$\left[\frac{\Lambda}{2} + m_2L^2\left(\frac{3}{16} + \sin^2\theta\right)\right]_{\theta=-\pi/2}\dot{\theta}^2 = \left(\frac{\Lambda}{2} + m_2L^2\frac{19}{16}\right)\dot{\theta}^2.$$

La lagrangiana delle piccole oscillazioni è allora:

$$\mathcal{L}_{p.o.} = \left(\frac{\Lambda}{2} + m_2L^2\frac{19}{16}\right)\dot{\theta}^2 + \left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)(\omega^2 - \alpha)\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)^2$$

e l'equazione corrispondente è quella di un oscillatore armonico semplice:

$$\left(\Lambda + m_2L^2\frac{19}{8}\right)\ddot{\theta} + \left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)(\alpha - \omega^2)\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

di pulsazione:

$$\Omega = \sqrt{(\alpha - \omega^2)\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right) / \left(\Lambda + m_2L^2\frac{19}{8}\right)}.$$

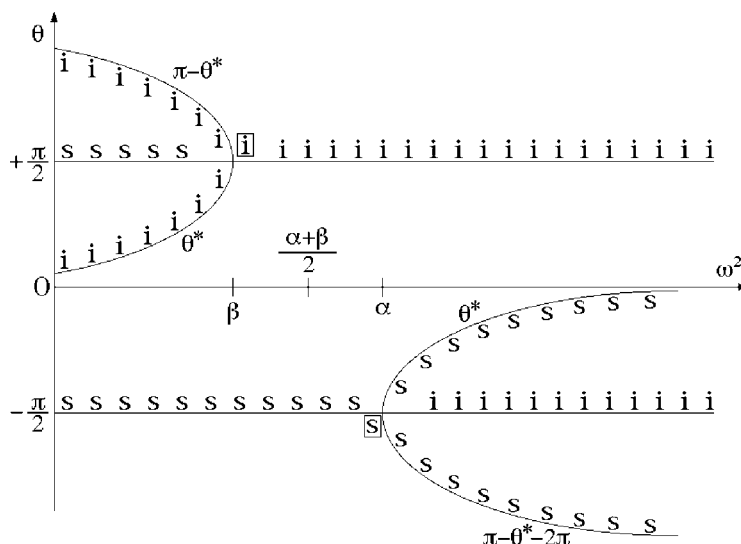


Diagramma di biforcazione del sistema per $\beta > 0$

Osservazione. Reazioni vincolari

Si vuole procedere alla determinazione delle reazioni vincolari esterne applicate alle parti rigide costituenti il sistema. Dette reazioni agiscono di necessità nei soli punti O , A dell'asta \mathbb{L} e A , B del disco \mathbb{D} . Complessivamente le reazioni vincolari indipendenti sono tre; sono infatti presenti le reazioni vincolari:

- $\vec{\Phi}_1$ applicata all'asta \mathbb{L} dall'asse Oy in O ;
- $\vec{\Phi}_2$ esercitata sull'asta in A dal disco \mathbb{D} ;
- $-\vec{\Phi}_2$ prodotta dal disco \mathbb{D} dall'asta \mathbb{L} in A (opposta alla precedente in virtù del principio di azione e reazione);
- $\vec{\Phi}_3$ esercitata sul disco in B dall'asse Ox .

Le equazioni cardinali dell'impulso per asta e disco si scrivono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 = m_1 \ddot{G} \\ -\vec{\Phi}_2 + \vec{\Phi}_3 = m_2 \ddot{C} \end{cases}$$

e da esse si ricava:

$$\begin{cases} \vec{\Phi}_1 = m_1 \ddot{G} - \vec{\Phi}_2 \\ \vec{\Phi}_3 = m_2 \ddot{C} + \vec{\Phi}_2. \end{cases} \quad (0.2)$$

L'equazione cardinale del momento angolare per l'asta, nel polo fisso O , porge inoltre:

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_O^{\mathbb{L}} = (G - O) \wedge (-m_1 g \hat{e}_2) + \vec{M}_O^{\mathbb{L},cf} + (A - O) \wedge \vec{\Phi}_2$$

e individua $\vec{\Phi}_2$ a meno di un vettore $\lambda_1(A - O)$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, una volta determinato il momento risultante $\vec{M}_O^{\mathbb{L},cf}$ in O delle forze centrifughe agenti sull'asta.

Analogamente, per il disco \mathbb{D} si ha l'equazione cardinale del momento angolare nel polo mobile B :

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_B^{\mathbb{D}} = -m_2 \dot{B} \wedge \dot{C} + (C - B) \wedge (-m_2 g \hat{e}_2) + \vec{M}_B^{\mathbb{D},cf} + (A - B) \wedge \vec{\Phi}_2$$

la quale fissa $\vec{\Phi}_2$ a meno di un vettore $\lambda_2(A - B)$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, in termini del momento risultante $\vec{M}_B^{\mathbb{D},cf}$ in B delle forze centrifughe applicate al disco.

Poiché il moto del sistema è piano, i vettori (noti):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \vec{K}_O^{\mathbb{L}} - (G - O) \wedge (-m_1 g \hat{e}_2) - \vec{M}_O^{\mathbb{L},cf} \\ & \frac{d}{dt} \vec{K}_B^{\mathbb{D}} + m_2 \dot{B} \wedge \dot{C} - (C - B) \wedge (-m_2 g \hat{e}_2) - \vec{M}_B^{\mathbb{D},cf} \end{aligned}$$

risultano diretti secondo \hat{e}_3 e possono allora essere indicati nella forma $\mu_{\mathbb{L}}\hat{e}_3$ e $\mu_{\mathbb{D}}\hat{e}_3$, rispettivamente. Le equazioni cardinali del momento angolare per asta e disco diventano così:

$$\mu_{\mathbb{L}}\hat{e}_3 = (A - O) \wedge \vec{\Phi}_2 \quad \mu_{\mathbb{D}}\hat{e}_3 = (A - B) \wedge \vec{\Phi}_2$$

ed implicano entrambe che si abbia $\hat{e}_3 \cdot \vec{\Phi}_2 = 0$, per esempio:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{e}_3 \wedge \mu_{\mathbb{L}}\hat{e}_3 = \hat{e}_3 \wedge [(A - O) \wedge \vec{\Phi}_2] = \hat{e}_3 \cdot \vec{\Phi}_2 (A - O) - (A - O) \cdot \hat{e}_3 \vec{\Phi}_2 = \\ &= \hat{e}_3 \cdot \vec{\Phi}_2 (A - O) - 0 \vec{\Phi}_2 = \hat{e}_3 \cdot \vec{\Phi}_2 (A - O) \quad \implies \quad \hat{e}_3 \cdot \vec{\Phi}_2 = 0. \end{aligned}$$

Tali equazioni possono essere risolte in $\vec{\Phi}_2$ e forniscono le espressioni:

$$\begin{cases} \vec{\Phi}_2 = -\frac{1}{|A - O|^2} (A - O) \wedge \mu_{\mathbb{L}}\hat{e}_3 + \lambda_1 (A - O) \\ \vec{\Phi}_2 = -\frac{1}{|A - B|^2} (A - B) \wedge \mu_{\mathbb{D}}\hat{e}_3 + \lambda_2 (A - B) \end{cases} \quad (0.3)$$

in cui i vettori:

$$A - O, \quad A - B, \quad -\frac{1}{|A - O|^2} (A - O) \wedge \mu_{\mathbb{L}}\hat{e}_3, \quad \frac{1}{|A - B|^2} (A - B) \wedge \mu_{\mathbb{D}}\hat{e}_3$$

sono tutti noti. Sottraendo membro a membro, dalle (0.3) si deduce

$$\lambda_1 (A - O) - \lambda_2 (A - B) = \frac{1}{|A - O|^2} (A - O) \wedge \mu_{\mathbb{L}}\hat{e}_3 - \frac{1}{|A - B|^2} (A - B) \wedge \mu_{\mathbb{D}}\hat{e}_3$$

e poiché tutti i vettori a primo e a secondo membro sono ortogonali ad \hat{e}_3 , con $A - O$ e $A - B$ linearmente indipendenti per ogni configurazione in cui si abbia $B \neq O$, gli scalari λ_1 e λ_2 sono determinati univocamente e con essi risulta determinato univocamente anche $\vec{\Phi}_2$. Una volta calcolato $\vec{\Phi}_2$, i vettori $\vec{\Phi}_1$ e $\vec{\Phi}_3$ si individuano immediatamente per mezzo delle (0.2). In conclusione, le reazioni vincolari $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, \vec{\Phi}_3$ sono determinate in modo univoco lungo qualsiasi moto del sistema per ogni configurazione in cui si abbia $B \neq O$ — ovvero $\theta \neq (n + \frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Osservazione. Equilibri e stabilità in presenza di una resistenza viscosa

Si vogliono determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, analizzandone le relative proprietà di stabilità, nell'ipotesi che accanto alle sollecitazioni posizionali conservative già considerate in precedenza si introduca una ulteriore sollecitazione del tipo:

$$-\beta \dot{C}$$

con $\beta > 0$ costante, applicata in C . La velocità \dot{C} è già stata determinata precedentemente:

$$\dot{C} = \frac{\partial C}{\partial \theta} \dot{\theta} = \left(-\frac{3}{2} \sin \theta \hat{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \theta \hat{e}_2 \right) L \dot{\theta}$$

per cui l'unica componente lagrangiana della nuova sollecitazione risulta:

$$\begin{aligned} Q_\theta &= -\beta \dot{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta} = -\beta \dot{\theta} \frac{\partial C}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta} = -\beta \dot{\theta} \left| \frac{\partial C}{\partial \theta} \right|^2 = \\ &= -\beta \dot{\theta} \frac{L^2}{4} (9\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -\beta \frac{L^2}{4} (1 + 8\sin^2\theta) \dot{\theta} \end{aligned}$$

e non dipende esplicitamente dal tempo. La potenza della sollecitazione è non positiva:

$$\pi = Q_\theta \dot{\theta} = -\beta \frac{L^2}{4} (1 + 8\sin^2\theta) \dot{\theta}^2 \leq 0 \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$$

e si annulla soltanto a velocità generalizzata nulla:

$$\pi = -\beta \frac{L^2}{4} (1 + 8\sin^2\theta) \dot{\theta}^2 = 0 \quad \implies \quad \dot{\theta} = 0$$

il che consente di riconoscere il carattere **completamente dissipativo** della sollecitazione in esame. Si hanno allora i seguenti asserti:

- (i) poiché Q_θ è a potenza non positiva e continua in θ , le configurazioni di equilibrio trovate nel caso puramente conservativo **restano invariate e non ne insorgono altre**;
- (ii) tali configurazioni erano risultate in numero finito, dunque necessariamente **isolate**;
- (iii) Q_θ ha natura **completamente dissipativa**, come verificato.

Le proposizioni (ii) e (iii) autorizzano ad applicare i criteri di Barbasin-Krasovskii all'analisi di stabilità delle configurazioni di equilibrio (i). Si deduce allora che:

- (a) le configurazioni di equilibrio giudicate stabili nel caso conservativo, in quanto massimi relativi propri del potenziale U , risultano ora **asintoticamente stabili**;
- (b) tutte le altre configurazioni di equilibrio del caso conservativo **non** costituiscono massimi relativi propri del potenziale U e sono **isolate**. Ciò basta per assicurare l'instabilità di dette configurazioni.