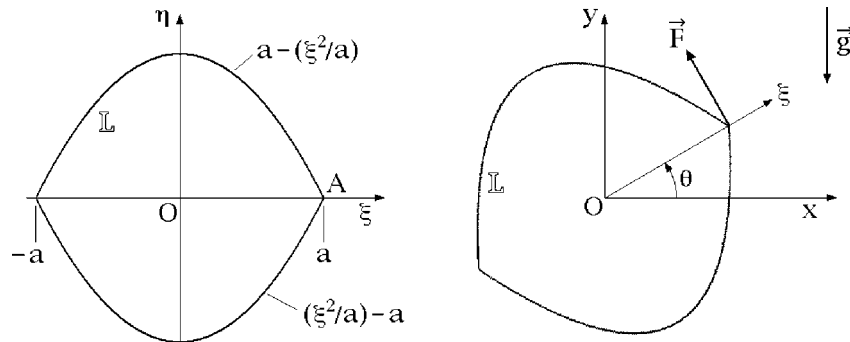


**Esercizio 1**

Si consideri una lamina piana ed omogenea  $\mathbb{L}$ , di massa  $m$ , che in un riferimento solidale  $O\xi\eta\zeta$  occupa la regione definita da:

$$\left\{ (\xi, \eta, \zeta) : |\eta| \leq a - \frac{\xi^2}{a}, |\xi| \leq a, \zeta = 0 \right\}.$$

La lamina ruota senza attrito attorno all'asse orizzontale  $Oz = O\zeta$  di una terna inerziale  $Oxyz$ , è soggetta al proprio peso, ad una forza  $\vec{F} = -m\beta\dot{A}/7$  applicata nel punto  $A$  e ad una coppia di momento  $-m\beta^2 a^2 \hat{e}_1 + m\beta^2 a^2 [2 \cos(\omega t) - \theta] \hat{e}_3$ , con  $\omega, \beta > 0$ .

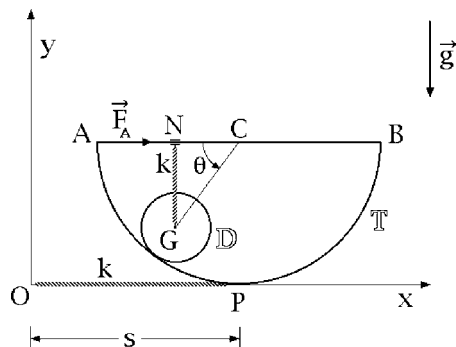


Facendo uso dell'angolo di rotazione  $\theta$  come coordinata generalizzata, determinare:

- il momento d'inerzia della lamina rispetto a  $Oz$ ;
- le equazioni del moto;
- la soluzione generale delle equazioni del moto;
- la pulsazione di risonanza  $\omega = \omega_r$  del sistema;
- il modulo della velocità di  $A$ , in condizioni di risonanza, per  $t \gg 0$ .

## Esercizio 2

Nel piano verticale  $Oxy$  di una terna  $Oxyz$  un telaio rigido di massa  $m$ , composto da una semicirconferenza omogenea  $\mathbb{S}$  di centro  $C$  e raggio  $2R$  e da un'asta  $AB$  saldata lungo il diametro, ha il punto medio  $P$  di  $\mathbb{S}$  vincolato a scorrere lungo l'asse  $Ox$  e il diametro a mantenersi orizzontale. Un disco omogeneo  $\mathbb{D}$ , di centro  $G$ , massa  $m$  e raggio  $2R/3$ , rotola senza strisciare lungo il bordo interno di  $\mathbb{S}$ . Il sistema è pesante e soggetto ad una forza  $\vec{F}_A = mg\hat{e}_1$  applicata al punto  $A$ , mentre due molle di costante elastica  $k$  congiungono  $P$  con l'origine  $O$  e il centro  $G$  con la sua proiezione ortogonale  $N$  su  $AB$ . Le coordinate lagrangiane sono l'angolo  $\theta \in [\pi/6, 5\pi/6]$  e l'ascissa  $s \in \mathbb{R}$  — vedi figura.



Supposti i vincoli lisci, si determinino, relativamente alla terna  $Oxyz$ :

- le configurazioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema;
- le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- l'energia cinetica del sistema;
- le equazioni pure del moto del sistema;
- l'equazione per le frequenze normali delle piccole oscillazioni nell'intorno di un equilibrio stabile.

### Soluzione dell'esercizio 1

#### (a) Momento d'inerzia rispetto all'asse fisso

La lamina è omogenea e la sua densità costante  $\sigma$  può essere calcolata come quoziente fra la massa  $m$  e l'area  $S$ :

$$\sigma = m/S.$$

L'area  $S$  viene determinata per mezzo di una integrazione diretta:

$$S = \int_{-a}^a d\xi \int_{\frac{\xi^2}{a}-a}^{a-\frac{\xi^2}{a}} d\eta = \int_{-a}^a 2\left(\frac{\xi^2}{a} - a\right) d\xi = 2\left[a\xi - \frac{\xi^3}{3a}\right]_{-a}^a = 4\left(a^2 - \frac{a^2}{3}\right) = \frac{8}{3}a^2$$

per cui:

$$\sigma = \frac{3}{8} \frac{m}{a^2}.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse fisso  $Oz$  si ricava applicando la definizione:

$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int (\xi^2 + \eta^2) \sigma d\xi d\eta = \\ &= \sigma \int_{-a}^a d\xi \int_{\frac{\xi^2}{a}-a}^{a-\frac{\xi^2}{a}} d\eta (\xi^2 + \eta^2) = \\ &= \sigma \int_{-a}^a d\xi \left[ \xi^2 \eta + \frac{\eta^3}{3} \right]_{\eta=\frac{\xi^2}{a}-a}^{a-\frac{\xi^2}{a}} = \\ &= 2\sigma \int_{-a}^a d\xi \left[ \xi^2 \left( a - \frac{\xi^2}{a} \right) + \frac{1}{3} \left( a - \frac{\xi^2}{a} \right)^3 \right] = \\ &= 2\sigma \int_{-a}^a \left[ a\xi^2 - \frac{\xi^4}{a} + \frac{a^3}{3} - a\xi^2 + \frac{\xi^4}{a} - \frac{\xi^6}{3a^3} \right] d\xi = \\ &= 2\sigma \left[ \frac{a\xi^3}{3} - \frac{\xi^5}{5a} + \frac{a^3\xi}{3} - \frac{a\xi^3}{3} + \frac{\xi^5}{5a} - \frac{\xi^7}{21a^3} \right]_{-a}^a = \\ &= 4\sigma \left( \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{5} + \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{5} - \frac{a^4}{21} \right) = \frac{8}{7} \sigma a^4 \end{aligned}$$

e sostituendo l'espressione della densità:

$$I_{Oz} = \frac{8}{7} \frac{3}{8} \frac{m}{a^2} a^4 = \frac{3}{7} m a^2.$$

#### (b) Equazioni del moto

L'equazione del moto di un sistema rigido con asse fisso privo di attrito, con angolo di rotazione  $\theta$ , si ottiene proiettando lungo l'asse l'equazione cardinale del momento angolare rispetto ad un punto dello stesso asse, ad esempio l'origine  $O$ . Nella fattispecie, tenuto conto della sollecitazione di resistenza viscosa  $\vec{F} = -m\beta\dot{A}/7$  agente in  $A$ , considerata la coppia di momento  $\vec{M} = -m\beta^2 a^2 \hat{e}_1 + m\beta^2 a^2 [2 \cos(\omega t) - \theta] \hat{e}_3$ , e osservato che il baricentro

della lamina coincide con il suo evidente centro di simmetria  $O$ , l'equazione del moto diviene:

$$I_{Oz}\ddot{\theta} = \hat{e}_3 \cdot (A - O) \wedge \vec{F} + \hat{e}_3 \cdot \vec{M}$$

dove:

$$\begin{aligned} \hat{e}_3 \cdot (A - O) \wedge \vec{F} &= \hat{e}_3 \cdot a(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \wedge \left[ -\frac{m\beta}{7}a(-\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2)\dot{\theta} \right] = \\ &= -\frac{m\beta a^2}{7}\dot{\theta}\hat{e}_3 \cdot (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \wedge (-\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2) = -\frac{m\beta a^2}{7}\dot{\theta} \end{aligned}$$

e:

$$\hat{e}_3 \cdot \vec{M} = m\beta^2 a^2 [2 \cos(\omega t) - \theta]$$

mentre nullo è il momento assiale delle forze peso. Sostituendo i momenti assiali delle forze attive e il valore  $I_{Oz} = 3ma^2/7$  del momento d'inerzia ricavato al punto precedente, l'equazione del moto si scrive pertanto:

$$\frac{3}{7}ma^2\ddot{\theta} = -\frac{m\beta a^2}{7}\dot{\theta} + 2m\beta^2 a^2 \cos(\omega t) - m\beta^2 a^2 \theta$$

ossia:

$$\frac{3}{7}ma^2\ddot{\theta} + \frac{m\beta a^2}{7}\dot{\theta} + m\beta^2 a^2 \theta = 2m\beta^2 a^2 \cos(\omega t)$$

e la rimozione del fattore costante  $ma^2$  conduce all'espressione più compatta:

$$\frac{3}{7}\ddot{\theta} + \frac{\beta}{7}\dot{\theta} + \beta^2 \theta = 2\beta^2 \cos(\omega t)$$

che costituisce il risultato richiesto.

### (c) Soluzione generale delle equazioni del moto

Quella del moto è una equazione differenziale del secondo ordine lineare non omogenea a coefficienti costanti. La sua soluzione generale si esprime come somma di una soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$\frac{3}{7}\ddot{\theta} + \frac{\beta}{7}\dot{\theta} + \beta^2 \theta = 0.$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata:

$$\frac{3}{7}\lambda^2 + \frac{\beta}{7}\lambda + \beta^2 = 0$$

porge gli autovalori complessi coniugati:

$$\lambda = \left[ -\frac{\beta}{7} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{49} - \frac{12}{7}\beta^2} \right] \frac{7}{6} = -\frac{\beta}{6}(1 \pm i\sqrt{83})$$

per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea si scrive:

$$\theta(t) = e^{-\frac{\beta}{6}t} \left[ c_1 \cos\left(\frac{\beta}{6}\sqrt{83}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\beta}{6}\sqrt{83}t\right) \right]$$

con  $c_1$  e  $c_2$  costanti reali arbitrarie, fissate dalle condizioni iniziali. La soluzione particolare dell'equazione del moto è noto dall'analisi potersi ricercare nella forma:

$$\alpha \cos(\omega t + \phi)$$

con l'ampiezza  $\alpha > 0$  e la fase  $\phi \in [0, 2\pi)$  univocamente determinate. Tale soluzione particolare viene calcolata individuando il fasore complesso:

$$\alpha e^{i\omega t + i\phi}$$

soluzione dell'equazione lineare non omogenea con termine noto complesso:

$$\frac{3}{7}\ddot{\theta} + \frac{\beta}{7}\dot{\theta} + \beta^2\theta = 2\beta^2 e^{i\omega t}.$$

Sostituendo il fasore nell'equazione e semplificando il fattore non nullo  $e^{i\omega t}$  si deduce infatti l'equazione algebrica complessa:

$$\alpha \left( -\frac{3}{7}\omega^2 + i\frac{\beta}{7}\omega + \beta^2 \right) e^{i\phi} = 2\beta^2$$

la quale implica:

$$\begin{aligned} \alpha e^{i\phi} &= \frac{2\beta^2}{\beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2 + i\frac{\beta}{7}\omega} = \\ &= \frac{2\beta^2}{\left(\beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{49}\omega^2} \left(\beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2 - i\frac{\beta}{7}\omega\right) = \\ &= \frac{2\beta^2}{\left[\left(\beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{49}\omega^2\right]^{1/2}} \frac{\beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2 - i\frac{\beta}{7}\omega}{\left[\left(\beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{49}\omega^2\right]^{1/2}} \end{aligned}$$

sicché:

$$\alpha = \frac{2\beta^2}{\left[\left(\beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{49}\omega^2\right]^{1/2}}$$

mentre la fase  $\phi \in [0, 2\pi)$  è univocamente determinata in virtù dell'identità di Eulero  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  dalle relazioni trigonometriche:

$$\cos \phi = \frac{\beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2}{\left[\left(\beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{49}\omega^2\right]^{1/2}} \quad \sin \phi = \frac{-\frac{\beta}{7}\omega}{\left[\left(\beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{49}\omega^2\right]^{1/2}}$$

e vale pertanto — si ricordi che  $\beta, \omega > 0$ :

$$\phi = -\arccos \left\{ \frac{\beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2}{\left[ \left( \beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2 \right)^2 + \frac{\beta^2}{49}\omega^2 \right]^{1/2}} \right\}.$$

In conclusione, la soluzione generale dell'equazione del moto assume la forma:

$$\theta(t) = e^{-\frac{\beta}{6}t} \left[ c_1 \cos\left(\frac{\beta}{6}\sqrt{83}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\beta}{6}\sqrt{83}t\right) \right] + \frac{2\beta^2}{\left[ \left( \beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2 \right)^2 + \frac{\beta^2}{49}\omega^2 \right]^{1/2}} \cos(\omega t + \phi)$$

con la fase  $\phi$  sopra ricavata.

**(d) La pulsazione di risonanza**

Il valore di risonanza  $\omega = \omega_R$  della pulsazione è quello che rende massima l'ampiezza del moto di regime  $\alpha \cos(\omega t + \phi)$ , ovvero minimo il polinomio a denominatore nella definizione di  $\alpha$ :

$$\left( \beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2 \right)^2 + \frac{\beta^2}{49}\omega^2.$$

La pulsazione di risonanza è quindi l'unica soluzione dell'equazione algebrica:

$$2\left( \beta^2 - \frac{3}{7}\omega_R^2 \right) \left( -\frac{3}{7} \right) + \frac{\beta^2}{49} = 0$$

ossia di:

$$\frac{18}{49}\omega_R^2 - \frac{6}{7}\beta^2 + \frac{\beta^2}{49} = 0$$

da cui si deduce:

$$\omega_R^2 = \frac{41}{18}\beta^2$$

e quindi il risultato richiesto:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{41}{18}}\beta.$$

**(e) Modulo della velocità di  $A$  per tempi grandi**

Per  $t \gg 0$  la parte transiente della soluzione generale  $\theta(t)$  tende a zero per qualsivoglia scelta delle condizioni iniziali e si riduce di fatto alla sola parte stazionaria:

$$\theta(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi).$$

La velocità di  $A$  si esprime come:

$$\dot{A} = \dot{\theta}\hat{e}_3 \wedge (A - O)$$

ed ha modulo:

$$|\dot{A}| = |\dot{\theta}| |A - O| = a|\dot{\theta}| = a\alpha\omega |\sin(\omega t + \phi)|.$$

In condizioni di risonanza vale pertanto:

$$|\dot{A}| = a\alpha\omega_R |\sin(\omega_R t + \phi)| = \frac{2a\beta^2\omega_R}{\left[\left(\beta^2 - \frac{3}{7}\omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{49}\omega^2\right]^{1/2}} |\sin(\omega_R t + \phi)|.$$

## Soluzione dell'esercizio 2

### (a) Equilibri ordinari e di confine

Le sollecitazioni attive applicate al sistema hanno tutte natura posizionale e conservativa e possono perciò essere descritte per mezzo dei rispettivi potenziali. Dato che l'ordinata del suo baricentro è fissa, il potenziale gravitazionale del telaio si mantiene costante per tutti i moti possibili ed è quindi irrilevante ai fini del moto. Il potenziale gravitazionale del disco circolare si scrive invece:

$$\begin{aligned} U_g &= -mg\hat{e}_2 \cdot (G - O) = -mg\hat{e}_2 \cdot (G - C + C - O) = \\ &= -mg\hat{e}_2 \cdot \left(s\hat{e}_1 + R\hat{e}_2 - \frac{4R}{3}\cos\theta\hat{e}_1 - \frac{4R}{3}\sin\theta\hat{e}_2\right) = -mgR + \frac{4}{3}mgR\sin\theta. \end{aligned}$$

Per il potenziale elastico si ha un contributo dovuto alla molla  $PO$  ed uno legato all'interazione fra  $G$  ed  $N$ :

$$U_{el} = -\frac{k}{2}|P - O|^2 - \frac{k}{2}|N - G|^2 = -\frac{k}{2}s^2 - \frac{k}{2}\left(\frac{4R}{3}\sin\theta\right)^2 = -\frac{k}{2}\left(s^2 + \frac{16R^2}{9}\sin^2\theta\right)$$

mentre alla forza  $\vec{F}_A$  si associa il potenziale:

$$U_F = \vec{F}_A \cdot (A - O) = mg\hat{e}_1 \cdot (A - O) = mg(s - 2R).$$

### Equilibri ordinari

Omesse le inessenziali costanti additive, il potenziale del sistema è la somma dei potenziali parziali delle singole sollecitazioni:

$$\begin{aligned} U(\theta, s) &= \frac{4}{3}mgR\sin\theta - \frac{k}{2}\left(s^2 + \frac{16R^2}{9}\sin^2\theta\right) + mgs = \\ &= \frac{4}{3}mgR\sin\theta - \frac{8kR^2}{9}\sin^2\theta - \frac{k}{2}s^2 + mgs \end{aligned}$$

e a causa dei vincoli unilaterali deve intendersi definito per  $(\theta, s) \in [\pi/6, 5\pi/6] \times \mathbb{R}$ . Le configurazioni di equilibrio ordinarie sono tutti e soli i punti critici del potenziale, vale a dire le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} U_\theta = \frac{4}{3}mgR\cos\theta - \frac{16kR^2}{9}\sin\theta\cos\theta = 0 \\ U_s = -ks + mg = 0. \end{cases}$$

Le equazioni del sistema sono disaccoppiate e individuano separatamente i valori di equilibrio delle variabili lagrangiane. Dalla seconda equazione si ottiene il valore di equilibrio dell'ascissa  $s$ :

$$s = mg/k$$

mentre la prima equazione si può porre nella forma equivalente:

$$\frac{16kR^2}{9} \cos \theta \left( \frac{3}{4} \frac{mg}{kR} - \sin \theta \right) = 0$$

dalla quale si deducono due soluzioni sempre definite:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = -\frac{\pi}{2},$$

e due ulteriori soluzioni:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{3}{4} \frac{mg}{kR}\right) = \theta^* \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \theta = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{4} \frac{mg}{kR}\right) = \pi - \theta^* \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia:

$$\frac{3}{4} \frac{mg}{kR} < 1.$$

Tenuto conto dei vincoli unilaterali, la soluzione  $\theta = -\pi/2$  non corrisponde ad alcun valore di equilibrio. L'angolo  $\theta = \pi/2$  è sempre di equilibrio. Gli angoli  $\theta^*$  e  $\pi - \theta^*$  corrispondono ad altrettanti equilibri del sistema se e soltanto se:

$$\pi/6 < \theta^* < \pi/2$$

ossia:

$$\sin(\pi/6) < \sin \theta^* < 1$$

e quindi:

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} \frac{mg}{kR} < 1.$$

Le configurazioni di equilibrio ordinarie del sistema sono pertanto:

$$(\theta, s) = (\pi/2, mg/k),$$

definita per ogni scelta delle costanti caratteristiche del sistema, e:

$$(\theta, s) = (\theta^*, mg/k), \quad (\theta, s) = (\pi - \theta^*, mg/k)$$

definite e distinte dalla precedente se e soltanto se  $2/3 < mg/kR < 4/3$ .

#### *Equilibri di confine*

Le configurazioni di confine del sistema sono individuate da:

$$\{(\theta, s) = (\pi/6, s), s \in \mathbb{R}\} \cup \{(\theta, s) = (5\pi/6, s), s \in \mathbb{R}\}.$$

Fra di esse, le configurazioni di confine vengono caratterizzate dal teorema dei lavori virtuali. Il lavoro virtuale delle sollecitazioni attive in una configurazione  $(\theta, s)$  e relativamente ad uno spostamento virtuale  $(\delta\theta, \delta s)$  è dato da:

$$\begin{aligned}\delta L &= Q_\theta(\theta, s)\delta\theta + Q_s(\theta, s)\delta s = U_\theta(\theta, s)\delta\theta + U_s(\theta, s)\delta s = \\ &= \frac{16kR^2}{9} \cos\theta \left( \frac{3mg}{4kR} - \sin\theta \right) \delta\theta + (-ks + mg)\delta s.\end{aligned}$$

Per  $\theta = \pi/6$  l'espressione del lavoro virtuale diventa:

$$\delta L = \frac{16kR^2}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{3mg}{4kR} - \frac{1}{2} \right) \delta\theta + (-ks + mg)\delta s$$

e il principio dei lavori virtuali prescrive per l'equilibrio la condizione necessaria e sufficiente:

$$\frac{16kR^2}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{3mg}{4kR} - \frac{1}{2} \right) \delta\theta + (-ks + mg)\delta s \leq 0 \quad \forall \delta\theta \geq 0, \delta s \in \mathbb{R}$$

che equivale a:

$$\frac{16kR^2}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{3mg}{4kR} - \frac{1}{2} \right) \leq 0 \quad -ks + mg = 0.$$

Di queste condizioni la prima è soddisfatta se e soltanto se:

$$\frac{3mg}{4kR} \leq \frac{1}{2}$$

nel qual caso la configurazione:

$$(\theta, s) = (\pi/6, mg/k)$$

è un equilibrio di confine del sistema.

In modo analogo, per  $\theta = 5\pi/6$  il lavoro virtuale delle sollecitazioni attive assume la forma:

$$-\frac{16kR^2}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{3mg}{4kR} - \frac{1}{2} \right) \delta\theta + (-ks + mg)\delta s$$

e il teorema dei lavori virtuali si scrive come:

$$-\frac{16kR^2}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{3mg}{4kR} - \frac{1}{2} \right) \delta\theta + (-ks + mg)\delta s \leq 0 \quad \forall \delta\theta \leq 0, \delta s \in \mathbb{R}$$

caratterizzando gli equilibri di confine per mezzo delle relazioni:

$$-\frac{16kR^2}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{3mg}{4kR} - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \quad -ks + mg = 0.$$

La configurazione:

$$(\theta, s) = (5\pi/6, mg/k)$$

costituisce perciò un equilibrio di confine se e soltanto se:

$$\frac{3mg}{4kR} \leq \frac{1}{2}.$$

(b) **Stabilità degli equilibri ordinari**

Il sistema è scleronomo e tutte le sollecitazioni attive hanno natura posizionale e conservativa. L'analisi di stabilità delle configurazioni di equilibrio ordinarie può quindi essere condotta facendo uso del teorema di Lagrange-Dirichlet e del relativo teorema di inversione parziale. Si rende quindi necessario calcolare le derivate parziali seconde del potenziale  $U$ :

$$\begin{cases} U_{\theta\theta} = -\frac{4}{3}mgR \sin \theta - \frac{16kR^2}{9}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ U_{ss} = -k \\ U_{\theta s} = U_{s\theta} = 0 \end{cases}$$

e quindi la matrice hessiana di  $U$ :

$$H_U(\theta, s) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}mgR \sin \theta - \frac{16kR^2}{9}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

per poi procedere all'esame delle singole configurazioni di equilibrio.

**Configurazione**  $(\theta, s) = (\pi/2, mg/k)$

In questa configurazione l'hessiana del potenziale si scrive:

$$H_U(\pi/2, mg/k) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}mgR + \frac{16kR^2}{9} & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16kR^2}{9} \left(1 - \frac{3mg}{4kR}\right) & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

in modo che:

- (i) per  $3mg/4kR > 1$  l'hessiana risulta definita negativa e la configurazione si riconosce essere un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet;
- (ii) se  $3mg/4kR < 1$  l'hessiana è indefinita e caratterizza l'equilibrio come instabile, in virtù del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- (iii) per  $3mg/4kR = 1$  l'hessiana diventa semidefinita non definita negativa e ricorre un caso critico. Nella fattispecie, il potenziale del sistema assume la forma:

$$\begin{aligned} U(\theta, s) &= -\frac{8kR^2}{9} \left( -\frac{3mg}{2kR} \sin \theta + \sin^2\theta \right) - \frac{k}{2}s^2 + mgs = \\ &= -\frac{8kR^2}{9} (-2 \sin \theta + \sin^2\theta) - \frac{k}{2} \left( s^2 - \frac{2mg}{k}s \right) = \\ &= -\frac{8kR^2}{9} (1 - \sin \theta)^2 + \frac{8kR^2}{9} - \frac{k}{2} \left( s - \frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{m^2g^2}{2k} \end{aligned}$$

e omesse le costanti additive inessenziali si riduce a:

$$\begin{aligned} U(\theta, s) &= -\frac{8kR^2}{9} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right]^2 - \frac{k}{2} \left( s - \frac{mg}{k} \right)^2 = \\ &= -\frac{8kR^2}{9} 4 \sin^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) - \frac{k}{2} \left( s - \frac{mg}{k} \right)^2 = \\ &= -\frac{32kR^2}{9} \sin^4\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{k}{2} \left( s - \frac{mg}{k} \right)^2 \end{aligned}$$

espressione dalla quale si deduce che la configurazione  $(\theta, s) = (\pi/2, mg/k)$  rappresenta un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

### Configurazione $(\theta, s) = (\theta^*, mg/k)$

La configurazione è definita per  $2/3 < mg/kR < 4/3$ , con  $\theta^* = \arcsin\left(\frac{3}{4} \frac{mg}{kR}\right)$ . La derivata seconda  $U_{\theta\theta}$  vale:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta}(\theta^*, mg/k) &= -\frac{4}{3} mgR \sin \theta^* - \frac{16kR^2}{9} (\cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^*) = \\ &= \frac{16kR^2}{9} \left( -\frac{3}{4} \frac{mg}{kR} \sin \theta^* - \cos^2 \theta^* + \sin^2 \theta^* \right) = -\frac{16kR^2}{9} \cos^2 \theta^* < 0 \end{aligned}$$

per cui l'hessiana  $H_U(\theta^*, mg/k)$  è definita negativa e individua la configurazione come massimo relativo proprio del potenziale. La stabilità segue, al solito, dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

### Configurazione $(\theta, s) = (\pi - \theta^*, mg/k)$

L'analisi di stabilità per questo equilibrio ordinario è identica a quella della configurazione simmetrica precedente:

$$U_{\theta\theta}(\pi - \theta^*, mg/k) = -\frac{16kR^2}{9} \cos^2 \theta^* < 0.$$

Anche questa configurazione, allorché definita, costituisce un massimo relativo proprio del potenziale  $U$  e risulta pertanto stabile in virtù del teorema di Lagrange-Dirichlet.

### (c) Energia cinetica

L'energia cinetica è data dalla somma delle energie cinetiche delle due parti rigide costituenti il sistema, il telaio rigido e il disco circolare omogeneo. Conviene determinare separatamente tali energie cinetiche, per poi procedere al calcolo della sola somma.

#### *Energia cinetica del telaio*

I moti possibili del telaio sono puramente traslatori. La velocità istantanea di un qualsiasi punto del telaio è quindi la stessa, ad un dato istante, e coincide con quella del punto  $P$ , vale a dire con:

$$\dot{P} = \dot{s} \hat{e}_1.$$

L'energia cinetica del telaio si scrive pertanto:

$$T_{\text{telaio}} = \frac{m}{2} \dot{P}^2 = \frac{m}{2} \dot{s}^2.$$

*Energia cinetica del disco*

Il disco  $\mathbb{D}$  non presenta punti fissi e la sua energia cinetica deve essere calcolata facendo uso del teorema di König:

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{m}{2} \dot{G}^2 + \frac{1}{2} I_{Gz}^{\mathbb{D}} |\vec{\omega}_{\mathbb{D}}|^2$$

essendo  $I_{Gz}^{\mathbb{D}}$  e  $\vec{\omega}_{\mathbb{D}}$  rispettivamente il momento d'inerzia rispetto all'asse  $Gz$  e la velocità angolare istantanea del disco. Il vettore posizione del baricentro del disco è già stato ricavato nello studio dell'energia potenziale gravitazionale, al punto (a):

$$\begin{aligned} G - O &= C - O + G - C = s \hat{e}_1 + R \hat{e}_2 - \frac{4R}{3} \cos \theta \hat{e}_1 - \frac{4R}{3} \sin \theta \hat{e}_2 = \\ &= \left( s - \frac{4R}{3} \cos \theta \right) \hat{e}_1 + \left( R - \frac{4R}{3} \sin \theta \right) \hat{e}_2 \end{aligned}$$

per cui la velocità istantanea del baricentro vale:

$$\dot{G} = \left( \dot{s} + \frac{4R}{3} \sin \theta \dot{\theta} \right) \hat{e}_1 - \frac{4R}{3} \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_2$$

e il suo modulo quadrato si scrive:

$$\dot{G}^2 = \dot{s}^2 + \frac{8R}{3} \sin \theta \dot{s} \dot{\theta} + \frac{16R^2}{9} \dot{\theta}^2.$$

Il momento d'inerzia del disco omogeneo, di raggio  $r = 2R/3$  e massa  $m$ , rispetto all'asse  $Gz$  vale:

$$I_{Gz}^{\mathbb{D}} = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{2R}{3} \right)^2 = \frac{2}{9} m R^2,$$

mentre la velocità angolare istantanea si ottiene per mezzo della ben nota relazione:

$$\vec{\omega}_{\mathbb{D}} = - \left( \frac{R}{r} - 1 \right) \dot{\theta} \hat{e}_3 = - \left( \frac{3}{2} - 1 \right) \dot{\theta} \hat{e}_3 = - \frac{\dot{\theta}}{2} \hat{e}_3$$

applicabile per via del moto di puro rotolamento del disco lungo il bordo interno della guida circolare  $\mathbb{S}$ . Sostituendo le relazioni precedenti nella formula di König, si ottiene pertanto:

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{1}{2} m \left( \dot{s}^2 + \frac{8R}{3} \sin \theta \dot{s} \dot{\theta} + \frac{16R^2}{9} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{2}{9} m R^2 \frac{\dot{\theta}^2}{4}$$

che si semplifica in:

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{m}{2} \left( \dot{s}^2 + \frac{8R}{3} \sin \theta \dot{s} \dot{\theta} + \frac{33R^2}{18} \dot{\theta}^2 \right).$$

L'energia cinetica del sistema risulta infine:

$$\begin{aligned} T = T_{\text{telaio}} + T_{\mathbb{D}} &= \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + \frac{8R}{3}\sin\theta\dot{s}\dot{\theta} + \frac{33R^2}{18}\dot{\theta}^2\right) = \\ &= \frac{m}{2}\left(2\dot{s}^2 + \frac{8R}{3}\sin\theta\dot{s}\dot{\theta} + \frac{33R^2}{18}\dot{\theta}^2\right). \end{aligned}$$

**(d) Equazioni del moto**

Le equazioni del moto del sistema sono quelle di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = 0$$

con lagrangiana  $\mathcal{L} = T + U$  data da:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(2\dot{s}^2 + \frac{8R}{3}\sin\theta\dot{s}\dot{\theta} + \frac{33R^2}{18}\dot{\theta}^2\right) + \frac{4}{3}mgR\sin\theta - \frac{8kR^2}{9}\sin^2\theta - \frac{k}{2}s^2 + mgs.$$

Si ottengono facilmente le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} &= \frac{m}{2}\left(\frac{8R}{3}\sin\theta\dot{s} + \frac{33R^2}{9}\dot{\theta}\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) &= \frac{m}{2}\left(\frac{8R}{3}\sin\theta\ddot{s} + \frac{33R^2}{9}\ddot{\theta} + \frac{8R}{3}\cos\theta\dot{s}\dot{\theta}\right) \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &= \frac{m}{2}\frac{8R}{3}\cos\theta\dot{s}\dot{\theta} + \frac{4}{3}mgR\cos\theta - \frac{16kR^2}{9}\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

sicché la prima equazione del moto diventa:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{8R}{3}\sin\theta\ddot{s} + \frac{33R^2}{9}\ddot{\theta}\right) - \frac{4}{3}mgR\cos\theta + \frac{16kR^2}{9}\sin\theta\cos\theta = 0.$$

In modo analogo si procede per la coordinata generalizzata  $s$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} &= \frac{m}{2}\left(4\dot{s} + \frac{8R}{3}\sin\theta\dot{\theta}\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\right) &= \frac{m}{2}\left(4\ddot{s} + \frac{8R}{3}\sin\theta\ddot{\theta} + \frac{8R}{3}\cos\theta\dot{\theta}^2\right) \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} &= -ks + mg \end{aligned}$$

e la relativa equazione del moto:

$$\frac{m}{2}\left(4\ddot{s} + \frac{8R}{3}\sin\theta\ddot{\theta} + \frac{8R}{3}\cos\theta\dot{\theta}^2\right) + ks - mg = 0.$$

(e) **Equazione per le frequenze normali delle piccole oscillazioni**

Per il calcolo delle frequenze normali delle piccole oscillazioni conviene considerare la configurazione di equilibrio  $(\theta, s) = (\pi/2, mg/k)$ , che è stabile per  $3mg/4kR > 1$ . La matrice dell'energia cinetica è definita da:

$$T = \frac{m}{2} \left( 2\dot{s}^2 + \frac{8R}{3} \sin \theta \dot{s} \dot{\theta} + \frac{33R^2}{18} \dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2} (\dot{\theta} \ \dot{s}) m \begin{pmatrix} \frac{33R^2}{18} & \frac{4R}{3} \sin \theta \\ \frac{4R}{3} \sin \theta & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{s} \end{pmatrix}$$

e nella configurazione di equilibrio prescelta si riduce a:

$$A(\pi/2, mg/k) = m \begin{pmatrix} \frac{33R^2}{18} & \frac{4R}{3} \\ \frac{4R}{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

L'hessiana del potenziale in  $(\theta, s) = (\pi/2, mg/k)$  è già stata determinata nella precedente analisi di stabilità e viene qui riscritta per comodità:

$$H_U(\pi/2, mg/k) = \begin{pmatrix} \frac{16kR^2}{9} \left( 1 - \frac{3mg}{4kR} \right) & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}.$$

Le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni sono le soluzioni in  $\omega > 0$  dell'equazione caratteristica  $\det(\omega^2 A + H_U) = 0$ , che nella fattispecie assume la forma:

$$\det \begin{pmatrix} m \frac{33R^2}{18} \omega^2 - \frac{16kR^2}{9} \left( \frac{3mg}{4kR} - 1 \right) & m \frac{4R}{3} \omega^2 \\ m \frac{4R}{3} \omega^2 & 2m\omega^2 - k \end{pmatrix} = 0$$

e si riduce pertanto all'equazione di secondo grado di  $\omega^2$ :

$$\left[ m \frac{33R^2}{18} \omega^2 - \frac{16kR^2}{9} \left( \frac{3mg}{4kR} - 1 \right) \right] (2m\omega^2 - k) - \frac{16}{9} m^2 R^2 \omega^4 = 0,$$

che caratterizza le due pulsazioni normali  $\omega = \omega_1, \omega_2$ . Le frequenze normali saranno quindi date da  $f_1 = \omega_1/2\pi$  e  $f_2 = \omega_2/2\pi$ .