Scritto di meccanica razionale del 22.09.1999

Esercizio 1

In una terna cartesiana ortogonale $Oxyz$ si considera un sistema rigido costituito da una lamina $\mathbb{L}$ e da un'asta rettilinea $\mathbb{D}$ connesse fra loro. La lamina $\mathbb{L}$ si compone di due quadrati concentrici di centro B e lati $2a$ e a, il primo di densità $\sigma_1 = m/4a^2$, il secondo di densità $\sigma_2 = m/a^2$, che all'istante $t = 0$ sono posti nel piano coordinato Oyz come illustrato in figura. Nello stesso istante l'asta $\mathbb{D}$, di lunghezza a, si sovrappone al segmento OA lungo l'asse Ox; in un suo generico punto P la densità vale $\lambda(P) = m|P - O|/a^2$. Determinare:

(*a*) la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna $Oxyz$;

(*b*) il baricentro G del sistema;

(*c*) l'equazione dell'ellissoide d'inerzia del sistema;

(*d*) il momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta passante per O e per il punto $S(1, 2, -2)$;

(*e*) il momento angolare in O del sistema a $t = 0$, sapendo che il sistema è in moto con punto fisso O e che il vettore velocità angolare istantanea allo stesso istante è dato da $\vec{\omega} = \Omega(2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3)$, con Ω costante.

Esercizio 2

Nel piano verticale Oxy di una terna $Oxyz$, che ruota attorno all'asse Oy con velocità angolare costante $\omega\hat{e}_2$ rispetto ad un riferimento inerziale, si considera una guida circolare rigida $\mathbb{C}$, di raggio R centro G e massa M, avente un diametro assegnato AB vincolato a scorrere lungo l'asse Oy. Sulla circonferenza, ed internamente ad essa, rotola senza strisciare un disco circolare omogeneo $\mathbb{D}$, di raggio $r < R$, massa m e centro S. Il sistema è pesante ed il punto A di $\mathbb{C}$ è connesso all'origine O mediante una molla ideale di costante elastica k. Introdotte le coordinate lagrangiane θ, ξ in figura ($A - O = -R\xi\,\hat{e}_2$), supposti i vincoli ideali e sapendo che a $\mathbb{C}$ è applicata una coppia di momento $MR^2\omega^2\xi\hat{e}_1$:

(*a*) ricavare l'espressione dell'energia cinetica relativa alla terna $Oxyz$;

(*b*) individuare le configurazioni di equilibrio relative alla terna $Oxyz$ ed analizzarne le proprietà di stabilità;

(*c*) scrivere le equazioni lagrangiane del moto del sistema;

(*d*) calcolare le frequenze normali delle piccole oscillazioni nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile a scelta.

Soluzione dell'esercizio 1

(*a*) **Matrice d'inerzia**

La matrice d'inerzia del sistema può essere determinata come somma delle matrici d'inerzia, calcolate rispetto alla stessa terna $Oxyz$, dei due quadrati sovrapposti e dell'asta $\mathbb{D}$. Per un quadrato di massa M, centro B e lato L posto nel piano Oyz, la matrice d'inerzia rispetto alla terna $Bxyz$ si scrive:

$$[L^{Bxyz}] = \begin{pmatrix} ML^2/6 & 0 & 0 \\ 0 & ML^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & ML^2/12 \end{pmatrix}$$

che per il quadrato di lato $2a$, avente massa $\sigma_1 4a^2 = m$, diventa

$$[L_{2a}^{Bxyz}] = \begin{pmatrix} 2ma^2/3 & 0 & 0 \\ 0 & ma^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & ma^2/3 \end{pmatrix} = ma^2 \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

mentre per il quadrato più interno, di lato a e massa $\sigma_2 a^2 = m$, risulta

$$[L_{a}^{Bxyz}] = \begin{pmatrix} ma^2/6 & 0 & 0 \\ 0 & ma^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & ma^2/12 \end{pmatrix} = ma^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix} .$$

Considerato che B è centro di simmetria — e dunque baricentro — di entrambe le lamine quadrate, essendo $B-O = 0\,\hat{e}_1 + a\,\hat{e}_2 + a\,\hat{e}_3$ si può applicare il teorema di Huygens-Steiner generalizzato e scrivere per il quadrato esterno

$$[L_{2a}^{Oxyz}] = ma^2 \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & -a^2 \\ 0 & -a^2 & a^2 \end{pmatrix} = ma^2 \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

mentre per quello interno si ha

$$[L_{a}^{Oxyz}] = ma^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & -a^2 \\ 0 & -a^2 & a^2 \end{pmatrix} = ma^2 \begin{pmatrix} \dfrac{13}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{13}{12} & -1 \\ 0 & -1 & \dfrac{13}{12} \end{pmatrix} .$$

Per l'asta $\mathbb{D}$ i soli termini della matrice d'inerzia non banalmente nulli sono i momenti d'inerzia relativi agli assi Oy ed Oz; tali momenti sono uguali per simmetria ed il loro comune valore si ottiene facilmente applicando la definizione e tenendo presente l'espressione della densità dell'asta:

$$L_{yy} = L_{zz} = \int_0^a x^2 \lambda(x)\,dx = \int_0^a x^2 \frac{m}{a^2} x\,dx = \frac{ma^2}{4} .$$

La matrice d'inerzia rispetto ad $Oxyz$ dell'asta risulta quindi

$$[L_{\mathbb{D}}^{Oxyz}] = ma^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

e quella del sistema rigido completo

$$[L] \,=\, [L_{2a}^{Oxyz}] + [L_{a}^{Oxyz}] + [L_{\mathbb{D}}^{Oxyz}] \,=$$

$$= \, ma^2 \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 4/3 \end{pmatrix} + ma^2 \begin{pmatrix} 13/6 & 0 & 0 \\ 0 & 13/12 & -1 \\ 0 & -1 & 13/12 \end{pmatrix} + ma^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \,=$$

$$= \, ma^2 \begin{pmatrix} 29/6 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & -2 \\ 0 & -2 & 8/3 \end{pmatrix} \,.$$

(b) **Baricentro G**
Le due lamine quadrate hanno entrambe massa m e baricentro in B; quanto all'asta $\mathbb{D}$, la sua massa totale si ottiene integrando la densità λ lungo il segmento OA:

$$\int_0^a \lambda(x)\,dx \,=\, \int_0^a \frac{m}{a^2}x\,dx \,=\, \frac{m}{2}$$

per cui l'ascissa del baricentro $G_{\mathbb{D}}$ dell'asta stessa diviene

$$\frac{2}{m}\int_0^a x\lambda(x)\,dx \,=\, \frac{2}{m}\int_0^a x\frac{m}{a^2}x\,dx \,=\, \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2\,dx \,=\, \frac{2}{3}a \;,$$

mentre ordinata e quota di $G_{\mathbb{D}}$ sono banalmente nulle per il teorema dell'inviluppo convesso. Il baricentro G del sistema si può infine individuare per mezzo del teorema distributivo, coincidendo con quello del sistema di punti materiali

$$\left\{ (B,m)\,,\; (B,m)\,,\; \left(G_{\mathbb{D}}, \frac{m}{2}\right) \right\} \,.$$

Si ha pertanto:

$$G - O \,=\, \frac{1}{m+m+\dfrac{m}{2}} \Big[m(B-O) + m(B-O) + \frac{m}{2}(G_{\mathbb{D}} - O) \Big] \,=$$

$$= \, \frac{2}{5}\Big[(B-O) + (B-O) + \frac{1}{2}(G_{\mathbb{D}} - O)\Big] \,=\, \frac{2}{5}\Big[a\,\hat{e}_2 + a\,\hat{e}_3 + a\,\hat{e}_2 + a\,\hat{e}_3 + \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}a\,\hat{e}_1\Big] \,=$$

$$= \, \frac{2}{5}\Big[2a\,\hat{e}_2 + 2a\,\hat{e}_3 + \frac{1}{3}a\,\hat{e}_1\Big] \,=\, \frac{2}{15}a\,\hat{e}_1 + \frac{4}{5}a\,\hat{e}_2 + \frac{4}{5}a\,\hat{e}_3 \,.$$

(c) **Equazione dell'ellissoide d'inerzia**
Per definizione l'equazione dell'ellissoide d'inerzia, scritta rispetto alla terna $Oxyz$, è data da:

$$[x]^T[L][x] \,=\, 1$$

essendo $[x]^T = (x\,y\,z)$, $P - O = x\,\hat{e}_1 + y\,\hat{e}_2 + z\,\hat{e}_3$ e P punto arbitrario dell'ellissoide. La sostituzione della matrice d'inerzia calcolata al punto (a) porge allora:

$$(x \;\; y \;\; z)\; ma^2 \begin{pmatrix} 29/6 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & -2 \\ 0 & -2 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

ossia

$$\frac{29}{6}x^2 + \frac{8}{3}y^2 + \frac{8}{3}z^2 - 4yz \;=\; \frac{1}{ma^2}\;.$$

(d) **Momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta passante per O e per il punto $S(1, 2, -2)$**

La retta considerata passa per l'origine della terna $Oxyz$ rispetto alla quale la matrice d'inerzia del sistema è stata determinata, e risulta individuata dal versore

$$\hat{n} \;=\; \frac{\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3}{|\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3|} \;=\; \frac{\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3}{3} \;=\; \frac{1}{3}\,\hat{e}_1 + \frac{2}{3}\,\hat{e}_2 - \frac{2}{3}\,\hat{e}_3 \;=\; n_1\,\hat{e}_1 + n_2\hat{e}_2 + n_3\hat{e}_3\;.$$

Il momento d'inerzia I del sistema rispetto alla retta in questione si scrive dunque in termini della matrice d'inerzia $[L]$ e del versore $\hat{n}$ per mezzo della relazione:

$$I \;=\; (n_1\,n_2\,n_3)\,[L] \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \;=\; \Big(\frac{1}{3}\;\frac{2}{3}\;\;-\frac{2}{3}\Big)\; ma^2 \begin{pmatrix} 29/6 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & -2 \\ 0 & -2 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= ma^2\Big[\frac{29}{6}\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 + \frac{8}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^2 + \frac{8}{3}\Big(-\frac{2}{3}\Big)^2 - 4\,\frac{2}{3}\Big(-\frac{2}{3}\Big)\Big] \;=\; \frac{205}{54}ma^2\;.$$

(e) **Momento angolare in O del sistema a $t = 0$**

Le componenti del momento angolare $\vec{K}_O$ rispetto alla terna $Oxyz$ si ottengono, per definizione di operatore d'inerzia, applicando la matrice d'inerzia $[L]$ al vettore colonna $[\omega]$ delle componenti di $\vec{\omega}$ rispetto alla stessa terna. Pertanto

$$[L]\,[\omega] \;=\; ma^2 \begin{pmatrix} 29/6 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & -2 \\ 0 & -2 & 8/3 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; m\Omega a^2 \begin{pmatrix} 29/3 \\ 14/3 \\ -14/3 \end{pmatrix}$$

e di conseguenza

$$\vec{K}_O \;=\; m\Omega a^2\Big[\frac{29}{3}\,\hat{e}_1 + \frac{14}{3}\,\hat{e}_2 - \frac{14}{3}\,\hat{e}_3\Big]\;.$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) **Energia cinetica relativa ad $Oxyz$**

Rispetto alla terna di riferimento non inerziale $Oxyz$ il sistema è a vincoli indipendenti dal tempo, per cui ci si aspetta che l'energia cinetica relativa ad $Oxyz$ sia una forma quadratica definita positiva delle velocità generalizzate lagrangiane. Detta energia cinetica può determinarsi come somma di due contributi, l'uno relativo alla guida circolare, l'altro al disco. La guida $\mathbb{C}$ si limita a traslare lungo la direzione verticale e poiché il suo baricentro G è individuato dall'espressione $G - O = -R(\xi+1)\,\hat{e}_2$ ed ha velocità $\dot{G} = -R\dot{\xi}\,\hat{e}_2$, il corrispondente termine di energia cinetica si scrive

$$T_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2}M|-R\dot{\xi}\,\hat{e}_2|^2 = \frac{MR^2}{2}\dot{\xi}^2 \,.$$

Per il disco, che è privo di punti fissi, conviene fare ricorso al teorema di König, osservando che

$$S - O = S - G + G - O = (R-r)\sin\theta\,\hat{e}_1 - (R-r)\cos\theta\,\hat{e}_2 - R(\xi+1)\,\hat{e}_2 =$$

$$= (R-r)\sin\theta\,\hat{e}_1 - [R(\xi+1) + (R-r)\cos\theta]\,\hat{e}_2$$

e che il vettore velocità angolare istantanea del disco vale

$$\vec{\omega}_{\mathbb{D}} = -\frac{R-r}{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_3$$

in virtù della condizione di rotolamento senza strisciamento sulla guida circolare. Perciò

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{m}{2}\dot{S}^2 + \frac{1}{2}I^{\mathbb{D}}_{Sz}|\vec{\omega}_{\mathbb{D}}|^2 = \frac{m}{2}\dot{S}^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2$$

ed essendo

$$\dot{S} = (R-r)\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{e}_1 - [R\dot{\xi} - (R-r)\sin\theta\,\dot{\theta}]\,\hat{e}_2$$

si deduce

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{D}} &= \frac{m}{2}\big[(R-r)^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\xi}^2 - 2R(R-r)\sin\theta\,\dot{\xi}\dot{\theta}\big] + \frac{m(R-r)^2}{4}\dot{\theta}^2 = \\ &= \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{2}\dot{\xi}^2 - mR(R-r)\sin\theta\,\dot{\xi}\dot{\theta} \,. \end{aligned}$$

L'espressione per l'energia cinetica del sistema rispetto al riferimento $Oxyz$ risulta così

$$T = T_{\mathbb{C}} + T_{\mathbb{D}} = \frac{M+m}{2}R^2\dot{\xi}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 - mR(R-r)\sin\theta\,\dot{\xi}\dot{\theta} \,,$$

che costituisce una forma quadratica definita positiva in $\dot{\xi}, \dot{\theta}$, come prescritto.

(*b*) **Configurazioni di equilibrio relative ad $Oxyz$ e analisi di stabilità**
Con esclusione delle forze di Coriolis, le cui componenti lagrangiane sono tuttavia identicamente nulle per il fatto che il moto di disco e guida avviene in un piano passante per l'asse di rotazione Oy e fisso rispetto alla terna $Oxyz$, tutte le sollecitazioni agenti sul sistema hanno natura posizionale conservativa. La loro azione viene quindi descritta per mezzo di un potenziale totale, somma dei potenziali relativi alle singole sollecitazioni. Il potenziale gravitazionale del disco $\mathbb{D}$ si scrive

$$U^{\mathbb{D}}_{\mathrm{g}} = -mg\,\hat{e}_2\cdot(S-O) = mg[R(\xi+1) + (R-r)\cos\theta]$$

e quello della guida $\mathbb{C}$ assume la forma

$$U_{\mathrm{g}}^{\mathbb{C}} \;=\; -Mg\,\hat{e}_2\cdot(G-O) \;=\; MgR(\xi+1)\;,$$

mentre l'interazione elastica dovuta alla molla ideale fra A ed O fornisce l'ulteriore contributo

$$U_{\mathrm{el}} \;=\; -\frac{k}{2}|A-O|^2 \;=\; -\frac{kR^2}{2}\xi^2\;.$$

Il potenziale centrifugo della guida circolare è costante in quanto le traslazioni lungo l'asse Oy non modificano il momento d'inerzia di $\mathbb{C}$ rispetto allo stesso asse; per il potenziale centrifugo del disco si ha invece, applicando Huygens-Steiner

$$U_{\mathrm{cf}}^{\mathbb{D}} \;=\; \frac{\omega^2}{2}I_{Oy}^{\mathbb{D}} \;=\; \frac{\omega^2}{2}\Big[m(R-r)^2\sin^2\theta + I_{Sy}^{\mathbb{D}}\Big] \;=\; \frac{m\omega^2}{2}(R-r)^2\sin^2\theta + \text{costante}\;.$$

Si osservi che un qualsiasi sistema di forze $(\vec{F}_P, P)$ applicate ai punti P della guida circolare dà luogo ad un lavoro virtuale infinitesimo

$$\delta L \;=\; \sum_{P\in\mathbb{C}} \vec{F}_P\cdot(-\delta\xi R\,\hat{e}_2) \;=\; -\delta\xi\,R\,\hat{e}_2\cdot\sum_{P\in\mathbb{C}}\vec{F}_P \;=\; Q_\xi\delta\xi + Q_\theta\delta\theta$$

ed ha quindi componenti lagrangiane indipendenti dal momento del sistema

$$Q_\xi \;=\; -R\,\hat{e}_2\cdot\sum_{P\in\mathbb{C}}\vec{F}_P \qquad\qquad Q_\theta \;=\; 0\;;$$

le componenti lagrangiane della coppia di momento $MR^2\omega^2\xi\hat{e}_1$ sono perciò entrambe uguali a zero, in quanto il risultante della coppia è nullo per definizione.

Il potenziale totale del sistema risulta pertanto, a meno di costanti additive inessenziali,

$$U(\xi,\theta) \;=\; (m+M)gR\xi + mg(R-r)\cos\theta - \frac{kR^2}{2}\xi^2 + \frac{m\omega^2}{2}(R-r)^2\sin^2\theta$$

e le configurazioni di equilibrio relative a $Oxyz$ sono tutti e soli i suoi punti critici, soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} U_\xi(\xi,\theta) \;=\; (M+m)gR - kR^2\xi \;=\; 0 \\ U_\theta(\xi,\theta) \;=\; -mg(R-r)\sin\theta + m\omega^2(R-r)^2\sin\theta\,\cos\theta \;=\; 0\;. \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di equazioni disaccoppiate, la prima delle quali determina univocamente il valore della variabile ξ:

$$\xi \;=\; \frac{(M+m)g}{kR} \;=\; \xi^\star$$

mentre la seconda porge

$$\sin\theta\left[\cos\theta - \frac{g}{\omega^2(R-r)}\right] \;=\; 0$$

e di conseguenza

$$\theta \,=\, 0\;,\;\;\pi\;,$$

sempre definite, e

$$\theta \,=\, +\theta^\star\;,\;\;-\theta^\star\;, \qquad \theta^\star \,=\, \text{arc}\cos\Big[\frac{g}{\omega^2(R-r)}\Big]\;,$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia $g/\omega^2(R-r) < 1$. Complessivamente, si hanno al più quattro configurazioni di equilibrio distinte:

$$(\xi,\theta) \,=\, (\xi^\star,0)\;,\quad (\xi^\star,\pi)\;,\quad (\xi^\star,\theta^\star)\;,\quad (\xi^\star,-\theta^\star)\;.$$

L'analisi delle proprietà di stabilità richiede la preliminare determinazione delle derivate seconde del potenziale:

$$\begin{aligned}
U_{\xi\xi}(\xi,\theta) &= -kR^2 \\
U_{\xi\theta}(\xi,\theta) &= U_{\theta\xi}(\xi,\theta) \,=\, 0 \\
U_{\theta\theta}(\xi,\theta) &= -mg(R-r)\cos\theta + m\omega^2(R-r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)
\end{aligned}$$

in modo che l'hessiana di U in una configurazione (ξ,θ) qualsivoglia risulta

$$H_U(\xi,\theta) \,=\, \begin{pmatrix} -kR^2 & 0 \\ 0 & -mg(R-r)\cos\theta + m\omega^2(R-r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{pmatrix}\;.$$

Data la presenza dell'autovalore costante $\lambda_1 = -kR^2 < 0$, è evidente che la natura delle configurazioni di equilibrio dipende unicamente dal segno del secondo autovalore $\lambda_2 = -mg(R-r)\cos\theta + m\omega^2(R-r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$. Si ha così che:

(*i*) la configurazione $(\xi,\theta) = (\xi^\star,0)$, in corrispondenza della quale l'autovalore λ_2 vale $-mg(R-r) + m\omega^2(R-r)^2$, risulta un massimo relativo proprio del potenziale U per $g/\omega^2(R-r) > 1$ ed è stabile per Lagrange-Dirichlet. Essa si identifica con un punto di sella del potenziale, instabile per l'inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, nel caso $g/\omega^2(R-r) < 1$, mentre se $g/\omega^2(R-r) = 1$ ricorre un caso critico, per il quale si renderebbe necessaria una ulteriore analisi;

(*ii*) la configurazione $(\xi,\theta) = (\xi^\star,\pi)$ è sempre instabile, in quanto $\lambda_2 = mg(R-r) + m\omega^2(R-r)^2 > 0$. Il punto è di sella per il potenziale e l'instabilità segue dall'inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;

(*iii*) le configurazioni $(\xi,\theta) = (\xi^\star,\theta^\star)$, $(\xi^\star,-\theta^\star)$ manifestano le stesse proprietà di stabilità in conseguenza della simmetria del potenziale

$$U(\xi,-\theta) \,=\, U(\xi,\theta) \qquad \forall\,(\xi,\theta)\in\mathbb{R}^2$$

ed è perciò sufficiente esaminare una sola di esse. Si ha in particolare

$$\lambda_2 \,=\, -mg(R-r)\cos\theta^\star + m\omega^2(R-r)^2(\cos^2\theta^\star - \sin^2\theta^\star) \,=$$

$$
\begin{aligned}
&= -mg(R-r)\cos\theta^\star + m\omega^2(R-r)^2(2\cos^2\theta^\star - 1) = \\
&= m\omega^2(R-r)^2\Big[-\frac{g}{\omega^2(R-r)}\cos\theta^\star + 2\cos^2\theta^\star - 1\Big] = \\
&= m\omega^2(R-r)^2[-\cos^2\theta^\star + 2\cos^2\theta^\star - 1] = m\omega^2(R-r)^2[\cos^2\theta^\star - 1] < 0
\end{aligned}
$$

per cui $(\xi^\star, \theta^\star)$ e $(\xi^\star, -\theta^\star)$ sono massimi relativi propri del potenziale, stabili in forza del teorema di Lagrange-Dirichlet.

(c) **Equazioni lagrangiane del moto**
Dalle espressioni dell'energia cinetica T e del potenziale U del sistema si ricava facilmente la lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{M+m}{2}R^2\dot{\xi}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 - mR(R-r)\sin\theta\,\dot{\xi}\dot{\theta} + \\
& + (m+M)gR\xi + mg(R-r)\cos\theta - \frac{kR^2}{2}\xi^2 + \frac{m\omega^2}{2}(R-r)^2\sin^2\theta\ .
\end{aligned}
$$

Da questa si deducono le espressioni:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}} &= (M+m)R^2\dot{\xi} - mR(R-r)\sin\theta\,\dot{\theta} \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}}\Big) &= (M+m)R^2\ddot{\xi} - mR(R-r)\sin\theta\,\ddot{\theta} - mR(R-r)\cos\theta\,\dot{\theta}^2 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} &= (m+M)gR - kR^2\xi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} &= \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\theta} - mR(R-r)\sin\theta\,\dot{\xi} \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\Big) &= \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} - mR(R-r)\sin\theta\,\ddot{\xi} - mR(R-r)\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\xi} \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &= -mR(R-r)\cos\theta\,\dot{\xi}\dot{\theta} - mg(R-r)\sin\theta + m\omega^2(R-r)^2\sin\theta\,\cos\theta
\end{aligned}
$$

e le equazioni di Lagrange

$$
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}}\Big) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0
$$

si scrivono perciò:

$$
\begin{aligned}
&(M+m)R^2\ddot{\xi} - mR(R-r)\sin\theta\,\ddot{\theta} - mR(R-r)\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - (m+M)gR + kR^2\xi = 0 \\
&\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} - mR(R-r)\sin\theta\,\ddot{\xi} + mg(R-r)\sin\theta - m\omega^2(R-r)^2\sin\theta\,\cos\theta = 0\ .
\end{aligned}
$$

(*d*) **Frequenze normali delle piccole oscillazioni**

Lo studio delle piccole oscillazioni può essere condotto su ogni configurazione di equilibrio stabile in corrispondenza della quale l'hessiana del potenziale risulti definita negativa. Per semplicità si analizza la configurazione di equilibrio $(\xi,\theta) = (\xi^\star, 0)$, che è stabile per $g/\omega^2(R-r) > 1$. L'energia cinetica del sistema viene scritta in forma matriciale

$$T = \frac{M+m}{2}R^2\dot{\xi}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 - mR(R-r)\sin\theta\,\dot{\xi}\dot{\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{\xi}\ \ \dot{\theta})\begin{pmatrix} (M+m)R^2 & -mR(R-r)\sin\theta \\ -mR(R-r)\sin\theta & \dfrac{3}{2}m(R-r)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\xi} \\ \dot{\theta}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\dot{\xi}\ \ \dot{\theta})A(\xi,\theta)\begin{pmatrix}\dot{\xi} \\ \dot{\theta}\end{pmatrix}$$

in modo che la matrice dell'energia cinetica risulta

$$A(\xi,\theta) = \begin{pmatrix} (M+m)R^2 & -mR(R-r)\sin\theta \\ -mR(R-r)\sin\theta & \dfrac{3}{2}m(R-r)^2 \end{pmatrix}$$

mentre l'hessiana del potenziale totale è già stata ricavata in precedenza

$$H_U(\xi,\theta) = \begin{pmatrix} -kR^2 & 0 \\ 0 & -mg(R-r)\cos\theta + m\omega^2(R-r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{pmatrix}.$$

Le pulsazioni normali Ω_1, Ω_2 delle piccole oscillazioni nell'intorno di $(\xi,\theta) = (\xi^\star, 0)$ sono determinate dalle soluzioni in $\Omega > 0$ dell'equazione caratteristica

$$\det\big[\Omega^2 A(\xi^\star,0) + H_U(\xi^\star,0)\big] = 0$$

che equivale a

$$\det\begin{pmatrix} \Omega^2(M+m)R^2 - kR^2 & 0 \\ 0 & \Omega^2\dfrac{3}{2}m(R-r)^2 - mg(R-r) + m\omega^2(R-r)^2 \end{pmatrix} = 0$$

ossia

$$\big[\Omega^2(M+m)R^2 - kR^2\big]\Big[\Omega^2\frac{3}{2}m(R-r)^2 - mg(R-r) + m\omega^2(R-r)^2\Big] = 0 .$$

Le pulsazioni risultano pertanto

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \qquad \Omega_2 = \sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{g-\omega^2(R-r)}{R-r}} .$$

Soluzione dell'esercizio 1 - Versione alternativa
(a) **Matrice d'inerzia**
La matrice d'inerzia del sistema può essere determinata come somma delle matrici d'inerzia, calcolate rispetto alla stessa terna $Oxyz$, dei due cerchi sovrapposti e dell'asta $\mathbb{D}$. Per un disco circolare omogeneo di massa M, centro C e raggio R posto nel piano Oyz, la matrice d'inerzia rispetto alla terna $Cxyz$ si scrive:

$$[L^{Cxyz}] = \begin{pmatrix} MR^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/4 \end{pmatrix}$$

che per il cerchio di raggio $2b$, avente massa $\sigma_1 4\pi b^2 = m$, diventa

$$[L_{2b}^{Cxyz}] = \begin{pmatrix} 2mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & mb^2 \end{pmatrix} = mb^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre per il quadrato più interno, di raggio b e massa $\sigma_2\pi b^2 = m$, risulta

$$[L_{b}^{Cxyz}] = \begin{pmatrix} mb^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & mb^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & mb^2/4 \end{pmatrix} = mb^2 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} .$$

Considerato che C è centro di simmetria — e dunque baricentro — di entrambe le lamine circolari, essendo $C - O = 0\,\hat{e}_1 + 2b\,\hat{e}_2 + 0\,\hat{e}_3$ si può applicare il teorema di Huygens-Steiner generalizzato e scrivere per il disco esterno

$$[L_{2b}^{Oxyz}] = mb^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 4b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4b^2 \end{pmatrix} = mb^2 \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

mentre per quello interno si ha

$$[L_{a}^{Oxyz}] = mb^2 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 4b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4b^2 \end{pmatrix} = mb^2 \begin{pmatrix} 9/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 17/4 \end{pmatrix} .$$

Per l'asta $\mathbb{D}$ i soli termini della matrice d'inerzia non banalmente nulli sono i momenti d'inerzia relativi agli assi Oy ed Oz; tali momenti sono uguali per simmetria ed il loro comune valore si ottiene facilmente applicando la definizione e tenendo presente l'espressione della densità dell'asta:

$$L_{yy} = L_{zz} = \int_0^b x^2 \lambda(x)\,dx = \int_0^b x^2 \frac{m}{b^3} x^2\,dx = \frac{mb^2}{5} .$$

La matrice d'inerzia rispetto ad $Oxyz$ dell'asta risulta quindi

$$[L_{\mathbb{D}}^{Oxyz}] = mb^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

e quella del sistema rigido completo

$$[L] = [L_{2b}^{Oxyz}] + [L_{b}^{Oxyz}] + [L_{\mathbb{D}}^{Oxyz}] =$$

$$= mb^2 \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + mb^2 \begin{pmatrix} 9/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 17/4 \end{pmatrix} + mb^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} =$$

$$= mb^2 \begin{pmatrix} 21/2 & 0 & 0 \\ 0 & 29/20 & 0 \\ 0 & 0 & 189/20 \end{pmatrix} .$$

(b) **Baricentro** G
Le due lamine circolari hanno entrambe massa m e baricentro in C; quanto all'asta $\mathbb{D}$, la sua massa totale si ottiene integrando la densità λ lungo il segmento OA:

$$\int_0^b \lambda(x)\, dx = \int_0^b \frac{m}{b^3} x^2\, dx = \frac{m}{3}$$

per cui l'ascissa del baricentro $G_{\mathbb{D}}$ dell'asta stessa diviene

$$\frac{3}{m}\int_0^b x\lambda(x)\, dx = \frac{3}{m}\int_0^b x\frac{m}{b^3}x^2\, dx = \frac{3}{b^3}\int_0^b x^3\, dx = \frac{3}{4}b ,$$

mentre ordinata e quota di $G_{\mathbb{D}}$ sono banalmente nulle per il teorema dell'inviluppo convesso. Il baricentro G del sistema si può infine individuare per mezzo del teorema distributivo, coincidendo con quello del sistema di punti materiali

$$\left\{ (C,m)\, ,\ (C,m)\, ,\ \left(G_{\mathbb{D}}, \frac{m}{3}\right) \right\} .$$

Si ha pertanto:

$$G - O = \frac{1}{m + m + \dfrac{m}{3}} \Big[m(C-O) + m(C-O) + \frac{m}{3}(G_{\mathbb{D}} - O) \Big] =$$

$$= \frac{3}{7}\Big[(C-O) + (C-O) + \frac{1}{3}(G_{\mathbb{D}} - O)\Big] = \frac{3}{7}\Big[2b\,\hat{e}_2 + 2b\,\hat{e}_2 + \frac{1}{3}\,\frac{3}{4}b\,\hat{e}_1\Big] =$$

$$= \frac{3}{7}\Big[4b\,\hat{e}_2 + \frac{1}{4}b\,\hat{e}_1\Big] = \frac{3}{28}b\,\hat{e}_1 + \frac{12}{7}b\,\hat{e}_2 .$$

(c) **Equazione dell'ellissoide d'inerzia**
Per definizione l'equazione dell'ellissoide d'inerzia, scritta rispetto alla terna $Oxyz$, è data da:

$$[x]^T[L][x] = 1$$

essendo $[x]^T = (x\,y\,z)$, $P - O = x\,\hat{e}_1 + y\,\hat{e}_2 + z\,\hat{e}_3$ e P punto arbitrario dell'ellissoide. La sostituzione della matrice d'inerzia calcolata al punto (a) porge allora:

$$(x\ \ y\ \ z)\ mb^2 \begin{pmatrix} 21/2 & 0 & 0 \\ 0 & 29/20 & 0 \\ 0 & 0 & 189/20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

ossia

$$\frac{21}{2}x^2 + \frac{29}{20}y^2 + \frac{189}{20}z^2 = \frac{1}{mb^2}\ .$$

(d) **Momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta passante per O e per il punto $S(1,2,-2)$**
La retta considerata passa per l'origine della terna $Oxyz$ rispetto alla quale la matrice d'inerzia del sistema è stata determinata, e risulta individuata dal versore

$$\hat{n} = \frac{\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3}{|\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3|} = \frac{\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3}{3} = \frac{1}{3}\,\hat{e}_1 + \frac{2}{3}\,\hat{e}_2 - \frac{2}{3}\,\hat{e}_3 = n_1\,\hat{e}_1 + n_2\hat{e}_2 + n_3\hat{e}_3\ .$$

Il momento d'inerzia I del sistema rispetto alla retta in questione si scrive dunque in termini della matrice d'inerzia $[L]$ e del versore $\hat{n}$ per mezzo della relazione:

$$I = (n_1\,n_2\,n_3)\,[L] \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \Big(\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \ -\frac{2}{3}\Big)\ mb^2 \begin{pmatrix} 21/2 & 0 & 0 \\ 0 & 29/20 & 0 \\ 0 & 0 & 189/20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= mb^2\Big[\frac{21}{2}\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 + \frac{29}{20}\Big(\frac{2}{3}\Big)^2 + \frac{189}{20}\Big(-\frac{2}{3}\Big)^2\Big] = \frac{541}{90}mb^2\ .$$

(e) **Momento angolare in O del sistema a $t = 0$**
Le componenti del momento angolare $\vec{K}_O$ rispetto alla terna $Oxyz$ si ottengono, per definizione di operatore d'inerzia, applicando la matrice d'inerzia $[L]$ al vettore colonna $[\omega]$ delle componenti di $\vec{\omega}$ rispetto alla stessa terna. Pertanto

$$[L]\,[\omega] = mb^2 \begin{pmatrix} 21/2 & 0 & 0 \\ 0 & 29/20 & 0 \\ 0 & 0 & 189/20 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = m\Omega b^2 \begin{pmatrix} 21 \\ 29/20 \\ -189/20 \end{pmatrix}$$

e di conseguenza

$$\vec{K}_O = m\Omega b^2\Big[21\,\hat{e}_1 + \frac{29}{20}\,\hat{e}_2 - \frac{189}{20}\,\hat{e}_3\Big]\ .$$