

Esercizio 1

Nel piano verticale Oxy di una terna inerziale $Oxyz$ si considera un disco rigido di raggio R e centro C libero di ruotare attorno all'asse Oz , che passa per il suo bordo. Il disco, pesante, è sottoposto ad una forza $\vec{F}_A = -k[(A-O) \cdot \hat{e}_2]^2 \hat{e}_2$, ($k > 0$ costante) applicata nel punto A del bordo diametralmente opposto ad O . La densità del disco in un suo generico punto P risulta $\sigma(P) = m|P-C|^2/\pi R^4$. Assunto che il momento in O delle reazioni vincolari abbia componente nulla lungo Oz , determinare:

- (a) le equazioni del moto del sistema in termini dell'angolo θ in figura;
- (b) le condizioni iniziali per le quali si hanno moti periodici;
- (c) le condizioni iniziali corrispondenti a moti indefinitamente progressivi del sistema sull'intera retta dei θ reali;
- (d) le configurazioni di equilibrio del sistema, analizzandone le proprietà di stabilità, nell'ipotesi che in C sia applicata l'ulteriore sollecitazione $\vec{F}_C = -\beta \dot{C}$, con $\beta > 0$ costante.

Esercizio 2

In una terna $Oxyz$, rotante con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale Oy rispetto ad un riferimento inerziale, si considera un sistema pesante costituito da un disco circolare rigido omogeneo, di centro G , raggio r e massa m , vincolato a rotolare su una guida circolare fissa di centro O e raggio $R > r$. Durante il moto il disco si mantiene nel piano Oxy . Un punto P assegnato sul bordo del disco è connesso all'origine O da una molla ideale di costante elastica $k > 0$. Assunti i vincoli ideali ed introdotti come parametri lagrangiani gli angoli ϕ e θ in figura:

- (a) individuare le configurazioni di equilibrio relative alla terna $Oxyz$ ed analizzarne la stabilità;
- (b) scrivere le equazioni lagrangiane del moto del sistema, nell'ipotesi che al disco sia applicata, oltre alle sollecitazioni già descritte, una coppia di momento costante $\beta \hat{e}_3$;
- (c) determinare l'espressione della reazione vincolare, agente sul disco nel suo punto di contatto S con la guida, per un moto arbitrario del sistema;
- (d) considerato un qualsiasi moto regolare del sistema, descritto dalle funzioni $\theta(t)$, $\phi(t)$, $t \in I$ intervallo reale, determinare la posizione del centro C di rotazione istantanea del disco quale funzione del tempo.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) **Equazione del moto**

La condizione che il momento delle reazioni vincolari rispetto al polo O abbia componente nulla lungo l'asse di rotazione consente di scrivere l'equazione del moto del sistema come proiezione lungo \hat{e}_3 dell'equazione cardinale del momento angolare in O :

$$I_{Oz} \ddot{\theta} = [\vec{M}_O^g + \vec{M}_O^A] \cdot \hat{e}_3$$

essendo I_{Oz} il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse Oz e \vec{M}_O^g , \vec{M}_O^A i momenti rispetto ad O della forza peso e della sollecitazione \vec{F}_A rispettivamente. La massa totale M del disco \mathbb{D} si ricava integrando la densità σ sull'intera superficie del disco stesso:

$$M = \int_{\mathbb{D}} \sigma(P) dS$$

integrale che nelle coordinate polari (ρ, ϕ) definite da $P - C = \rho(\cos \phi \hat{e}_1 + \sin \phi \hat{e}_2)$ diventa

$$\begin{aligned} M &= \int_{[0,R]_{\theta} \times [0,2\pi]_{\phi}} \sigma(\rho, \theta) \rho d\rho d\phi = \int_{[0,R]_{\theta} \times [0,2\pi]_{\phi}} \frac{m}{\pi R^4} \rho^3 d\rho d\phi = \\ &= \frac{m}{\pi R^4} \int_{[0,R]} \rho^3 d\rho \int_{[0,2\pi]} d\phi = \frac{m}{\pi R^4} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Il momento in O della forza peso coincide con quello del peso totale applicato in C , che in quanto centro di simmetria è anche baricentro del disco,

$$\vec{M}_O^g = (C - O) \wedge \left(-\frac{m}{2}g \hat{e}_2\right) = R(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) \wedge \left(-\frac{m}{2}g \hat{e}_2\right) = -\frac{mgR}{2} \sin \theta \hat{e}_3.$$

Per la sollecitazione \vec{F}_A risulta invece

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^A &= (A - O) \wedge \{-k[(A - O) \cdot \hat{e}_2]^2 \hat{e}_2\} = -k 2R(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) \wedge [(A - O) \cdot \hat{e}_2]^2 \hat{e}_2 = \\ &= -2kR[(A - O) \cdot \hat{e}_2]^2 \sin \theta \hat{e}_3 = -2kR[-2R \cos \theta]^2 \sin \theta \hat{e}_3 = -8kR^3 \cos^2 \theta \sin \theta \hat{e}_3, \end{aligned}$$

in modo che, tenuto conto del momento \vec{M}_O^ψ in O delle reazioni vincolari e indicato con \vec{K}_O il momento angolare di \mathbb{D} rispetto al polo O , l'equazione cardinale del momento angolare per il disco si scrive

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_O = -\frac{mgR}{2} \sin \theta \hat{e}_3 - 8kR^3 \cos^2 \theta \sin \theta \hat{e}_3 + \vec{M}_O^\psi$$

e la proiezione di questa lungo \hat{e}_3 diventa, in forza dell'ipotesi $\vec{M}_O^\psi \cdot \hat{e}_3 = 0$,

$$\hat{e}_3 \cdot \frac{d}{dt} \vec{K}_O = -\frac{mgR}{2} \sin \theta - 8kR^3 \cos^2 \theta \sin \theta.$$

Quest'ultima equazione si riconduce alla forma standard introducendo l'operatore d'inerzia in O del disco, L_O , ed osservando che la velocità angolare del disco vale $\dot{\theta} \hat{e}_3$, per cui

$$\hat{e}_3 \cdot \frac{d}{dt} \vec{K}_O = \frac{d}{dt}(\hat{e}_3 \cdot \vec{K}_O) = \frac{d}{dt}[\hat{e}_3 \cdot L_O(\dot{\theta} \hat{e}_3)] = \frac{d}{dt}[\dot{\theta} \hat{e}_3 \cdot L_O(\hat{e}_3)] = \frac{d}{dt}(\dot{\theta} I_{Oz}) = I_{Oz} \ddot{\theta}$$

e dunque

$$I_{Oz} \ddot{\theta} = -\frac{mgR}{2} \sin \theta - 8kR^3 \cos^2 \theta \sin \theta.$$

Si intende che la condizione $\vec{M}_O^\psi \cdot \hat{e}_3 = 0$ coincide con quella dei vincoli ideali, sicché allo stesso risultato si può pervenire per via lagrangiana, calcolando l'energia cinetica del disco

$$T = \frac{1}{2} I_{Oz} \dot{\theta}^2 ,$$

il potenziale della forza peso

$$U_g = -\frac{m}{2} g (-R \cos \theta) = \frac{mgR}{2} \cos \theta$$

e il contributo della sollecitazione \vec{F}_A , che ha componente lagrangiana

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \vec{F}_A \cdot \frac{\partial A}{\partial \theta} = -k[(A-O) \cdot \hat{e}_2]^2 \hat{e}_2 \cdot \frac{\partial A}{\partial \theta} = -4kR^2 \cos^2 \theta \hat{e}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (2R \sin \theta \hat{e}_1 - 2R \cos \theta \hat{e}_2) = \\ &= -4kR^2 \cos^2 \theta \hat{e}_2 \cdot (2R \cos \theta \hat{e}_1 + 2R \sin \theta \hat{e}_2) = -8kR^3 \cos^2 \theta \sin \theta \end{aligned}$$

e potenziale

$$U_A = \int Q_\theta d\theta = \frac{8}{3} kR^3 \cos^3 \theta .$$

La lagrangiana del sistema si scrive quindi

$$\mathcal{L} = T + U_g + U_A = I_{Oz} \dot{\theta}^2 + \frac{mgR}{2} \cos \theta + \frac{8}{3} kR^3 \cos^3 \theta$$

e l'equazione di Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$ coincide con l'equazione del moto già determinata.

Per completare la discussione delle equazioni del moto non rimane che calcolare esplicitamente il momento d'inerzia I_{Oz} , facendo uso anzitutto del teorema di Huyghens-Steiner

$$I_{Oz} = \frac{m}{2} R^2 + I_{Cz} = \frac{mR^2}{2} + I_{Cz}$$

e determinando quindi il momento d'inerzia rispetto all'asse Cz con una integrazione in coordinate polari, le stesse già introdotte in precedenza,

$$I_{Cz} = \int_{[0,2\pi]_\theta \times [0,2\pi]_\phi} \frac{m}{\pi R^4} \rho^2 \rho^2 \rho d\rho d\theta = \frac{m}{\pi R^4} \frac{R^6}{6} 2\pi = \frac{mR^2}{3} .$$

In conclusione, si ha

$$I_{Oz} = \frac{mR^2}{2} + \frac{mR^2}{3} = \frac{5}{6} mR^2$$

e pertanto

$$\frac{5}{6} mR^2 \ddot{\theta} = -\frac{mgR}{2} \sin \theta - 8kR^3 \cos^2 \theta \sin \theta .$$

(b) Condizioni iniziali per le quali si hanno moti periodici

L'energia meccanica totale è un integrale primo del sistema

$$H(\theta, \dot{\theta}) = T(\dot{\theta}) - U(\theta) = \frac{5}{12}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{mgR}{2}\cos\theta - \frac{8}{3}kR^3\cos^3\theta$$

dal momento che la lagrangiana è indipendente da tempo. L'andamento qualitativo delle soluzioni può quindi essere determinato per mezzo della discussione di Weierstrass. I punti critici dell'energia potenziale totale

$$W(\theta) = -U(\theta) = -\frac{mgR}{2}\cos\theta - \frac{8}{3}kR^3\cos^3\theta$$

sono le soluzioni dell'equazione

$$W'(\theta) = \frac{mgR}{2}\sin\theta + 8kR^3\cos^2\theta\sin\theta = \sin\theta \left[\frac{mgR}{2} + 8kR^3\cos^2\theta \right] = 0$$

vale a dire $\theta = 0, \pi$. Dall'espressione della derivata seconda

$$W''(\theta) = \frac{mgR}{2}\cos\theta + 8kR^3\cos^3\theta - 16kR^3\sin^2\theta\cos\theta$$

si deduce che

$$W''(0) = \frac{mgR}{2} + 8kR^3 > 0 \quad W''(\pi) = -\frac{mgR}{2} - 8kR^3 < 0$$

per cui $\theta = 0$ è un minimo relativo proprio dell'energia potenziale, mentre $\theta = \pi$ risulta un massimo; i valori minimo e massimo di W sono rispettivamente

$$W(0) = -\frac{mgR}{2} - \frac{8}{3}kR^3 \quad W(\pi) = \frac{mgR}{2} + \frac{8}{3}kR^3 .$$

Se ne conclude che le condizioni iniziali $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ per le quali si hanno moti periodici sono tutte e sole quelle che soddisfano la condizione

$$W(0) < H(\theta_0, \dot{\theta}_0) < W(\pi)$$

ossia

$$-\frac{mgR}{2} - \frac{8}{3}kR^3 < \frac{5}{12}mR^2\dot{\theta}_0^2 - \frac{mgR}{2}\cos\theta_0 - \frac{8}{3}kR^3\cos^3\theta_0 < \frac{mgR}{2} + \frac{8}{3}kR^3 .$$

(c) Condizioni iniziali per i moti indefinitamente progressivi

Dalla localizzazione dei punti critici dell'energia potenziale del sistema si deduce immediatamente, per Weierstrass, che le condizioni iniziali corrispondenti ai moti indefinitamente progressivi sull'intera retta dei θ reali si hanno per

$$H(\theta_0, \dot{\theta}_0) > W(\pi)$$

a patto che $\dot{\theta}_0 > 0$, ed appartengono quindi tutte e soltanto all'insieme

$$\left\{ (\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2 : H(\theta_0, \dot{\theta}_0) > \frac{mgR}{2} + \frac{8}{3}kR^3, \dot{\theta}_0 > 0 \right\}.$$

(d) Configurazioni di equilibrio e loro proprietà di stabilità in presenza della sollecitazione addizionale

La sollecitazione applicata nel centro C del disco ha componente lagrangiana

$$D_\theta = \vec{F}_C \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta} = -\beta \dot{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta} = -\beta \left| \frac{\partial C}{\partial \theta} \right|^2 \dot{\theta} = -\beta R^2 \dot{\theta}$$

e potenza non positiva

$$\pi = D_\theta \dot{\theta} = -\beta R^2 \dot{\theta}^2 \leq 0.$$

Poichè $\pi = 0$ implica $\dot{\theta} = 0$, la sollecitazione ha natura completamente dissipativa ed è dunque lecito fare uso dei criteri di Barbasin-Krasovskii nell'analisi delle proprietà di stabilità delle configurazioni di equilibrio, che non sono influenzate dalla presenza di questa sollecitazione addizionale e che quindi si identificano con i punti critici del potenziale $\theta = 0, \pi$, banalmente isolati. Si è già stabilito che $\theta = 0$ costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, e risulta asintoticamente stabile per il criterio di Barbasin-Krasovskii; per contro, la configurazione $\theta = \pi$ è un minimo relativo proprio, instabile per B.-K..

Soluzione dell'esercizio 2

Se descritto nella terna di riferimento non inerziale $Oxyz$, il sistema è chiaramente a vincoli indipendenti dal tempo e risulta soggetto soltanto a sollecitazioni posizionali conservative: la forza peso agente sul disco, la forza di interazione elastica fra i punti P ed O , le sollecitazioni centrifughe applicate all'intero disco. Si osservi che, al solito, le componenti lagrangiane delle forze di Coriolis sono identicamente nulle in quanto il moto del disco avviene in un piano passante per l'asse di rotazione Oy e fisso rispetto al riferimento $Oxyz$.

(a) Configurazioni di equilibrio relative ad $Oxyz$ e stabilità delle stesse

Il potenziale totale del sistema si ottiene sommando i potenziali relativi alle singole sollecitazioni, con esclusione delle forze di Coriolis che, come già osservato sopra, hanno entrambe le componenti lagrangiane uguali a zero e non influiscono perciò sul moto del sistema. Il potenziale associato alle interazioni elastiche fra i punti P ed O si scrive immediatamente usando l'espressione generale e sostituendo in essa i parametri lagrangiani θ e ϕ

$$U_{el} = -\frac{k}{2}|P-O|^2 = -\frac{k}{2}[(R-r)^2 + r^2 - 2(R-r)r \cos(\pi - \phi)] = -kr(R-r) \cos \phi + \text{costante}.$$

Per il potenziale centrifugo si ha invece

$$U_{cf} = \frac{\omega^2}{2} I_{Oy} = \frac{\omega^2}{2} [I_{Gy} + m(R-r)^2 \sin^2 \theta] = \frac{m}{2} \omega^2 (R-r)^2 \sin^2 \theta + \text{costante}$$

mentre il potenziale gravitazionale risulta

$$U_g = -mg \hat{e}_2 \cdot (G - O) = -mg \hat{e}_2 \cdot [(R - r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R - r) \cos \theta \hat{e}_2] = mg(R - r) \cos \theta .$$

Omettendo le eventuali costanti additive inessenziali, il potenziale totale si riduce allora a

$$U(\theta, \phi) = U_{el} + U_{cf} + U_g = -kr(R - r) \cos \phi + \frac{m}{2} \omega^2 (R - r)^2 \sin^2 \theta + mg(R - r) \cos \theta$$

e le configurazioni di equilibrio del sistema si identificano tutte e soltanto con i punti critici di tale potenziale.

L'individuazione delle configurazioni di equilibrio e l'analisi delle loro proprietà di stabilità richiedono il calcolo delle derivate parziali prime:

$$\begin{aligned} U_\theta &= m\omega^2 (R - r)^2 \sin \theta \cos \theta - mg(R - r) \sin \theta \\ U_\phi &= kr(R - r) \sin \phi \end{aligned}$$

e delle derivate seconde:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta} &= m\omega^2 (R - r)^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - mg(R - r) \cos \theta \\ U_{\theta\phi} &= U_{\phi\theta} = 0 \\ U_{\phi\phi} &= kr(R - r) \cos \phi . \end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio si deducono dal sistema di equazioni trigonometriche

$$\begin{cases} \sin \theta \left[\cos \theta - \frac{g}{(R - r)\omega^2} \right] = 0 \\ \sin \phi = 0 \end{cases}$$

facilmente risolvibile grazie al fatto che le due equazioni sono disaccoppiate ed alla forma fattorizzata della prima di esse. L'equazione $\sin \phi = 0$ implica

$$\phi = 0 , \quad \pi ,$$

mentre dalla prima equazione $\sin \theta \left[\cos \theta - \frac{g}{(R - r)\omega^2} \right] = 0$ seguono le soluzioni

$$\theta = 0 , \quad \pi ,$$

sempre definite, e

$$\theta = \pm \theta^* , \quad \theta^* = \arccos \left[\frac{g}{(R - r)\omega^2} \right] ,$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia

$$\frac{g}{(R - r)\omega^2} < 1 .$$

Le configurazioni di equilibrio del sistema sono pertanto tutte e soltanto quelle sottoelencate:

$$\begin{aligned}(\theta, \phi) = & (0, 0), \quad (\pi, 0), \quad (\theta^*, 0), \quad (-\theta^*, 0) \\ & (0, \pi), \quad (\pi, \pi), \quad (\theta^*, \pi), \quad (-\theta^*, \pi).\end{aligned}$$

L'hessiana del potenziale U in una generica configurazione (θ, ϕ) assume la forma diagonale

$$H_U(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} m\omega^2(R-r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - mg(R-r)\cos\theta & 0 \\ 0 & kr(R-r)\cos\phi \end{pmatrix}$$

per cui l'analisi di stabilità non presenta particolari difficoltà, essendo gli autovalori λ_1 e λ_2 di $H_U(\theta, \phi)$ già noti esplicitamente. Distinguiamo vari casi e sottocasi.

(i) Se $\phi = 0$, l'autovalore $\lambda_2 = kr(R-r)\cos\phi = kr(R-r) > 0$ comporta l'instabilità della configurazione di equilibrio in forza del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet. Pertanto:

$$(\theta, \phi) = (0, 0), \quad (\pi, 0), \quad (\theta^*, 0), \quad (-\theta^*, 0)$$

sono tutte configurazioni di equilibrio instabili.

(ii) Se $\phi = \pi$, l'hessiana ha un autovalore $\lambda_2 = kr(R-r)\cos\phi = -kr(R-r) < 0$ e le proprietà di stabilità sono determinate dal segno dell'altro autovalore

$$\lambda_1 = m\omega^2(R-r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - mg(R-r)\cos\theta.$$

(ii - 1) Per $\theta = 0$ si ha:

$$\lambda_1 = m\omega^2(R-r)^2 - mg(R-r) = m\omega^2(R-r)^2 \left[1 - \frac{g}{(R-r)\omega^2} \right]$$

in modo che:

- $\lambda_1 < 0$ se e soltanto se $g/(R-r)\omega^2 > 1$, nel qual caso $(\theta, \phi) = (0, \pi)$ è un massimo relativo proprio di U , stabile per Lagrange-Dirichlet;
- $\lambda_1 > 0$ se e solo se $g/(R-r)\omega^2 < 1$, ed in questa ipotesi la configurazione risulta instabile per l'inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- $\lambda_1 = 0$ corrisponde ad un caso critico e ricorre per $g/(R-r)\omega^2 = 1$.

(ii - 2) Per $\theta = \pi$ risulta

$$\lambda_1 = m\omega^2(R-r)^2 + mg(R-r) > 0$$

e se ne deduce l'instabilità della configurazione $(\theta, \phi) = (\pi, \pi)$ per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

(ii – 3) Se infine $\theta = \theta^*, -\theta^*$, vale:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= m\omega^2(R-r)^2(2\cos^2\theta^* - 1) - mg(R-r)\cos\theta^* = \\ &= m\omega^2(R-r)^2\left[2\cos^2\theta^* - 1 - \frac{g}{(R-r)\omega^2}\cos\theta^*\right] = \\ &= m\omega^2(R-r)^2[2\cos^2\theta^* - 1 + \cos^2\theta^*] = m\omega^2(R-r)^2(\cos^2\theta^* - 1) < 0\end{aligned}$$

in forza della condizione di esistenza delle soluzioni in esame. Le configurazioni $(\theta, \phi) = (\theta^*, \pi), (-\theta^*, \pi)$, allorché definite, sono stabili per Lagrange-Dirichlet, quali massimi relativi propri del potenziale.

(b) Equazioni lagrangiane del moto

Essendo il disco privo di punti fissi, l'espressione della sua energia cinetica si ricava per mezzo del teorema di König, considerato che la posizione del baricentro G è individuata da $G-O = (R-r)(\sin\theta\hat{e}_1 - \cos\theta\hat{e}_2)$ e che la velocità angolare del disco risulta $\vec{\omega} = (\dot{\theta} + \dot{\phi})\hat{e}_3$,

$$T = \frac{m}{2}\dot{G}^2 + T_G = \frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2$$

dove T_G indica l'energia cinetica del moto — con asse fisso Gz — attorno al baricentro. La lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$ del sistema si scrive allora:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{mr^2}{4}(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - kr(R-r)\cos\phi + \frac{m}{2}\omega^2(R-r)^2\sin^2\theta + mg(R-r)\cos\theta$$

e da essa seguono immediatamente le ovvie relazioni:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} &= m(R-r)^2\dot{\theta} + \frac{mr^2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\phi}) & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) &= \left[m(R-r)^2 + \frac{mr^2}{2}\right]\ddot{\theta} + \frac{mr^2}{2}\ddot{\phi} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &= m\omega^2(R-r)^2\sin\theta\cos\theta - mg(R-r)\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} &= \frac{mr^2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\phi}) & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) &= \frac{mr^2}{2}\ddot{\theta} + \frac{mr^2}{2}\ddot{\phi} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} &= kr(R-r)\sin\phi.\end{aligned}$$

Per ricavare le equazioni di Lagrange basta ora determinare le componenti lagrangiane della coppia di momento costante applicata al disco. A questo scopo, ragionando formalmente, si ricorda che lo spostamento virtuale infinitesimo di un arbitrario punto A del disco \mathbb{D} è dato da

$$\delta A = \delta\theta\hat{e}_3 \wedge (G-O) + (\delta\theta + \delta\phi)\hat{e}_3 \wedge (A-G) = \delta\phi\hat{e}_3 \wedge (A-G) + \delta\theta\hat{e}_3 \wedge (A-O)$$

per cui l'espressione del lavoro virtuale infinitesimo di un qualsiasi sistema di sollecitazioni attive $\{A, \vec{F}_A\}_{A \in \mathbb{D}}$ risulta

$$\delta L = \delta\phi\hat{e}_3 \cdot \sum_{A \in \mathbb{D}} (A-G) \wedge \vec{F}_A + \delta\theta\hat{e}_3 \cdot \sum_{A \in \mathbb{D}} (A-O) \wedge \vec{F}_A.$$

Nella fattispecie, al disco è applicata una coppia di momento costante $\beta \hat{e}_3$, indipendente dalla scelta del polo — in quanto sistema di forze a risultante nullo. Conseguentemente, l'espressione del lavoro virtuale diventa

$$\delta L = \delta\phi \hat{e}_3 \cdot (\beta \hat{e}_3) + \delta\theta \hat{e}_3 \cdot (\beta \hat{e}_3) = \beta \delta\phi + \beta \delta\theta = Q_\phi \delta\phi + Q_\theta \delta\theta$$

e dunque le componenti lagrangiane della coppia di forze sono

$$Q_\theta = \beta \quad Q_\phi = \beta .$$

La sollecitazione ha natura posizionale conservativa, ammettendo il potenziale

$$U_{\text{coppia}} = \beta(\theta + \phi) .$$

Le equazioni di Lagrange si scrivono perciò:

$$\begin{cases} \left[m(R-r)^2 + \frac{mr^2}{2} \right] \ddot{\theta} + \frac{mr^2}{2} \ddot{\phi} = m\omega^2(R-r)^2 \sin\theta \cos\theta - mg(R-r) \sin\theta + \beta \\ \frac{mr^2}{2} \ddot{\theta} + \frac{mr^2}{2} \ddot{\phi} = kr(R-r) \sin\phi + \beta . \end{cases}$$

(c) Espressione della reazione vincolare in S per un moto arbitrario

La reazione vincolare $\vec{\psi}_S$ agente sul disco in S durante un moto arbitrario del sistema si ottiene applicando al disco stesso l'equazione cardinale della quantità di moto, vale a dire

$$m\vec{G} = -mg \hat{e}_2 + \vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_{\text{cf}} + \vec{F}_{\text{Cor}} + \vec{\psi}_S$$

e quindi

$$\vec{\psi}_S = m\vec{G} + mg \hat{e}_2 - \vec{F}_{\text{el}} - \vec{F}_{\text{cf}} - \vec{F}_{\text{Cor}} .$$

È sufficiente scrivere le espressioni esplicite per le varie sollecitazioni attive in termini dei parametri lagrangiani e delle loro derivate prime rispetto al tempo. Per la sollecitazione elastica applicata al disco in P si ha

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{el}} &= -k(P - O) = -k(P - G + G - O) = \\ &= -k[r \sin(\theta + \phi) \hat{e}_1 - r \cos(\theta + \phi) \hat{e}_2 + (R - r) \sin\theta \hat{e}_1 - (R - r) \cos\theta \hat{e}_2] \end{aligned}$$

mentre il risultante delle forze centrifughe agenti sul disco, di densità costante σ , risulta

$$\vec{F}_{\text{cf}} = \int_{\mathbb{D}} \omega^2 x \sigma \, dx dy \hat{e}_1 = m\omega^2 \frac{1}{m} \int_{\mathbb{D}} x \sigma \, dx dy \hat{e}_1 = m\omega^2(G - O) \cdot \hat{e}_1 \hat{e}_1 = m\omega^2(R - r) \sin\theta \hat{e}_1 .$$

Il risultante delle forze di Coriolis viene ottenuto calcolando l'espressione cartesiana della sollecitazione sul generico punto A del disco, individuato da $A - O = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2$, ed integrando sull'intera superficie del disco stesso:

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = \int_{\mathbb{D}} (-2\omega \hat{e}_2) \wedge \dot{A} \sigma \, dx dy = -2\omega \int_{\mathbb{D}} \hat{e}_2 \wedge [\dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (G - O) + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_3 \wedge (A - G)] \sigma \, dx dy =$$

$$= -2\omega \int_{\mathbb{D}} \hat{e}_2 \wedge [\dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (A - O) + \dot{\phi} \hat{e}_3 \wedge (A - G)] \sigma \, dx dy .$$

In quest'ultima relazione si possono sviluppare i doppi prodotti vettoriali

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = -2\omega \int_{\mathbb{D}} \left\{ \dot{\theta} [\hat{e}_3 \hat{e}_2 \cdot (A - O) - (A - O) \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3] + \dot{\phi} [\hat{e}_3 \hat{e}_2 \cdot (A - G) - (A - G) \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3] \right\} \sigma \, dx dy$$

e indicata con y_G l'ordinata del baricentro G , scrivere

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{Cor}} &= -2\omega \int_{\mathbb{D}} [\hat{e}_3 \dot{\theta} y + \hat{e}_3 \dot{\phi} (y - y_G)] \sigma \, dx dy = -2\omega \hat{e}_3 \left[\dot{\theta} \int_{\mathbb{D}} y \sigma \, dx dy + \dot{\phi} \int_{\mathbb{D}} (y - y_G) \sigma \, dx dy \right] = \\ &= -2m\omega \hat{e}_3 (\dot{\theta} y_G + \dot{\phi} 0) = -2m\omega \dot{\theta} y_G \hat{e}_3 = 2m\omega (R - r) \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_3 . \end{aligned}$$

Poiché il baricentro è individuato da $G - O = (R - r)(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2)$, velocità ed accelerazione di G relative alla terna $Oxyz$ si deducono derivando successivamente rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \dot{G} &= (R - r)(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \dot{\theta} \\ \ddot{G} &= (R - r)(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \ddot{\theta} + (R - r)(-\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

per cui la reazione vincolare agente sul disco in S assume la forma

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_S &= m(R - r)(\cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2) \hat{e}_1 + m(R - r)(\sin \theta \ddot{\theta} + \cos \theta \dot{\theta}^2) \hat{e}_2 + mg \hat{e}_2 + \\ &+ k[r \sin(\theta + \phi) + (R - r) \sin \theta] \hat{e}_1 - k[r \cos(\theta + \phi) + (R - r) \cos \theta] \hat{e}_2 - m\omega^2 (R - r) \sin \theta \hat{e}_1 - \\ &\quad - 2m\omega (R - r) \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_3 , \end{aligned}$$

nella quale $\ddot{\theta}$ può essere eventualmente riespresso in termini di $\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ per mezzo delle equazioni di Lagrange.

(d) Centro di rotazione istantanea

Per un moto piano arbitrario, nota la velocità angolare istantanea $\vec{\omega} \neq 0$ e la velocità allo stesso istante di un punto assegnato A , la posizione del centro di rotazione istantanea C è individuata dalla ben nota espressione

$$C - A = \frac{\vec{\omega} \wedge \dot{A}}{|\vec{\omega}|^2} .$$

Nella fattispecie conviene scegliere come punto A il baricentro G del disco per cui, tenendo conto che $\vec{\omega} = (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_3$,

$$C - G = \frac{(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_3 \wedge [\dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (G - O)]}{(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta} + \dot{\phi}} \left\{ \hat{e}_3 \wedge [\hat{e}_3 \wedge (G - O)] \right\} =$$

$$= \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta} + \dot{\phi}} \left\{ \hat{e}_3 \hat{e}_3 \cdot (G - O) - (G - O) \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 \right\} = -\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta} + \dot{\phi}} (G - O)$$

e dunque

$$C - O = C - G + G - O = -\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta} + \dot{\phi}} (G - O) + G - O = \frac{\dot{\phi}}{\dot{\theta} + \dot{\phi}} (G - O)$$

relazione che può anche porsi nella forma più esplicita

$$C - O = \frac{\dot{\phi}}{\dot{\theta} + \dot{\phi}} (R - r) (\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) .$$

Osservazione

Equazioni cardinali ed equazioni lagrangiane.

Si vuole mostrare che le equazioni di Lagrange del sistema si possono identificare con le proiezioni lungo \hat{e}_3 di due equazioni cardinali del disco scelte convenientemente.

La velocità virtuale di un arbitrario punto A del disco è data infatti dall'espressione

$$\vec{v}_A = \alpha \hat{e}_3 \wedge (G - O) + (\alpha + \beta) \hat{e}_3 \wedge (A - G) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

e se $\vec{\psi}_A$ indica il risultante delle reazioni vincolari applicate allo stesso punto, la potenza virtuale di dette reazioni rispetto alla velocità virtuale assegnata risulta

$$\Pi = \sum_{A \in \mathbb{D}} \vec{v}_A \cdot \vec{\psi}_A = \alpha \hat{e}_3 \cdot \sum_{A \in \mathbb{D}} (A - O) \wedge \vec{\psi}_A + \beta \hat{e}_3 \cdot \sum_{A \in \mathbb{D}} (A - G) \wedge \vec{\psi}_A = \alpha \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\psi + \beta \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_G^\psi ,$$

essendo \vec{M}_O^ψ e \vec{M}_G^ψ i momenti delle reazioni vincolari (esterne) rispetto ai poli O e G rispettivamente. Nell'ipotesi di vincoli ideali deve aversi $\Pi = 0 \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e di conseguenza:

$$\hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\psi = 0 \quad \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_G^\psi = 0 .$$

Questo risultato suggerisce che le equazioni cardinali del momento angolare, relative ai poli O e G rispettivamente, debbano identificarsi con le equazioni lagrangiane del moto, considerato che $\alpha \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\psi + \beta \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_G^\psi = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, è proprio l'equazione simbolica della dinamica, dalla quale le equazioni lagrangiane si deducono. L'equazione cardinale del momento angolare rispetto ad un generico polo B , comunque in moto, assume la ben nota forma:

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_O = -m \dot{B} \wedge \dot{G} + \vec{M}_B ,$$

che contiene il momento in B delle sollecitazioni esterne attive e di reazione vincolare, e che nella fattispecie ha interesse considerare per B coincidente con l'origine fissa della terna di riferimento e per $B = G$. Più precisamente, con O fisso si ha

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_O = \vec{M}_O$$

ed una espressione analoga vale nel caso di $O = G$

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_G = \vec{M}_G .$$

L'equazione cardinale del disco rispetto al polo O è data da

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_O = \vec{M}_O^\psi + \vec{M}_O^{\text{Cor}} + \vec{M}_O^{\text{el}} + \vec{M}_O^{\text{g}} + \vec{M}_O^{\text{cf}} + \vec{M}_O^{\text{coppia}}$$

in cui il momento angolare del disco relativo alla terna $Oxyz$ si esprime per mezzo del teorema di König

$$\vec{K}_O = (G - O) \wedge m \dot{G} + L_{Gzz} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_3 = (G - O) \wedge m \dot{G} + \frac{mr^2}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_3 ,$$

essendo L_{Gzz} il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse Gz e

$$\begin{aligned} (G-O) \wedge m\dot{G} &= (G-O) \wedge [m\dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (G-O)] = m\dot{\theta} [\hat{e}_3 (G-O) \cdot (G-O) - (G-O) \hat{e}_3 \cdot (G-O)] = \\ &= m\dot{\theta} \hat{e}_3 |G-O|^2 = m(R-r)^2 \dot{\theta} \hat{e}_3 . \end{aligned}$$

Il momento in O delle forze di Coriolis si deduce per mezzo della definizione, individuando con $A-O = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2$ la posizione di un punto arbitrario A del disco omogeneo, ed integrando sull'intera superficie di questo. Si ha così:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^{\text{Cor}} &= \int_{\mathbb{D}} (A-O) \wedge (-2\omega \hat{e}_2 \wedge \dot{A}) \sigma \, dx dy = \\ &= \int_{\mathbb{D}} (A-O) \wedge [-2\omega \hat{e}_2 \wedge (\dot{G} + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_3 \wedge (A-G))] \sigma \, dx dy = \\ &= -2\omega \int_{\mathbb{D}} (A-O) \wedge \{ \hat{e}_2 \wedge [\dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (G-O) + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_3 \wedge (A-G)] \} \sigma \, dx dy = \\ &= -2\omega \int_{\mathbb{D}} (A-O) \wedge \{ \hat{e}_2 \wedge [\dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (A-O) + \dot{\phi} \hat{e}_3 \wedge (A-G)] \} \sigma \, dx dy = \\ &= -2\omega \int_{\mathbb{D}} (A-O) \wedge \{ \dot{\theta} \hat{e}_3 \hat{e}_2 \cdot (A-O) - (A-O) \dot{\theta} \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_2 + \dot{\phi} \hat{e}_3 \hat{e}_2 \cdot (A-G) - (A-G) \dot{\phi} \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_2 \} \sigma \, dx dy = \\ &= -2\omega \int_{\mathbb{D}} (A-O) \wedge \{ \dot{\theta} \hat{e}_3 \hat{e}_2 \cdot (A-O) + \dot{\phi} \hat{e}_3 \hat{e}_2 \cdot (A-G) \} \sigma \, dx dy = \\ &= -2\omega \int_{\mathbb{D}} (A-O) \wedge \hat{e}_3 [\dot{\theta} \hat{e}_2 \cdot (A-O) + \dot{\phi} \hat{e}_2 \cdot (A-G)] \sigma \, dx dy . \end{aligned}$$

Posto

$$A-G = \xi \hat{e}_1 + \eta \hat{e}_2 \quad \text{e} \quad G-O = x_G \hat{e}_1 + y_G \hat{e}_2 ,$$

nelle nuove variabili ξ, η l'integrale è esteso al disco \mathbb{D}_0 di raggio r e centro $(\xi, \eta) = (0, 0)$, e la relazione precedente diventa

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^{\text{Cor}} &= -2\omega \int_{\mathbb{D}_0} [(\xi + x_G) \hat{e}_1 + (\eta + y_G) \hat{e}_2] \wedge \hat{e}_3 [\dot{\theta} (\eta + y_G) + \dot{\phi} \eta] \sigma \, d\xi d\eta = \\ &= -2\omega \int_{\mathbb{D}_0} [-(\xi + x_G) \hat{e}_2 + (\eta + y_G) \hat{e}_1] [(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \eta + \dot{\theta} y_G] \sigma \, d\xi d\eta = \\ &= -2\omega \int_{\mathbb{D}_0} [-(\dot{\theta} + \dot{\phi})(\xi + x_G) \eta \hat{e}_2 - \dot{\theta} y_G (\xi + x_G) \hat{e}_2 + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \eta (\eta + y_G) \hat{e}_1 + \\ &\quad + \dot{\theta} y_G (\eta + y_G) \hat{e}_1] \sigma \, d\xi d\eta = -2\omega \left[-\dot{\theta} y_G x_G m \hat{e}_2 + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \frac{mr^2}{4} \hat{e}_1 + \dot{\theta} y_G^2 m \hat{e}_1 \right] = \\ &= -2\omega \left[m(R-r)^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_2 + \frac{mr^2}{4} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_1 + m(R-r)^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \hat{e}_1 \right] . \end{aligned}$$

Il momento della forza elastica applicata al punto P risulta identicamente nullo

$$\vec{M}_O^{\text{el}} = (P-O) \wedge [-k(P-O)] = 0$$

mentre quello delle forze peso si scrive

$$\vec{M}_O^g = (G-O) \wedge (-mg \hat{e}_2) = (R-r)(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) \wedge (-mg \hat{e}_2) = -mg(R-r) \sin \theta \hat{e}_3 .$$

Per il momento delle forze centrifughe vale invece la relazione

$$\vec{M}_O^{cf} = \int_{\mathbb{D}} (x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2) \wedge \omega^2 x \hat{e}_1 \sigma \, dx dy = -\omega^2 \hat{e}_3 \int_{\mathbb{D}} xy \sigma \, dx dy = \omega^2 L_{xy} \hat{e}_3$$

dove il prodotto d'inerzia L_{xy} si calcola esplicitamente come

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{D}} xy \sigma \, dx dy &= - \int_{\mathbb{D}_0} (x_G + \xi)(y_G + \eta) \sigma \, d\xi d\eta = - \int_{\mathbb{D}_0} (x_G y_G + x_G \eta + y_G \xi + \xi \eta) \sigma \, d\xi d\eta = \\ &= -m x_G y_G = -m(R-r) \sin \theta [-(R-r) \cos \theta] = m(R-r)^2 \sin \theta \cos \theta . \end{aligned}$$

Per il momento della coppia applicata al disco, indipendente dalla scelta del polo, risulta infine

$$\vec{M}_O^{\text{coppia}} = \beta \hat{e}_3 .$$

L'equazione cardinale del disco in O diviene allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[m(R-r)^2 \dot{\theta} \hat{e}_3 + \frac{mr^2}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_3 \right] &= \vec{M}_O^\psi - \\ - 2\omega \left[m(R-r)^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_2 + \frac{mr^2}{4} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_1 + m(R-r)^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \hat{e}_1 \right] &+ \\ + 0 - mg(R-r) \sin \theta \hat{e}_3 + m(R-r)^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta \hat{e}_3 + \beta \hat{e}_3 & \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \left[m(R-r)^2 \ddot{\theta} + \frac{mr^2}{2} (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) \right] \hat{e}_3 &= -mg(R-r) \sin \theta \hat{e}_3 + m(R-r)^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta \hat{e}_3 + \beta \hat{e}_3 - \\ - 2\omega \left[m(R-r)^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_2 + \frac{mr^2}{4} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_1 + m(R-r)^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \hat{e}_1 \right] &+ \vec{M}_O^\psi . \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} \left[m(R-r)^2 \ddot{\theta} + \frac{mr^2}{2} (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) \right] \hat{e}_3 &= [-mg(R-r) \sin \theta + m(R-r)^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \beta] \hat{e}_3 - \\ - 2\omega \left[\left(\frac{mr^2}{4} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) + m(R-r)^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \right) \hat{e}_1 + m(R-r)^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_2 \right] &+ \vec{M}_O^\psi \end{aligned}$$

e proiettando lungo \hat{e}_3

$$m(R-r)^2 \ddot{\theta} + \frac{mr^2}{2} (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) = -mg(R-r) \sin \theta + m\omega^2 (R-r)^2 \sin \theta \cos \theta + \beta$$

che coincide con l'equazione di Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$.

L'equazione cardinale del momento del disco rispetto al polo mobile G risulta

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_G = \vec{M}_G^\psi + \vec{M}_G^{\text{Cor}} + \vec{M}_G^{\text{el}} + \vec{M}_G^{\text{g}} + \vec{M}_G^{\text{cf}} + \vec{M}_G^{\text{coppia}} .$$

Il momento angolare in G del disco è dato dall'espressione

$$\vec{K}_G = L_{Gzz}(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_3 = \frac{mr^2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_3$$

dove L_{Gzz} e $(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_3$ sono rispettivamente il momento d'inerzia rispetto all'asse Gz e la velocità angolare istantanea relativa ad $Oxyz$ del disco stesso. Per il momento in G delle forze di Coriolis si ha la relazione, analoga a quella già calcolata rispetto al polo fisso O ,

$$\vec{M}_G^{\text{Cor}} = \int_{\mathbb{D}} (A - G) \wedge (-2\omega \hat{e}_2 \wedge \dot{A}) \sigma \, dx dy$$

dalla quale si deduce, scritta la velocità di un punto $A \in \mathbb{D}$ come $\dot{A} = \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (G - O) + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_3 \wedge (A - G)$ e applicata la solita identità per il doppio prodotto vettoriale,

$$\vec{M}_G^{\text{Cor}} = -2\omega \int_{\mathbb{D}} (A - G) \wedge \hat{e}_3 [\dot{\theta} \hat{e}_2 \cdot (A - O) + \dot{\phi} \hat{e}_2 \cdot (A - G)] \sigma \, dx dy .$$

Con il cambiamento di variabili $(x, y) = (x_G, y_G) + (\xi, \eta)$ nell'integrale, si ottiene poi

$$\begin{aligned} \vec{M}_G^{\text{Cor}} &= -2\omega \int_{\mathbb{D}_0} (\xi \hat{e}_1 + \eta \hat{e}_2) \wedge \hat{e}_3 [\dot{\theta}(\eta + y_G) + \dot{\phi}\eta] \sigma \, d\xi d\eta = \\ &= -2\omega \int_{\mathbb{D}_0} (-\xi \hat{e}_2 + \eta \hat{e}_1) [\dot{\theta}(\eta + y_G) + \dot{\phi}\eta] \sigma \, d\xi d\eta = \\ &= -2\omega \int_{\mathbb{D}_0} (-\xi \hat{e}_2 + \eta \hat{e}_1) [(\dot{\theta} + \dot{\phi})\eta + \dot{\theta}y_G] \sigma \, d\xi d\eta \end{aligned}$$

ed infine

$$\vec{M}_G^{\text{Cor}} = -2\omega \int_{\mathbb{D}_0} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \eta^2 \hat{e}_1 \sigma \, d\xi d\eta = -2\omega(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \frac{mr^2}{4} \hat{e}_1 = -\frac{mr^2}{2}\omega(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_1 .$$

Il momento della sollecitazione elastica agente sul disco in P si scrive nella forma

$$\begin{aligned} \vec{M}_G^{\text{el}} &= (P - G) \wedge [-k(P - O)] = (O - G) \wedge [-k(P - O)] = k(G - O) \wedge (P - O) = \\ &= k(G - O) \wedge (P - G) = k(R - r)(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) \wedge [r \sin(\theta + \phi) \hat{e}_1 - r \cos(\theta + \phi) \hat{e}_2] = \\ &= k(R - r) [-r \sin \theta \cos(\theta + \phi) + r \cos \theta \sin(\theta + \phi)] \hat{e}_3 = kr(R - r) \sin \phi \hat{e}_3 , \end{aligned}$$

mentre quello delle forze peso, sistema equivalente a quello del solo peso totale applicato nel baricentro G , è nullo:

$$\vec{M}_G^g = (G - G) \wedge (-mg \hat{e}_2) = 0 \wedge (-mg \hat{e}_2) = 0 .$$

Il momento delle forze centrifughe si determina con la solita integrazione nelle variabili (ξ, η) e risulta proporzionale al prodotto d'inerzia L_{Gxy} del disco relativo agli assi $Gx-Gy$:

$$\vec{M}_G^{cf} = \int_{\mathbb{D}_0} (\xi \hat{e}_1 + \eta \hat{e}_2) \wedge \omega^2 \xi \hat{e}_1 \sigma d\xi d\eta = -\omega^2 \hat{e}_3 \int_{\mathbb{D}_0} \xi \eta \sigma d\xi d\eta = \omega^2 L_{Gxy} \hat{e}_3 = 0 .$$

Tenuto poi conto che il momento d'inerzia della coppia agente su \mathbb{D} è indipendente dalla scelta del polo e che perciò vale sempre $\vec{M}_G^{\text{coppia}} = \beta \hat{e}_3$, l'equazione cardinale in G del disco si riduce a

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{mr^2}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_3 \right] = \vec{M}_G^\psi - \frac{mr^2}{2} \omega (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_1 + kr(R-r) \sin \phi \hat{e}_3 + \beta \hat{e}_3$$

e quindi alla forma equivalente

$$\frac{mr^2}{2} (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) \hat{e}_3 = \vec{M}_G^\psi - \frac{mr^2}{2} \omega (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \hat{e}_1 + kr(R-r) \sin \phi \hat{e}_3 + \beta \hat{e}_3 .$$

La proiezione lungo \hat{e}_3 conduce all'equazione

$$\frac{mr^2}{2} (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) = kr(R-r) \sin \phi + \beta$$

identificabile con l'equazione di Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$.

Osservazione

Modi e frequenze normali delle piccole oscillazioni nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile per $\beta = 0$.

L'energia cinetica del sistema, a vincoli indipendenti dal tempo, è una forma quadratica definita positiva delle velocità lagrangiane $\dot{\theta}, \dot{\phi}$ e può essere espressa facilmente in forma matriciale:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \left[(R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{r^2}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \right] = \frac{m}{2} \left[(R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{r^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{r^2}{2} \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\theta} \ \dot{\phi}) m \begin{pmatrix} (R-r)^2 + \frac{r^2}{2} & r^2/2 \\ r^2/2 & r^2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\dot{\theta} \ \dot{\phi}) A \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

La matrice A dell'energia cinetica è costante, dunque indipendente dalla configurazione di equilibrio prescelta per il calcolo dei modi normali di oscillazione. Per l'hessiana del potenziale in (θ, ϕ) si ha invece l'espressione

$$H_U(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} m\omega^2(R-r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - mg(R-r)\cos\theta & 0 \\ 0 & kr(R-r)\cos\phi \end{pmatrix}$$

matrice che varia chiaramente in relazione alla scelta della configurazione di equilibrio nell'intorno della quale si vogliono caratterizzare le piccole oscillazioni.

Per semplicità si svolgerà l'analisi relativamente alla configurazione di equilibrio $(\theta, \phi) = (0, \pi)$, stabile per $m\omega^2(R-r)^2 - mg(R-r) < 0$. In questo caso l'hessiana del potenziale si riduce a

$$H_U(0, \pi) = \begin{pmatrix} m\omega^2(R-r)^2 - mg(R-r) & 0 \\ 0 & -kr(R-r) \end{pmatrix}$$

in modo che la lagrangiana ridotta, necessaria a ricavare l'equazione delle piccole oscillazioni nell'intorno di $(\theta, \phi) = (0, \pi)$, diventa

$$\mathcal{L}_{p.o.} = \frac{1}{2}\eta^T A\eta + \frac{1}{2}\eta^T H_U(0, \pi)\eta, \quad \eta = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi - \pi \end{pmatrix}.$$

L'equazione delle piccole oscillazioni è allora, in forma matriciale,

$$A\ddot{\eta} - H_U(0, \pi)\eta = 0$$

e di essa si ricercano soluzioni della forma $\eta = a \cos(\Omega t)$, con $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ costante e $\Omega > 0$. Si è così ricondotti al problema agli autovalori

$$[\Omega^2 A + H_U(0, \pi)]a = 0, \quad a \neq 0,$$

equivalente alla richiesta che Ω soddisfi la condizione

$$\det[\Omega^2 A + H_U(0, \pi)] = 0.$$

Nella fattispecie, l'equazione precedente risulta

$$\det \left[m\Omega^2 \begin{pmatrix} (R-r)^2 + \frac{r^2}{2} & r^2/2 \\ r^2/2 & r^2/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega^2(R-r)^2 - mg(R-r) & 0 \\ 0 & -kr(R-r) \end{pmatrix} \right] = 0$$

e può anche scriversi come

$$\det \left[\frac{mr^2\Omega^2}{2} \begin{pmatrix} 2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + mg(R-r) \begin{pmatrix} \frac{\omega^2(R-r)}{g} - 1 & 0 \\ 0 & -\frac{kr}{mg} \end{pmatrix} \right] = 0$$

ovvero

$$\det \left[\frac{r^2\Omega^2}{2g(R-r)} \begin{pmatrix} 2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\omega^2(R-r)}{g} - 1 & 0 \\ 0 & -\frac{kr}{mg} \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Posto per brevità $r^2\Omega^2/2g(R-r) = \mu > 0$, si ha

$$\det \left[\mu \begin{pmatrix} 2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\omega^2(R-r)}{g} - 1 & 0 \\ 0 & -\frac{kr}{mg} \end{pmatrix} \right] = 0$$

ossia

$$\det \begin{pmatrix} \mu \left[2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 \right] - \left(1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} \right) & \mu \\ \mu & \mu - \frac{kr}{mg} \end{pmatrix} = 0$$

e quindi

$$2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 \mu^2 - \mu \left\{ 1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} + \frac{kr}{mg} \left[2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 \right] \right\} + \frac{kr}{mg} \left(1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} \right) = 0 .$$

Il discriminante Δ dell'equazione caratteristica in μ ottenuta soddisfa

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} \right)^2 + \left(\frac{kr}{mg} \right)^2 \left[2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 \right]^2 + 2 \left(1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} \right) \frac{kr}{mg} \left[2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 \right] - \\ &\quad - 4 \left(1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} \right) \frac{kr}{mg} \left[2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 \right] + 4 \left(1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} \right) \frac{kr}{mg} = \\ &= \left\{ 1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 \right] \right\}^2 + 4 \left(1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} \right) \frac{kr}{mg} > 0 \end{aligned}$$

e

$$\Delta < \left\{ 1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} + \frac{kr}{mg} \left[2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 \right] \right\}^2$$

per cui le radici μ_1 e $\mu_2 - \mu_1 > \mu_2$ - dell'equazione caratteristica sono reali, positive e distinte. In conclusione, le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile $(\theta, \phi) = (0, \pi)$ si scrivono:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{2g(R-r)}{r^2} \mu_1} \quad , \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{2g(R-r)}{r^2} \mu_2} .$$

I corrispondenti modi normali di oscillazione si esprimono nella forma

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \phi(t) - \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} \cos(\Omega_i t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad i = 1, 2 \quad ,$$

con le componenti costanti $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$, scelte in modo da soddisfare per $(\alpha_i, \beta_i) \neq (0, 0)$ l'equazione agli autovalori

$$\begin{pmatrix} \mu_i \left[2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 \right] - \left(1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} \right) & \mu_i \\ \mu_i & \mu_i - \frac{kr}{mg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi in particolare

$$\alpha_i \mu_i + \beta_i \left(\mu_i - \frac{kr}{mg} \right) = 0 .$$

Le soluzioni generali di quest'ultima equazione possono porsi nella forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_i - \frac{kr}{mg} \\ -\mu_i \end{pmatrix} \xi \quad , \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\} ,$$

con $i = 1, 2$. Si osservi che

$$\begin{aligned} \mu_1 - \frac{kr}{mg} &= \frac{1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} + \frac{kr}{mg} \left[2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 + 1 \right] + \sqrt{\Delta}}{4 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2} - \frac{kr}{mg} = \\ &= \frac{1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} + \frac{kr}{mg} \left[-2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 + 1 \right] + \sqrt{\Delta}}{4 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2} > \\ &> \frac{1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 + 1 \right] + \sqrt{\Delta}}{4 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2} > \\ &> \frac{1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 + 1 \right] + \left| 1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 + 1 \right] \right|}{4 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2} \geq 0 . \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mu_2 - \frac{kr}{mg} &= \frac{1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 - 1 \right] - \sqrt{\Delta}}{4 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2} = \\ &= \frac{\left\{ 1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 - 1 \right] \right\}^2 - \Delta}{4 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 \left\{ 1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 - 1 \right] + \sqrt{\Delta} \right\}} \end{aligned}$$

espressione il cui denominatore è positivo in quanto

$$1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 - 1 \right] + \sqrt{\Delta} > 1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 + 1 \right] + \sqrt{\Delta} >$$

$$> 1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 \right] + \left| 1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 \right] \right| \geq 0 ,$$

mentre per il numeratore vale

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 - 1 \right] \right\}^2 - \Delta = \\ & = \left\{ 1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 - 1 \right] \right\}^2 - \left\{ 1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} \left[2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + 1 \right] \right\}^2 - \\ & \quad - 4 \left(1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} \right) \frac{kr}{mg} = \\ & = 2 \left\{ 1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} - \frac{kr}{mg} 2\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 \right\} \frac{2kr}{mg} - 4 \left(1 - \frac{\omega^2(R-r)}{g} \right) \frac{kr}{mg} = \\ & = -8 \left(\frac{kr}{mg} \right)^2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 < 0 , \end{aligned}$$

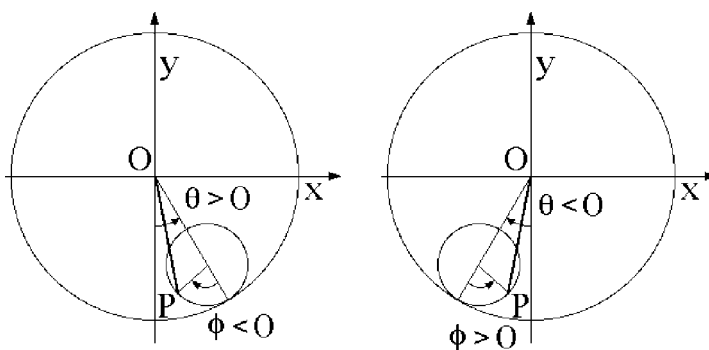
in modo che risulta

$$\mu_2 - \frac{kr}{mg} < 0 .$$

I risultati ottenuti sul segno di $\mu_i - \frac{kr}{mg}$, $i = 1, 2$, consentono di concludere che:

- (i) nel modo normale di pulsazione massima Ω_1 le coordinate lagrangiane variano sinusoidalmente **in opposizione di fase** attorno ai loro valori di equilibrio, in quanto $\mu_1 - \frac{kr}{mg} > 0$, mentre $-\mu_1 < 0$;
- (ii) nel modo normale di pulsazione minima Ω_2 le coordinate lagrangiane oscillano sinusoidalmente **in fase** attorno ai rispettivi valori di equilibrio, in virtù delle disuguaglianze $\mu_2 - \frac{kr}{mg} < 0$ e $-\mu_2 < 0$.

L'andamento qualitativo del modo normale di oscillazione corrispondente ad Ω_1 è illustrato nella figura seguente, che mostra le configurazioni assunte dal sistema durante il moto ad un semiperiodo π/Ω_1 l'una dall'altra (le ampiezze delle oscillazioni sono volutamente esagerate per maggiore chiarezza):



Per il modo normale di oscillazione relativo alla pulsazione più bassa, Ω_2 , il moto oscillatorio del sistema è invece descritto nella figura sotto riportata, con le stesse convenzioni della precedente:

